

# 水たまりの静力学とその実験用教材

On statics of a puddle and an educational material for its experiments

岸本 功, 赤間 俊介, 小柳 翔太, 小杉 真登, 佐藤 智宏

Isao Kishimoto, Shunsuke Akama, Shota Oyanagi, Masato Kosugi, Tomohiro Sato

新潟大学教育学部

Faculty of Education, Niigata University

## Abstract

水に油を浮かべ、数か所を針で引っ張るときにできる形に着目し、物理の問題として単純化した理論を記述するとともに、対応する現象の実験方法についても具体的に示す。今回、実際に行った実験結果を解析し、理論的予測と比較することで、用いた理論の前提(仮定・近似)の妥当性などについて検討する。ここで詳述した実験は、学校の理科室等に限らず、自宅の台所でも実施できるものであり、手軽な理科教材として利用できるという観点からも議論する。

## 1 Introduction

日常生活において観察される様々な現象を、基本法則に基づき数式を用いて簡潔に説明することは、物理学の具体的な問題となる。我々は、特にしずくやあわに関係した現象に興味をもち、関連する教科書 [1] などを基にゼミを行っている。<sup>\*1</sup> ここでは、水に油を浮かべてできる「水たまり」<sup>\*2</sup>の形について、理論的および実験的な考察をする。理論的には、流体力学に基づいて精密なことを考慮すると、数学的に複雑な計算になると思われるが、ここでは、問題を単純化するために、いくつかの近似をする(あるいは仮定を課す)ことによって、簡単な数学で解析できることを示す。今回の実験は、研究室や学校の理科室等で行うような特別な装置を必要とするものではなく、各自の自宅の台所でも手軽に遂行可能なものである。

次節では、まず水たまりの静力学の理論を文献 [1] の方針に従って具体的に記述し、§3 では対応する実験の方法・結果およびその解析をする。§4 では今回の実験のまとめと学校等の教材という観点から議論する。

## 2 Theory

ここでは、理論的解析を簡単にするため、水平な水の上に浮かぶ油(以下では水たまりと呼ぶ)について、(a) 水たまりの体積  $V$  は一定、(b) 水たまりの厚さ  $e$  は一定、(c) 水たまりの線張力  $\mathcal{J}$  は一定、(d) 水たまりの 2次元圧力は一定、という仮定(近似)をする。

仮定 (a), (b) より水たまりの面積  $A$  は一定で  $A = V/e$  である。一方、一般に水平方向に 2 次的に広がっている流体に対し、その面積  $A$  とその境界の長さ  $\ell$  がそれぞれ  $dA$ ,  $d\ell$  だけ微小に変化したとき、2次元圧力  $p_2$  と線張力による力のする仕事  $W$  の変化  $\delta W$  は  $\delta W = -p_2 dA + \mathcal{J} d\ell$  となる。流体が半径  $R$  の円形の場合、 $A = \pi R^2$ ,  $\ell = 2\pi R$  より  $dA = 2\pi R dR$ ,  $d\ell = 2\pi dR$  なので、 $\delta W = -p_2(2\pi R dR) + \mathcal{J}(2\pi dR) = 2\pi(-p_2 R + \mathcal{J})dR$  となる。力がつり合っている場合、 $\delta W = 0$  となること(仮想仕事の原理)から、 $dR$  の係数がゼロとなり、2次元圧力  $p_2$  は  $p_2 = \mathcal{J}/R$  で与えられる。この関係式は、円形に限らず一般化できる<sup>\*3</sup> と

<sup>\*1</sup> 著者らによる 2016 年度卒業研究のゼミ。

<sup>\*2</sup> 水ではなく油のほうの形を議論するので、油たまりというべきかもしれないが、本稿では、日常生活でよく使われている水たまりという言葉を使うことにする。

<sup>\*3</sup> このことは、文献 [1] 第 1 章補遺の類推で、次のように理解できる。 $xy$  平面において、水たまりの領域を  $S$ 、その縁を  $C(= \partial S)$  とすると、つり合いの問題は、線張力によるエネルギーを表す汎関数:  $G = \oint_C \mathcal{J} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt - \lambda(\int_S dx dy - A)$  が変分

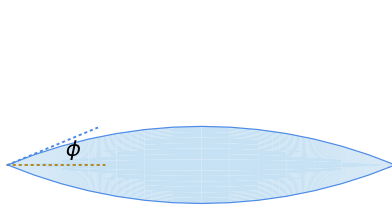


図1 2点で逆向きに引っ張る場合. 引っ張っている点における水たまりの縁の角度を  $2\phi$  とする.

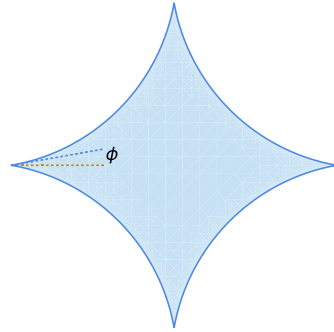


図2 4点で対称に引っ張る場合. 引っ張っている点における水たまりの縁の角度を  $2\phi$  とする.

すると,  $R$  は2次元的に広がった流体の境界(縁)の曲率半径を表す. よって, 仮定(c), (d) から, 曲率半径  $R = \mathfrak{J}/p_2$  は一定となる.

水たまりの面積を  $A$  とするとき, 特に力を加えない場合, 曲率半径が一定ということから, 水たまりは円形になり, その円の半径  $R_0$  との関係は  $A = \pi(R_0)^2$  となる. 以下では, 水たまりの縁の数が所を対称に引っ張る力を加えた場合の水たまりの形を議論する.\*4 ここでは, 引っ張る箇所を「点」とみなしており, 理想化した状況であることに注意しよう.

## 2.1 2か所で引く場合

水たまりの2か所を, 互いに逆向きに針の先で引っ張ると, その針の先では水たまりの縁は折れ曲がるが, 仮定から縁の折れ曲がる2点を除く部分では, 曲率半径  $R_2$  は一定である. 従って, 図1のように, 2つの円弧が交わる形になると考えられる. 交点における縁のなす角度を  $2\phi$  とすると, 水たまりの面積  $A$  は, 半径  $R_2$  で角度  $\pi - 2(\pi/2 - \phi) = 2\phi$  の扇形の面積から二等辺三角形(長さ  $R_2$  の2つの辺の間の角が  $2\phi$  のもの)の面積を引いて2倍したものの, つまり,

$$A = 2 \left\{ \pi(R_2)^2 \frac{2\phi}{2\pi} - \frac{1}{2}(2R_2 \sin \phi)(R_2 \cos \phi) \right\} \quad (1)$$

のように表される. この関係式から, 水たまりの面積  $A$  と縁の角度  $2\phi$  が与えられたとき, 曲率半径  $R_2$  は

$$R_2 = \sqrt{\frac{A}{2\phi - \sin 2\phi}} \quad (2)$$

のように求まる.  $\phi$  の取り得る範囲は  $0 < \phi < \pi/2$  である.  $\phi \rightarrow +0$  の極限では, 曲率半径  $R_2 \rightarrow \infty$  で, 水たまりは無限に伸びる形になり,  $\phi \rightarrow \pi/2 - 0$  の極限では曲率半径  $R_2 \rightarrow R_0 = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$  で円形に戻る.

$\delta x, \delta y$  に対して停留する条件を求めればよいことになる. ここで仮定(a), (b)より, 定数  $A$  は水たまりの面積を表し,  $\lambda$  はラグランジュ未定乗数である.  $t$  は  $C$  をパラメトライズする変数で  $\dot{x}, \dot{y}$  は  $x, y$  の  $t$  による微分を表す. ここでストークスの定理を用いると  $\int_S dxdy = \frac{1}{2} \oint_C (x\dot{y} - y\dot{x})dt$  となり,  $G = \oint_C \{ \mathfrak{J} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} - \frac{\lambda}{2} (x\dot{y} - y\dot{x}) \} dt + \lambda A$  と書き換えられ,  $x \rightarrow x + \delta x, y \rightarrow y + \delta y$  の変分のもとで,  $\delta G = \oint_C \{ (-\frac{d}{dt} (\mathfrak{J} \dot{x} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-1/2}) - \lambda \dot{y}) \delta x + (-\frac{d}{dt} (\mathfrak{J} \dot{y} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-1/2}) + \lambda \dot{x}) \delta y \} dt$  と計算される. よって,  $\delta G = 0$  という停留条件: オイラー-ラグランジュ方程式は  $-\frac{d}{dt} (\mathfrak{J} \dot{x} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-1/2}) - \lambda \dot{y} = 0$ ,  $-\frac{d}{dt} (\mathfrak{J} \dot{y} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-1/2}) + \lambda \dot{x} = 0$  で表される. 一方, 縁  $C$  上の曲率半径  $R$  は,  $1/R = (\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x})(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-3/2}$  で与えられる(例えば文献[2]参照)が, これは, オイラー-ラグランジュ方程式を用いて  $\ddot{x}, \ddot{y}$  を消去することにより,  $(\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x})(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-3/2} = \lambda/\mathfrak{J}$  と計算されるので,  $1/R = \lambda/\mathfrak{J}$  となる. よって, 仮定(d)に注意して, ラグランジュ未定乗数として導入した  $\lambda$  を2次元圧力  $p_2$  とみなすと関係式:  $p_2 = \mathfrak{J}/R$  を得る.

\*4 特に2点と4点の場合(図1, 図2)については, 文献[1]で言及されている.

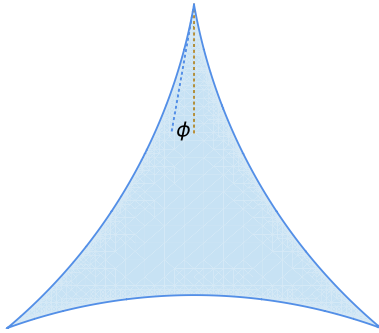


図3 3点で対称に引っ張る場合. 引っ張っている点における水たまりの縁の角度を $2\phi$ とする.

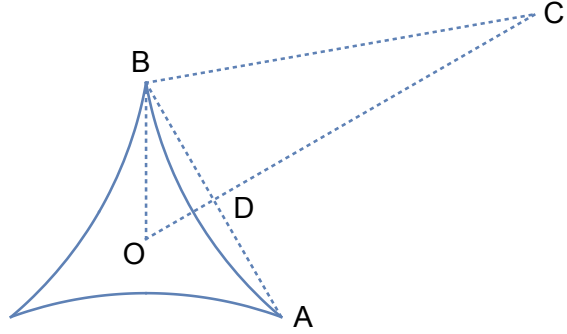


図4 3点で対称に引っ張る場合(図3)の曲率半径を求めるため、補助線(点線)を引いたもの. 引っ張る点のうち2つをA, Bとし、水たまりの中心をOとする. 弧ABをなす円の中心をCとし、線分ABとOCの交点をDとする.

### 2.2 3か所で引く場合

水たまりの3か所を対称に針の先で引っ張ると、それぞれ針の先では水たまりの縁は折れ曲がるが、仮定から縁の折れ曲がる3点を除く部分では、曲率半径 $R_3$ は一定である. 従って、図3のように、3つの円弧が交わる形になると考えられる. 交点における縁のなす角度を $2\phi$ とすると、 $\angle OBC = \phi + \pi/2$ であり、 $\angle BOC = \pi/3$ であることを用いると $\angle OCB = \pi - (\phi + \pi/2 + \pi/3) = \pi/6 - \phi$ となる. よって、水たまりの面積 $A$ は、三角形OCBの面積から角度 $\pi/6 - \phi$ で半径 $R_3 (= BC)$ の扇形の面積を引いて6倍して、

$$\begin{aligned}
 A &= 6 \left\{ \frac{1}{2} (CD + OD) \cdot BD - \pi (R_3)^2 \frac{\pi/6 - \phi}{2\pi} \right\} \\
 &= 6 \left\{ \frac{1}{2} \left( R_3 \cos\left(\frac{\pi}{6} - \phi\right) + R_3 \sin\left(\frac{\pi}{6} - \phi\right) \cot \frac{\pi}{3} \right) R_3 \sin\left(\frac{\pi}{6} - \phi\right) - (R_3)^2 \frac{\pi/6 - \phi}{2} \right\} \\
 &= (R_3)^2 \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} (1 + \cos 2\phi - \sqrt{3} \sin 2\phi) + 3\phi - \frac{\pi}{2} \right\} \tag{3}
 \end{aligned}$$

のように計算できる. したがって、水たまりの面積 $A$ と縁の角度 $2\phi$ が与えられたとき、曲率半径 $R_3$ は

$$R_3 = \sqrt{\frac{A}{\frac{\sqrt{3}}{2} (1 + \cos 2\phi - \sqrt{3} \sin 2\phi) + 3\phi - \frac{\pi}{2}}} \tag{4}$$

となる. このとき、水たまりの頂点間の距離は $AB = 2R_3 \sin(\pi/6 - \phi)$ で与えられる.

$\phi$ の取り得る範囲は $0 < \phi < \pi/6$ である.  $\phi \rightarrow \pi/6 - 0$ の極限では、 $R_3 \rightarrow \infty$ で、水たまりは正三角形となる. 逆に、 $\phi \rightarrow +0$ で $R_3$ が最小値:  $\min R_3 = \sqrt{\frac{A}{\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}}}$ をとる. さらに引くと、水たまりが一つではいられない、つまり、分裂等する、と考えられる.

### 2.3 4か所で引く場合

水たまりの4か所を対称に針の先で引っ張ると、それぞれ針の先では水たまりの縁は折れ曲がるが、仮定から縁の折れ曲がる4点を除く部分では、曲率半径 $R_4$ は一定である. 従って、図2のように、4つの円弧が交わる形になると考えられる. 交点における角度を $2\phi$ とし、水たまりの面積 $A$ とすると、曲率半径 $R_4$ は

(3点で引く場合と同様に計算できて)

$$R_4 = \sqrt{\frac{A}{2(1 + \cos 2\phi - \sin 2\phi) + 4\phi - \pi}} \quad (5)$$

となる.  $\phi$  の取り得る範囲は  $0 < \phi < \pi/4$  である.  $\phi \rightarrow \pi/4 - 0$  の極限では,  $R_4 \rightarrow \infty$  で, 水たまりは正方形となる. 逆に,  $\phi \rightarrow +0$  で  $R_4$  が最小値:  $\min R_4 = \sqrt{\frac{A}{4 - \pi}}$  をとる. さらに引くと, 水たまりが一つではいられない, つまり, 分裂等する, と考えられる.

### 3 Experiments

ここでは, 前節で述べた理論に対応する実験の詳細について, 具体的に記述する.

■使用したもの 実験器具: 皿, 針, ストロー (針の固定用), 定規, スポイト; 実験装置: LED ライト (スマホ付属のもの), iPad (実験中の写真・動画の撮影・確認用); 使用した液体: 水, サラダ油

■実験手順 皿に水を張り, サラダ油をスポイトで数滴垂らし, サラダ油による一つの「水たまり」ができるのを待つ. 水たまりの縁付近を針で数箇所触れた後, 全体の対称性を保つようにゆっくり外側に引っ張る.

これらの操作の際, 水たまりの形を視覚的に見やすくするため, 部屋全体を暗くし, スマホの LED ライトで上方から照らした. 大きさの確認のため, 定規を水たまりの横付近に置き, 上から iPad で写真・動画を撮影した. ストローに固定した針を数人で慎重に動かして水たまりを変形させてみたが, 縁の2か所を引っ張った場合, 針付近にサラダ油が集まってきて, 図1のような縁の角ではなく, かなり丸みを帯びた形になり, 水たまりの縁を2「点」で引っ張っている, という近似はよくないと判断した. 3か所で引く場合, 慎重にゆっくりと引っ張ることで, 図3に近い形に変形できたので, その実験結果を次に述べる.

#### 3.1 3か所で引く場合の実験結果

水を張った皿に, サラダ油をスポイトで5滴たらして作成した水たまりは, 図5のようになった. この水たまりの縁付近3箇所を針で触れ, 対称な形になるようにゆっくりと引っ張って変形した水たまりの様子が図6, 7, 8である. それぞれパソコン上でこれらの画像を解析することにより, 円形の際の半径  $R_0$  と3か所で引いたときの角度  $\phi$  の値を求めた.

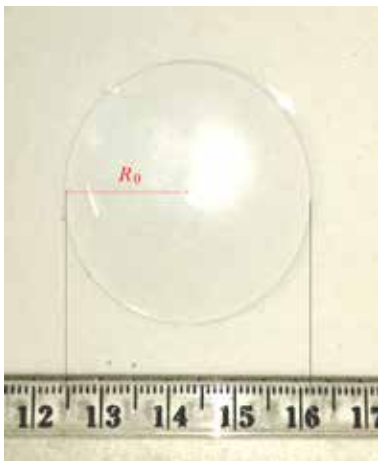


図5 水たまり.  $R_0 = 18.4$  mm

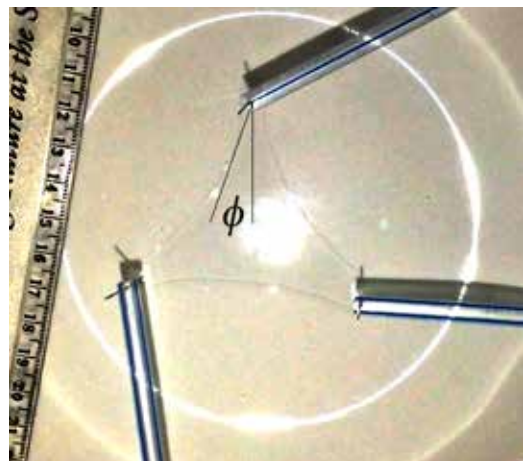
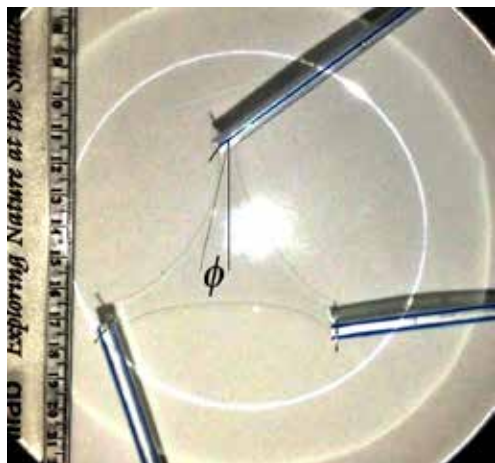
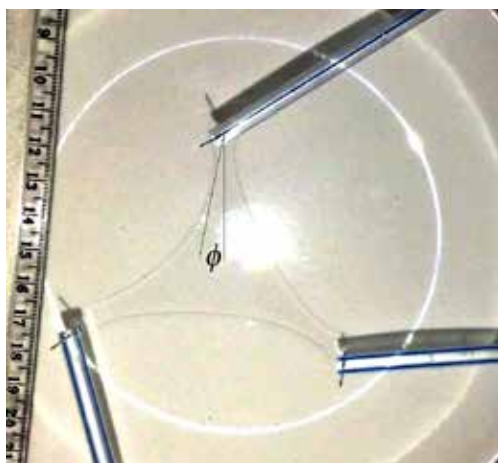


図6 3か所で引く場合.  $\phi = 0.3410$  rad

図7 3か所で引く場合.  $\phi = 0.2202 \text{ rad}$ 図8 3か所で引く場合.  $\phi = 0.1958 \text{ rad}$ 

### 3.2 理論値との比較

縁に力を加えない円形の水たまりの面積  $A = \pi(R_0)^2$  は、図5の値を用いると  $A = 1063 \text{ mm}^2$  となる. この面積  $A$  が一定であるとして式(4)から、図6, 7, 8の場合の水たまりの曲率半径  $R_3$ 、頂点間の距離  $AB = 2R_3 \sin(\pi/6 - \phi)$  を求めると表1のようになる. 表1の  $AB^*$  はそれぞれの画像中に写っている定規の目盛から見積もった、水たまりの頂点間の距離である. 各画像からわかるように、理想的な形の図3と比較して、各頂点の位置の取り方に曖昧さがあるため  $AB^*$  は大体の値である.\*5

$\phi$ [rad]	$R_3$ [mm]	AB [mm]	$AB^*$ [mm]	AB/ $AB^*$
0.3410	153.7	55.82	62	0.90
0.2202	103.3	61.70	68	0.91
0.1958	98.07	63.15	69	0.92

表1 水たまりの面積が図5のものと同じである、としたときの、図6, 7, 8の水たまりの曲率半径、頂点間距離の計算値:  $R_3$ , ABと各写真からの頂点間距離の見積もり値  $AB^*$ .

表1の  $AB/AB^*$  の値から、頂点間距離の計算値 AB は、画像からの見積もり値  $AB^*$  の90%程度の大きさであることがわかる. 言い換えると、§2の簡単化した理論により、実測値を9割再現できたということになる.

## 4 Concluding remarks

ここでは、前節までの水たまりの実験に関して、いくつかコメント等を述べた後、学校における教材という観点からの議論する.

\*5 引っ張っている針付近は、水たまりの縁の1点になっているわけではなく、実際は、針の周りに水たまりの液体(サラダ油)が少し集まっている. また、3か所の針の位置がなす三角形は、正確な正三角形から少しずれている.

#### 4.1 今回の実験について

本実験で使用したサラダ油は、冷暗所で保存されていたものであったため、針で引っ張る操作等を繰り返すうちに、水や空気等と熱のやり取りをし、温度が上昇していったと考えられる。<sup>\*6</sup> 実際、サラダ油の滴を水上に垂らした直後よりも、しばらく時間が経過した後のほうが、水たまりの大きさ(円の半径)が大きくなっていることが観測された。§3.2 で用いた図5の半径  $R_0$  の値は 18.4mm であるが、その4秒前は 16.7mm、18秒前は 9.25mm であった。水たまりの厚みは表面(界面)張力に依存する [1] が、この表面(界面)張力自体に温度依存性があるため、時間経過にともなう温度変化により厚みが変わり、水たまりの面積一定の仮定が破れてくる。<sup>\*7</sup>

温度変化の効果を防ぐため、水たまりを1時間程度放置して熱平衡状態にした後に針で引っ張る実験を遂行することを試みたが、長時間放置するとサラダ油が水上で自然に拡散し、一つの水たまりが分裂してしまっていた。より低い室温の場所で、あまり時間をかけずに実験を行うと、水たまりの大きさの、温度による変化を少なくできたであろう。

今回の実験については §3.2 でみたように、定量的には 90% 程度の精度(理論値と実測値の比)なので、その値の誤差等については考慮していない。実験の測定回数を増やし、統計用のデータを増やすことで誤差を小さくすることができると思われるが、水たまりの温度変化の効果や縁付近(特に針の周り)の厚みの変化による面積一定の仮定(近似)の破れのほうが、より全体の精度に効いてくると考えられる。

まとめると、実験方法の詳細について改善の余地があるが、今回、概ね理論と整合する実験結果を得ることができた。

#### 4.2 教材としての展望

この実験では、特別な器具・装置等は使わずに、なるべく身近にあるものだけを用いて遂行することを心掛けた。使用した道具はありふれたもの(皿、針、ストロー等)であり、大学の実験室や学校の理科室等に限りなく、普通の教室の机上や自宅の台所等でも遂行可能な手軽なものである。ただし、単に水たまりの形を観察するだけでなく、実験結果を定量的に画像解析するためには、デジカメ等で撮影する必要がある。ここでは、iPad を利用できたので、形を確認しながらの撮影が容易であった。

写真・動画のデータファイルに基づく画像解析をするにあたっては、特殊な装置や特別なソフトを利用したわけではなく、標準的なノートパソコン上で Windows 付属のソフト Snipping Tool とフリーソフト GIMP 2.8 を用いた。

理論面において、§2 の最初の仮定を認めれば、あとは図形の面積の問題であり、§2.2 で詳しく説明した曲率半径を求める式の導出は、高校数学の知識で十分理解可能である。三角関数を使わない式で表現すれば、中学生の数学の知識でも理解できると思われる。

以上のように、今回の水たまりの静力学の題材は、理論と実験を、定性的だけでなく定量的にも比較できる教材として活用できる可能性がある。

## References

- [1] ドウジエンス, プロシヤール-ヴィアール, ケレ(共著), 奥村剛(訳), “表面張力の物理学—しずく, あわ, みずたま, さぎなみの世界—,” 吉岡書店(2003).
- [2] 植松恒夫, “力学,” 学術図書出版社(2002).

<sup>\*6</sup> 実験日は2016年9月27日で、実験を行ったときの室温は摂氏27度であった。

<sup>\*7</sup> 線張力も表面(界面)張力に依存する [1] ので、これが一定という仮定も破れる可能性がある。さらに、温度変化による液体の密度変化に伴う、水たまりの体積一定の仮定も破れる可能性もある。