

ゴムの働きの単元における小学校での実験とその考察

On experiments for properties of rubber at an elementary school

岸本 功¹, 吉田 裕²

Isao Kishimoto, Yutaka Yoshida

¹ 新潟大学教育学部

² 新潟大学教育学部附属長岡小学校

概要

小学校3年生理科の「調べよう ゴムが生み出す力」の単元において、附属長岡小学校での公開授業中に行った実験について具体的に紹介し、その物理的考察を行う。また、この授業後に開催された協議会における参加者からのコメント等に関連して、熱・統計力学的観点からも述べる。

1 はじめに

小学校理科では、3年生において、ゴムの働きを調べる単元がある。教科書 [1, 2] では、ゴムを車にひっかけて伸ばした後、車を放すことにより、車の進む距離を調べる実験が紹介されている。今回実施した、新潟大学教育学部附属長岡小学校での平成29年度教育研究協議会における公開授業*1では、教科書 [1, 2] に記載された実験とは異なり、ゴムを伸ばして発射台から小物体を飛ばす実験を行った。本稿では、この実験について具体的に述べ、その物理的な考察を適当な近似(単純化した仮定)のもとに、数式を用いて表現する。物理学に基づく詳細な計算は、小学校理科の授業では通常は行わないが、実際に行う実験について、直観的・定性的な理解だけでなく定量的な考察を深めるためには役立つはずである。また、公開授業に引き続いて行われた協議会における参加者から出た質問・コメントに関連して、熱・統計力学的な観点からゴムの性質を述べる。

2 実験

ここでは、小学校3年生理科の公開授業において、体育館で実際に行った実験の設定について説明する。

図1のように、机の上に発射台をおき、机から少し離れた場所の床にタライを置く。空気でっぼうの玉(小物体)を、発射台に取り付けた輪ゴムを用いて発射台から飛ばし、うまくタライの中に入れることを目指す実験である。

図2(左)のように、発射台は板とそれに固定した金具からなり、その金具に輪ゴムを1本または2本取り付ける。図2(右)のように、小物体をゴムの真ん中に当てて適当な長さゴムを伸ばした後、静かに放すことで机上から水平方向に小物体を飛ばすことができる。タライは的の役目をしており、ゴムの本数およびゴムを伸ばす長さを変化させることで、小物体の落下地点を調整できる。発射台の板には、目盛が記してあり、小物体を放す位置を測定することができる。

*1 2017年6月1日に実施した。授業者は本稿の著者の一人(吉田裕)である。



図1 机上の発射台と床の上のタライ

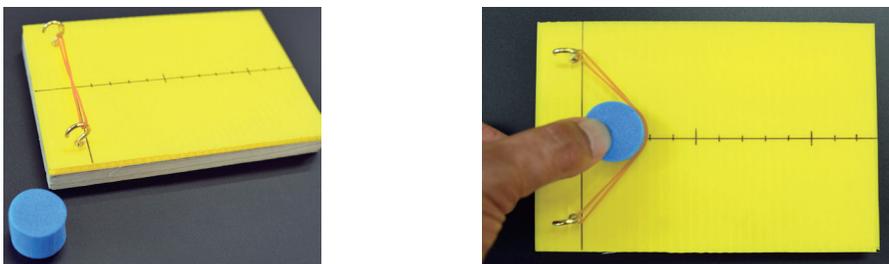


図2 輪ゴムの取り付けられた発射台と空気でっぼうの玉 (小物体)

3 単純化した考察

ここでは前節の実験を力学の観点から理論的に解析する. 簡単のため, 小物体の大きさを無視して質点とみなし, 小物体が発射台の板の上をすべるときの摩擦や空気の抵抗を無視する.

図1の配置において, 床からの発射台の高さを h , 発射台の端の位置から小物体の落下地点までの水平方向の距離を L とする. ゴムを自然の長さの状態から, 図2(右)のように小物体をゴムの真ん中に当てて右に移動させた距離を l とする. 小物体を静かに放した後, ゴムが小物体に仕事をすることで, ゴムを伸ばしたときに蓄えられた弾性エネルギーが, 全て小物体 (質量 m) の運動エネルギーに代わり, 水平方向に速さ v で飛び出すとみなす.

■放物運動 時刻 $t = 0$ に発射台から離れて床に到達するまでの間, 小物体は重力のみを受け, 時刻 t における小物体の位置 $x(t), y(t)$ はニュートンの運動方程式

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = mg \quad (1)$$

に従う. ここで, 図3のように水平方向 (小物体の飛び出す向き) に x 軸, 鉛直下向きに y 軸をとり, 発射台の端を座標原点にとり, 重力加速度の大きさを g とした.

発射台上で小物体がゴムから離れた直後の小物体の速さを v としているが, 小物体と発射台の板との間の摩擦を無視しているので, 小物体が発射台の端 (座標原点 O) を通過するときの速度は水平方向で大きさ v である. よって, (1) を初期条件: $x(0) = 0, y(0) = 0$ および $\frac{dx}{dt}(0) = v, \frac{dy}{dt}(0) = 0$ のもとで解くと

$$x(t) = vt, \quad y(t) = \frac{1}{2}gt^2 \quad (2)$$

となり, 床に到達する時刻 t_1 は, $y(t_1) = h, t_1 > 0$ という条件から $t_1 = \sqrt{2h/g}$ となり, 落下地点までの水

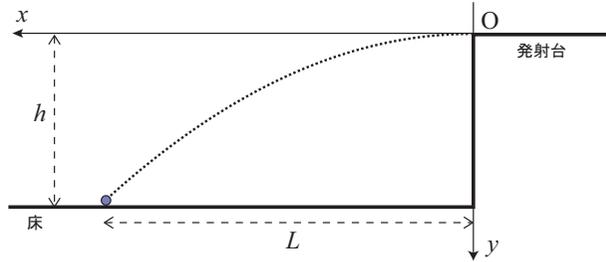


図3 発射台から飛び出した後の小物体の運動と座標軸

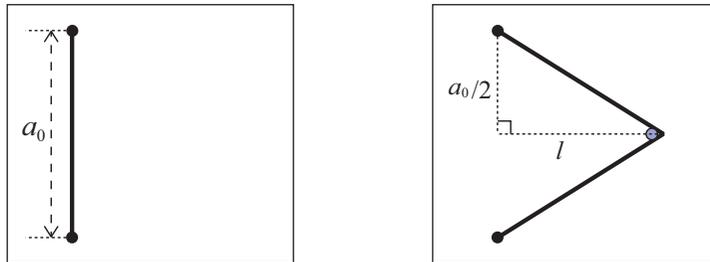


図4 発射台を真上から見た様子。左はゴムの自然の長さの状態、右は小物体をゴムに当てて引いた状態。

平方方向の距離 L は $x(t_1)$ で与えられる:

$$L = v\sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{3}$$

この式は (2) から t を消去して得られる xy 平面上の放物線の方程式: $y = \frac{g}{2v^2}x^2$ において, $x = L$ で $y = h$ になる, ことから求められる.

地上での重力加速度の大きさは $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ であり, h は簡単に測定できるので, (3) から L を決めるには初速度の大きさ v が分かればよい. ゴムを自然の長さから a だけ伸ばしたときの弾性エネルギー $E(a)$ が, 全て小物体の運動エネルギーに代わるという仮定から $E(a) = \frac{1}{2}mv^2$ なので,

$$v = \sqrt{\frac{2E(a)}{m}} \tag{4}$$

のように決まる. m は小物体の質量を測定することで求まる. なお, 第2節で述べた実験において, 図4のように小物体を引く距離 l とゴムの自然の長さからの伸び a の間には, 三平方の定理から,

$$a = 2\sqrt{(a_0/2)^2 + l^2} - a_0 \tag{5}$$

の関係があることがわかる. ここで a_0 はゴムの自然の長さであり, 発射台に取り付けられたゴムをかけるための金具間の距離にあたる. a_0, l ともに簡単に測定可能である.

■ゴムの弾性エネルギー 小物体の飛ぶ水平距離を (単純化した仮定のもとで) 理論的に求めるためには, ゴムの弾性エネルギー $E(a)$ を決める必要がある. ゴムを等方性線形弾性体 (フック弾性体) とみなし, ヤング率を Y , ポアソン比を σ とすると,*2 単位体積当たりの弾性歪みエネルギー w は, 歪みがゼロのときを基

*2 弾性体を縦方向に引っ張ったときの, 応力と縦方向の伸び率の比をヤング率, 横方向の縮み率と縦方向の伸び率の比をポアソン比という. (例えば [3] を参照.)

準として,

$$w = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \epsilon_{ij} p_{ij}, \quad (6)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \epsilon_{ij} = \frac{1+\sigma}{Y} \left(p_{ij} - \frac{\sigma}{1+\sigma} \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 p_{kk} \right) \quad (7)$$

(ここで u_i は変位ベクトル, ϵ_{ij} は歪みテンソル, p_{ij} は応力テンソル) と表される [5]. 特にゴムを棒状と考えたときの縦方向 (1 方向とする) に応力を加えた ($p_{11} \neq 0$, 他はゼロ) とすると, (7) から $\epsilon_{11} = p_{11}/Y$ となり, (6) は $w = \frac{1}{2} Y (\epsilon_{11})^2$ となる. よって, 縦方向の歪みテンソルの値を $\epsilon_{11} = a/a_0$ とし, 自然の長さのときのゴムの断面積を A とすると,

$$E(a) = w A a_0 = \frac{Y A}{2 a_0} a^2 \quad (8)$$

となる. (ゴムはポアソン比 σ が $1/2$ に近く, ゴムを伸ばしたとき体積がほとんど変わらないことに注意する [4, 3].) この $E(a)$ は, ばね定数 $k = Y A/a_0$ の, フックの法則に従うばねの弾性エネルギーの式: $\frac{1}{2} k a^2$ と同じである. 実際, このとき縦方向に加えた力の大きさを K とすると, $p_{11} = K/A$, $\epsilon_{11} = p_{11}/Y$ より,

$$K = Y A \frac{a}{a_0} = k a \quad (9)$$

となり, フックの法則を再現する.

結局, (3), (4), (8) より, 小物体の落下地点までの水平方向の距離 L は

$$L = \sqrt{\frac{2hYA}{mga_0} (\sqrt{(a_0)^2 + 4l^2} - a_0)} \quad (10)$$

となる. この式から, 第2節で述べた実験において小物体を引く距離 l と小物体の飛距離 L の関係がわかる. また, ゴムを 1 本から 2 本にするとゴム全体の断面積が 2 倍になるので, 飛距離 L は $\sqrt{2}$ 倍になる.

4 おわりに

本稿では, 小学校理科 3 年のゴムの働きに関する公開授業の実験について, その具体的な方法と物理的考察を述べた. 第3節の物理的考察においては, 簡単のため, 空気でっぽうの玉を質点とみなし, 摩擦や空気の抵抗を無視し, ゴムをフック弾性体とみなすという単純化を行った. その結果, 第2節の実験の玉を引く距離 l と飛距離 L の関係式として, (10) が得られた. この計算結果において, L は l の増加関数であるが, 比例しているわけではないことに注意する. これは, 発射台が図2のようになっており, ゴムを自然の長さの状態からゴムに沿った方向に伸ばしているわけではないことから来ている. また, 同じ l の値に対し, 飛距離 L がゴムの本数に比例しているわけではないこともわかる.

第3節で行った解析について, 次のような点について, さらに考察をする余地がある. 玉はゴムが自然の長さになった瞬間に離れ, その直後ゴムは静止するという仮定を仮定して, 弾性エネルギーが全て小物体の運動エネルギーになる, として計算したが, 現実的には玉が離れた後ゴムは多少は振動するはずでありその効果を見積もる必要がある. 玉と発射台の板の間の摩擦を無視しない場合は, 小物体がゴムから離れた後, 発射台を飛び出すまでの間の摩擦力による仕事の寄与を考慮しなければならない. 空気でっぽうの玉は, 図2のような大きさ・形をもつため, 実際は空気の抵抗もはたらくはずである. (ただし, 実験は体育館で行ったので, 屋外で行う場合と比べて, 風の影響は無視できる.) また, 実験における, 理想的でない発射台からの飛ばし方により, 玉の回転や振動の影響が加わる場合があり, 精密な理論的解析をするには流体力学・弾性体力学的な考察が必要になるとと思われる. (実際の実験では玉の放し方にブレがあり, 玉が発射台から飛び出す際の速度が水平でない例も多く観察された.) 使用した輪ゴムについて, ここではフックの法則に従うという

線形近似をしたが、実際には非線形な効果を見逃すことができない可能性がある。輪ゴムを繰り返し使用しているうちに、完全には元の長さに戻らなくなったり、(以下に述べるような熱・統計力学的な効果と関連して) 温度変化にともないヤング率が変化したりする場合がある。精密な実験とその解析においてはこのようなことについても注意を払うべきだろう。

公開授業後の協議会、およびその後の議論において、参加者から気体の圧力に関することや、ゴムを伸ばすと温かくなること、等の発言があった。そこで、ゴムの性質に関連して熱・統計力学的な観点から少し補足説明しておく [4, 6]。ゴムが自然の長さから a だけ伸びた状態から、 da だけ伸ばしたときになされた仕事 $d'W$ は、ゴムの体積はほとんど変わらないことを考慮して、準静的過程では $d'W = Kda$ (K はゴムを引く外力の大きさ) と表せる。よって、熱力学第 1 法則を適用すると、ゴムの内部エネルギー U 、エントロピー S を用いて、 $dU = TdS + Kda$ となるが、さらにヘルムホルツの自由エネルギー $F = U - TS$ を用いると

$$dF = -SdT + Kda \tag{11}$$

となる。この左辺が全微分なので、右辺の dT , da の係数について、 $\frac{\partial}{\partial a}(-S) = \frac{\partial}{\partial T}K$, つまり、

$$\left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)_T = -\left(\frac{\partial K}{\partial T}\right)_a \tag{12}$$

が得られる。常温では張力は温度の増加関数: $\left(\frac{\partial K}{\partial T}\right)_a > 0$ であり、これは $\left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)_T < 0$ を意味する。つまり、温度一定でゴムを伸ばすとエントロピーが減る。このことはミクロな観点からすると、ゴムが伸びるとゴムを形作っている鎖状分子が伸びて配位数が減ることによる、と解釈できる。また、

$$\left(\frac{\partial T}{\partial a}\right)_S = \frac{\partial(T, S)}{\partial(a, T)} \frac{\partial(a, T)}{\partial(a, S)} = -\left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_a = \frac{T}{C_a} \left(\frac{\partial K}{\partial T}\right)_a \tag{13}$$

(ここで $C_a = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_a$ は、のびが一定のときのゴムの熱容量であり、一般に $C_a > 0$.) のように計算されるが、常温で $\left(\frac{\partial K}{\partial T}\right)_a > 0$ であることから $\left(\frac{\partial T}{\partial a}\right)_S > 0$ となる。これは、ゴムをすばやく伸ばすと、断熱的とみなせて、ゴムの温度が上がることを意味する。このことは、気体をすばやく圧縮すると(断熱圧縮すると)熱くなる現象に対応する。

以上のように、本実験は小学校理科 3 年の単元に対応するものであるが、物理学の問題として理論的に考察・解析をする場合、その単純化の度合いにより、中学校・高等学校だけでなく大学の物理教育においても活用できる良い問題になる。

謝辞

附属長岡小学校での公開授業におけるゴムを用いた実験に関して、ご指導・ご協力いただいた糀谷正夫氏、大平正則氏、廣野達也氏に感謝します。関連する物理について議論していただいた小柳翔太氏に感謝します。本研究の一部は、JSPS 科研費 (JP15H02913) の助成を受けたものです。

References

- [1] 霜田光一, 森本信也, ほか 34 名, “みんなと学ぶ 小学校理科 3 年”, 学校図書 (2015).
- [2] 毛利衛, 黒田玲子, ほか 32 名, “新編 新しい理科 3 年”, 東京書籍 (2015).
- [3] 佐野理, “連続体の力学”, 裳華房 (2000).
- [4] 久保亮五, “ゴム弾性 [初版復刻版]”, 裳華房 (1996).
- [5] 川原琢治, “連続体力学”, 産業図書 (1996).
- [6] 森成隆夫, “熱力学の基礎”, 大学教育出版 (2015).