長さ, 面積, 体積と円周率 π – 数学史および教育上の考察 （１）

Length, Area, Volume and π – Educational Study (1)

長谷川 敬三
新潟大学教育学部

0　はじめに

初等・中等教育における算数・数学教育において，「長さ, 面積, 体積」は重要かつ基本的な概念です。これらの概念は，数学史上でも初期の段階から現代数学の段階に至るまで基本的かつ中心的な位置にあって，特に幾何学および解析学においては「計量」「測度」として一般化され，現在でも重要な研究対象になっています。幾何学においては「計量」はさらに「テンソル」として捉えられ，幾何学的構造の根幹をなすものです。一方，統計確率を含む解析学においては,「ルベーグ測度」は理論の基盤としての役割を担っています。応用数学として，新しい研究分野であり情報科学とも深く関係した「複雑系」「フラクタル幾何学」においても,「複雑性」を測るハウスドルフ測度（次元）への拡張等は重要な研究対象になっています。

この論文において,「長さ, 面積, 体積」について，数学史的に概観して，関連する興味ある問題についての議論，現代数学の立場からの捉え方，そして初等・中等教育における，教育上の留意点，教材研究について，何回かに分けて論述したいと考えています。

「長さ, 面積, 体積」および「円周率 π」の概念のだいじさ，それらの捉え方，教育上の興味ある問題や課題，教材研究への応用等について，特に，算数・数学教育に携わっている教員の方々に再考・塾考の機会を与えることができればと願っています。

1　多角形の面積

1.1　ユークリッド平面における多角形の面積

「多角形の面積」について述べます.「面積」とは,任意の多角形 F に対して非負の実数 $\tau(F)$ を対応させるもので，

(i) $F_1 = F_2$ (合同) $\Rightarrow \tau(F_1) = \tau(F_2)$

(ii) $F = F_1 \cup F_2 \Rightarrow \tau(F) = \tau(F_1) + \tau(F_2)$
　(ただし F_1, F_2 は内部を共有しないものとする)

を満たすものと定義されます。ユークリッド平面幾何学において，一辺の長さ 1 の正方形 F_0 の面積を 1 とすると多角形の面積が一意的に定まります。実際，縦と横の長さがそれぞれ正の整数 k, l の長方形の面積は kl で，有理数 $\frac{1}{m}, \frac{1}{n}$ の長方形 $F_{m,n}$ の面積は，$F_{m,n}$ を平行移動して mn 個合わせると F_0 になることから，

$$\tau(F_{m,n}) = \frac{1}{mn}$$

ですから，縦と横の長さがそれぞれ有理数 $\frac{k}{m}, \frac{l}{n}$ の長方形の面積は $\frac{kl}{mn}$ でなくてはならない。さらに，縦と横の長さがそれぞれ正の実数 c, d の長方形の面積は cd となることは，それぞれ単調増加有理数列 $\underline{c}_m, \underline{d}_n$ および単調減少有理数列 $\bar{c}_m, \bar{d}_n$ で c, d に収束するものが取れることから，導けます。例えば，$\underline{c}_m, \bar{c}_m$ として，実数 c を小数表示で，

$$c = c_0.c_1c_2\cdots c_m\cdots$$

したとき，

$$\underline{c}_m = c_0.c_1c_2\cdots c_m,\ \bar{c}_m = c_0.c_1c_2\cdots c_{m-1}(c_m+1)$$

が取れます。ここで，$\bar{c}_m$ は $c_m = 9$ のときは $c_m = 0$ として c_{m-1} を $c_{m-1}+1$ に「繰り上げる」必要があり，さらに必要があれば上の位へ繰り上げます。

以上により，縦と横の長さがそれぞれ正の実数 c, d の長方形 $F_{c,d}$ の面積は，

$$\tau(F_{c,d}) = cd$$

で与えられることが示せました。直角三角形の面積は $\frac{1}{2}\times$ (底辺 $\times$ 高さ) で与えられます。任意の三角形，さらに任意の多角形は直角三角形の和に分割されますから，それらの面積も確定します。したがって，

「ユークリッド平面幾何学において，一辺の長さ 1 の正方形の面積を 1 とすると，多角形の面積が一意的に定まる」

が成り立ちます。

1.2　双曲平面における多角形の面積

ユークリッド平面における多角形の面積の定義は，「平行の公理」に基づいています。つまり，ユークリッド平面においては，三角形の内角の和が二直角，したがって同じ大きさの正方形を隙間なく並べて長方形が作れます。「平行の公理」を公理としない絶対幾何学においては，このことは成り立つとは限りません。実際に，絶対幾何学において，いわゆる「サッケリの四角形」はこのことを示す例になっています。サッケリの四角形とは，線分 AB 上に $\angle A = \angle B = \frac{1}{2}\pi$，$AD = BC$ となる様に線分 AD，BC を取り，頂点 C と D を線分 CD で結んで出来る四角形 $ABCD$ です。$\triangle ADC \equiv \triangle BCD$ より $\angle C = \angle D$ が導けます。ここで $\angle C = \angle D = \frac{1}{2}\pi$ が成り立つとは限らないし，$AB = DC$ が成り立つとも限りません。

サッケリの四角形 $ABCD$ において，常に $\angle C = \angle D \leq \frac{1}{2}\pi$ であって，

(i) $\angle C = \angle D = \frac{1}{2}\pi \Leftrightarrow AB = DC$

(ii) $\angle C = \angle D < \frac{1}{2}\pi \Leftrightarrow AB < DC$

また，

(i) $AB = DC \Leftrightarrow \triangle ABC$ の内角の和 $= \pi$

(ii) $AB < DC \Leftrightarrow \triangle ABC$ の内角の和 $< \pi$

が成り立ちます。

したがって，「三角形の内角の和が二直角」が成り立たない限りは，正方形を隙間なく並べることは出来ないことになります。

（注 *1*） 絶対幾何学において，三角形の内角の和は一般に二直角より大きくないことまでは成り立ち，「平行の公理」と「三角形の内角の和が二直角」は同値な条件であることが示せます。(参考文献 [2])

絶対幾何学において，「平行の公理」を否定した非ユークリッド幾何学，いわゆる「双曲平面」上では，三角形の内角の和は二直角より小さくなり，三角形 T の面積 $\tau(T)$ は

$$\tau(T) = \pi - \sigma(T),$$

ここで σ は T の内角の和，で与えられます。

（注 *2*） $\tau(T)$ は絶対幾何学において「面積の条件 (i), (ii)」を満たします。ただし「平行の公理」のもとではすべての三角形 T に対して $\tau(T) = 0$ となります。

双曲平面においては，三角形の面積は 3 つの角で決まってしまい，また 3 つの角が互いに等しい二つの三角形は合同になります。つまり，双曲平面においては「相似」と「合同」の区別がありません。

（注 *3*） ユークリッド平面における三角形の合同条件は，実際には「平行の公理」に無関係であって，絶対幾何学において成り立ちます。したがって，双曲平面においても同じ三角形の合同条件が成り立ちます。双曲平面の場合はさらに，合同条件として「3 角相等」が加わります。

1.3　多角形の分割合同

二つの多角形が「分割合同」であるとは，それぞれを同じ個数の多角形に分割して，分割されたそ

れぞれの多角形が合同になるときをいう。すなわち，二つの多角形 K, H に対して，それぞれの分割 $\{K_i\}$, $\{H_j\}, i, j = 1, 2, ..., n$ が存在して，K_i と H_i が合同になるときをいう。

$$K = \sum_{i=1}^{n} K_i,\ H = \sum_{j=1}^{n} H_j$$

$$K_i \cong H_i\ (\text{合同})$$

例として，任意の三角形は，二つの辺の中点を結ぶ線分で分割することで，平行四辺形と分割合同になることは容易に分かります。また，任意の平行四辺形は長方形に分割合同であることも明らかです。

次に，底辺を共通に持ち，高さが同じ二つの平行四辺形は分割合同です。実際に，底辺 AB を共通に持つ二つの平行四辺形を $ABCD$ および $ABEF$ とします。CD と EF は同じ直線上にあります。直線 AB 上に線分 AB と同間隔に点 A, B を含む点列を取ります。さらに，それらの点から AD に平行な線分，AF に平行な線分を引き，直線 AB と直線 CD に囲まれた帯状の領域を分割します。この分割によって得られた平行四辺形 $ABCD$ および $ABEF$ の分割により，二つの平行四辺形は分割合同であることが分かります。特に，「与えられた平行四辺形に対して同じ面積を持つ，一辺がいくらでも長い平行四辺形が取れる」ことが分かります。

さて，多角形の分割合同について，次の基本的な定理がよく知られています。

[ボヤイ-ゲンヴィンの定理] 面積の等しい多角形は分割合同である。

上の議論から，任意の多角形を三角形分割し，それぞれの三角形に分割合同な平行四辺形で，一辺が共通の長さを持つものが取れます。さらに，それぞれに分割合同で共通の辺をもつ長方形を取り，それらを重ねることで，元の多角形に分割合同な長方形が得られます。面積の等しい二つの多角形は同じ長方形に分割合同になりますから，互いに分割合同です。

2　多面体の体積

2.1　多面体の体積

多面体の場合，多角形の場合のように，一辺の立長さが 1 の立方体の体積を 1 として，辺の長さが a, b, c，ただし a, b, c は正の実数，の直方体の体積は abc となります。しかしながら，長方形が二つの合同な直角三角形に分割されるのに対して，直方体はいくつかの合同な四面体には分割されません。つまり四面体の体積を直方体から直接定めることが出来ません。四面体の体積が「$\frac{1}{3}$ × 底面積 × 高さ」であることは，積分を使わなくてはなりません。実際に示しますと，四面体の頂点を原点 O として，底面への垂線を x 軸に取ります。yz 平面に平行な平面 $x = t$ と四面体との切り口の三角形を $s(t)$ とします。底面は平面 $x = h$ との切り口 $s(h)$ とします。$s(t)$ は底面の三角形 $s(h)$ に相似でその相似比はちょうど $\frac{t^2}{h^2}$ ですから，$s(t)$ の面積 $S(t)$ は $\frac{t^2}{h^2}S(h)$ で与えられ，四面体の体積は，累次積分によって，

$$\int_0^h \frac{t^2}{h^2} S(h) dx = S(h) \int_0^h \frac{t^2}{h^2} dx = \frac{1}{3} h S(h)$$

となります。この結果は四面体だけでなく，円錐，さらに一般に平面上の閉曲線に囲まれた図形の「錐」(平面上にない点と図形上のすべての点を結ぶ線分から出来る立体図形）の体積についても成り立ちます。いわゆる「ガバリエリの原理」も特別な場合として含みます。

（注 *4*） 任意の多面体はいくつかの四面体に分割できますから，四面体の体積を決めれば多面体の体積も決まります。ただし，次節で見るように，同じ面積の三角形と長方形が分割合同であるのに対して，同じ体積の四面体と直方体は分割合同になりません。

2.2　多面体の分割合同

多面体の場合も，多角形の場合と同様に「分割合同」が定義されます。二つの多面体が分割合同であればそれらの体積が等しくなるのは明らかですが，

逆に「体積が等しければ分割合同である」ことは，多角形の場合のようには一般には成り立ちません。この「ヒルベルトの第 3 問題」として有名な問題はデーンによって否定的に解決されました。

[デーンの定理] 同じ体積の正四面体と立方体は決して分割合同にならない。

証明を考察する前に，二つの多面体が分割合同であるための一つの必要条件を与える「ハドヴィゲールの定理」について概説します。多面体の辺を共有する二つの面の「二面角」とは，その辺に直交する面と二つの面の交線のなす内角のことです。多面体 M を分割する多面体 $\{M_i\}, i = 1, 2, ..., n$ の二面角をたし合わせると，平角 π と多面体 M のすべての辺に関する二面角 $\{\alpha_j\}, j = 1, 2, ..., r$ の重複を許した和になります。

$$k_0\pi + \sum_{j=1}^{r} k_j\alpha_j$$

ただし，$k_0 \geq 0,\ k_j > 0\ (j = 1, 2, ..., r)$

ここで，平角 π が出てくるのは，M の面上または M の内部で分割する多面体が重なるとき，それぞれその二面角の和が π または 2π の整数倍になるからです。また，k_j が 1 より大きくなる場合があるのは，その対応する辺にいくつかの分割する多面体が重なることがあるからです。さて，二つの多面体 M, M' が同じ多面体 $\{M_i\}, i = 1, 2, ..., n$ で分割されているとすると，

$$k_0\pi + \sum_{j=1}^{r} k_j\alpha_j = l_0\pi + \sum_{j=1}^{s} l_j\beta_j$$

が成り立ちます。ここで，$\beta_j, j = 1, 2, ..., s$ は M' のすべての辺に関する二面角です。

さて，立方体 M と正四面体 N の二面体角は，それぞれ $\frac{1}{2}\pi$ と θ $(\cos\theta = \frac{1}{3})$ ですから，

$$k_0\pi + k_1\frac{1}{2}\pi = l_0\pi + l_1\theta$$

が成り立たなければなりません。ここで，$k_1, l_1 \geq 1$ であることに注意すると，ある正の整数 k, l が存在して，

$$2k\pi = l\theta$$

を満たさなくてはならないことが分かります。すなわち，θ を単位円周上の点 $z = e^{i\theta}$ と見ると，$z^l = 1$ が成り立ちます。逆に，$z^l = 1$ が成り立つのは，ある有理数 $\frac{k}{l}$ が存在して $\theta = \frac{2k\pi}{l}$ となる場合に限ります。

さて，$\theta = \cos^{-1}(\frac{1}{3})$ に対して，$2k\pi = l\theta$ を満たす，k, l が存在するとして矛盾を導きます。$\cos\theta = \frac{1}{3}$ より，m を 2 以上の整数として，

$$\frac{2}{3}\cos m\theta = \cos(m+1)\theta + \cos(m-1)\theta$$

すなわち，

$$\cos(m+1)\theta = \frac{2}{3}\cos m\theta - \cos(m-1)\theta$$

が成り立ちますから，帰納法により，

$$\cos m\theta = \frac{a_m}{3^m}$$

ここで，a_m は 3 で割り切れない整数，を示します。実際に，

$$\cos(m+1)\theta = \frac{2a_m}{3^{m+1}} - \frac{a_{m-1}}{3^{m-1}} = \frac{2a_m - 3a_{m-1}}{3^{m+1}}$$

ここで，$a_{m+1} = 2a_m - 3a_{m-1}$ は 3 で割り切れない，が成り立つことから導かれます。特に，$\cos m\theta = 1$ を満たす $m \geq 1$ は存在しない。

（注 *5*）二面体角の数が増えると，上の議論では不十分になり,「加法的関数」の概念を導入する必要があります。（参考文献 [1]）

面積や体積の確定した図形を面積や体積の確定した図形で分割して合わせてできる図形はもちろん同じ面積や体積を持ちます。しかし，体積に関しては，体積の確定した図形を面積や体積の確定しない図形で分割して合わせると，もはや同じ体積を持つとは限らなくなります。「バナハ-タルスキーの定理」は球体を分割して合わせて元の球体の二つ分，さらにいくつ分でも作り出せることを主張しています。構成に $SO(3)$ (3-次元特殊直交群，3 次元ユークリッ

ド空間の向きを保つ等長変換群) が2元から生成される自由群を部分群として含むこと，および，いわゆる集合論の「選択公理」に本質的に依存しています。平面上の面積に関してはこのような例は構成できないことも知られています。「バナハ-タルスキーの定理」のより詳しい考察は，次回の「測度」についての話の中で行いたいと思います。

3　まとめ

面積，体積は2次元と3次元の違いですが，本質的な違いがあることを見てきました。分割合同は教育上でもたいへんすぐれた教材として扱えるものと考えます。例えば,「底辺と高さの等しい平行四辺形は面積が等しく，また分割合同である」ことは初等教育でも十分に扱える，また児童の関心を引きつける課題であると考えます。また，実践的に，いろいろなかたちのピースを合わせることで面積，分割合同の意味を理解させることも教育上の意義があると考えます。多面体の分割合同についても，二つの多面体が分割合同になるための必要条件を考察することは教育上興味ある課題になると考えます。

実際の作業を通じて,「視覚的，空間的な直感力を養う」ことは, 数学，幾何学の教育上の基本的かつ重要な目標であると考えます。著者自身も含めて，算数，数学を教える教員は，広い視野を持ち，幅のある知識を獲得すべく，いろいろなテーマ，課題に目を向けて，教育者としての資質を高めて行けるよう努めることがだいじであると考えます。

参考文献

[1] ボンチャンスキー：面積と体積，東京図書，1994.
[2] 長谷川敬三：ユークリッド平面幾何学再考 – 数学教育におけるオリガミの幾何学の理論的考察，新潟大学教育学部研究紀要第2巻第1号 自然科学編 1-12, 2009.