

包絡線法による 幅のあるガーダー問題の解法に関する研究

Envelope Method for the Girder Problems with Positive Width

重原 大暉・渡邊 道之

Daiki Shigehara and Michiyuki Watanabe

1. はじめに

数学教育において、生徒の興味関心を高める手段の1つとして数学の有用性を実感させることが大切である。特に高い専門性が必要である高校数学は数学と日常との関連性が実感しにくく、数学の有用性を実感しにくい。数学的な世界の中で数学的な見方や考え方を高めることも大事であるが、数学と日常生活をつなげるために数学を活用して日常の事象を解決することも必要である。この論文では、数学の実用性に着目し、ある有名な問題に焦点を当てる。

●直角にまがった廊下がある。長さ l の棒を水平にもったままかどをまわりたい。このことが可能な棒の長さ l の最大値を求めよ。ただし、廊下は十分に長いものとする (p. 81 [1])。

●片方の道の幅が 8 フィート (ft) でありもう片方の道の幅が 4ft であるような曲がり角を通して、太さが無視できる鉄パイプを水平にして運ぶ。運ぶことができる鉄パイプの最大の長さはどれだけか (p. 300 [2])。

これらの問題は昔から有名な数学の問題の1つで、直角に曲がる通路の通過問題や通路を曲がりきる棒の長さの問題として一般的に有名である。この問題は 1900 年代ごろに微積分のテキストに出題された、建設現場での直角に曲がる通路に対して曲がり角を水平にもって曲がれる girder (大梁) の最大の長さに関する問題が起源ではないかといわれている (p. 131 [3])。これを踏まえ、この論文では直角の通路を通過できる棒の長さの最大値を求める問題をガーダー問題と呼ぶ。身近な題材かつ内容がシンプルな反面、最難関大学の入試問題にも出題されているなど大学数学の基礎レベルの計算力が必要で、ギャップのある興味深い問題である。また解法が1通りでなく、いくつかある(三角関数を用いた解法や不等式を用いた解法、包絡線を用いた解法など)こともこの問題の特徴である。そのため、様々な視点から問題をとらえることができ、考え方・イメージが湧きやすく、数学的思考力を高めるのに有効な問題であると考えられる。このことから、この問題及びその類題は大学入試問題やプレテスト、微積分学のテキスト本等で数多く取り上げられている。

しかし、この問題は棒の幅を無視して線分として考えるように設定されているという問題点がある。大学入試問題やプレテスト、微積分学のテキスト本等で出題されているこの問題や類題のほとんどが棒の幅を無視して考えるようになっているが、これは計算力や数学的思考力の有無が問われ

ており、この点に関しては特に問題はない。しかし、日常生活の問題として着目すると、この問題は題材が身近で実用性があるのに対して実生活には幅のない棒は存在せず、矛盾が生じてしまっているのがわかる。この矛盾に対して、Howard Anton らは、「太さが無視できない場合には、興味深い議論が Norman Miller によりなされている」と述べている (p. 300 [2])。Miller は、日常生活での活用の観点に着目し、棒の幅を無視したガーダー問題を改良した。具体的には従来の線分でとらえていた girder (棒) を長方形と見立てて幅を無視しない実用的なガーダー問題を設定し、その解法および長方形の頂点の軌跡の特徴について解明したのである (pp. 177-178 [4])。彼の研究は数学と日常との矛盾を解き、数学と日常との関連性の増築に有効に機能する。さらに、長方形の頂点の軌跡は変形されたコンコイド曲線になることも示され、数学的にも興味深い。一方で、彼の研究には不十分なところもある。それは解法の過程が不十分で、問題の定式化が明確でないことである。彼の研究が掲載されている3ページの論文に解法の過程の紹介はわずかであり、問題の定式化が明確に示されていない。この不十分なところを改善できればより問題の解法を理解しやすく、簡潔に問題を解決できるようになる。また、Miller の解法は三角関数を用いた解法だけであり、他の解法で幅のあるガーダー問題の解決が可能かどうか検証されていない。このことを踏まえ、Miller の研究をもとに幅のある実用的なガーダー問題を Miller とは別の解法で検証し、解法の過程および問題の定式化を明確とすることを目的とする。

この論文では幅のあるガーダー問題を Miller とは異なる定式化を行い、包絡線を用いた解法(包絡線法)により様々なガーダー問題に適応可能である一般的な解法を与える。この論文の構成は次の通りである。

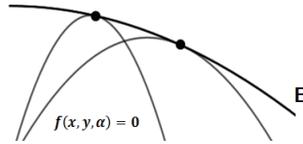
第2章で包絡線の定義と性質を与えたあと、幅を無視した線分のガーダー問題を包絡線法により解析する。包絡線法を選んだ理由は3つある。1つ目は包絡線法による幅のあるガーダー問題の解法は Miller の解法では扱ってなく、オリジナルな解法を考えることができるからである。2つ目は他の解法と比較すると考え方がシンプルで、計算や計算過程の理解が容易と感じたからである。逆の考えの転換 (ex. 棒の長さ $L(\theta)$ の最小値が通路を通過できる棒の長さの最大値になる) が包絡線法だけ必要ないことも要因である。3つ目は、ガーダー問題のような動きのある問題はシミュレーションなどの視覚的理解が有効と考えたからである。包絡線は直線の通過領域を表し、シミュレーションを活用しやすい。包絡線と棒の動きの関係を照らし合わせることで視覚的理解・数学的な見方や考え方の構築につながる。以上より、包絡線法をもとに検証を行う。第3章では Miller とは異なる定式化をし、ガーダーの最大長を求めるための無理方程式を導出する。第4章では第3章で導いた無理方程式の解について調べ、条件下でただ1つの解を持つことを示す。通路の幅、棒の幅を考慮した精密な解析が必要となる。通路の幅が同じ場合も考慮し、ガーダー問題の解を定理4で与える。これがこの論文の主定理である。第5章で例題として身近な事象の問題を提示し、第4章で導いた定理4を活用して問題の解答を示す。第6章ではスマートフォン用の無料グラフ作成アプリ Desmos Graphing Calculator (Web アプリでも対応) を用いた解法とシミュレーションの作成方法を紹介する。

2. 包絡線法による線分のガーダー問題の解法

2.1 包絡線

包絡線法によるガーダー問題の解法を紹介する前に包絡線を定義する。

定義 1 ある定曲線 E が曲線群 (直線群を含む) $C_\alpha: f(x, y, \alpha) = 0$ (ただし、 α はパラメータ) のすべての曲線に接して、その接点の軌跡であるとき、 E をこの曲線群の包絡線という。



包絡線は曲線群の通過領域の境界を示し、曲線群の通過領域を求める問題に役立つ。数学の幾何学・解析学ではもちろん、経済学での最適化問題や AM ラジオ放送に利用されている振幅変調の電波信号の包絡線が音声信号であるなど、様々な分野で扱われている曲線である。包絡線が直線群の通過領域の境界であることに着目すると、ガーダー問題の解法にも利用できる。

包絡線の方程式を導くには次の定理が有用である。

定理 2 α を媒介変数 (パラメーター) とする微分可能な関数 $f(x, y, \alpha)$ が $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0, \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ を満たすとする。このとき、

$$f(x, y, \alpha) = 0$$

によって定められる曲線群の包絡線は

$$f(x, y, \alpha) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, y, \alpha) = 0$$

を x, y について解くことで求められる。

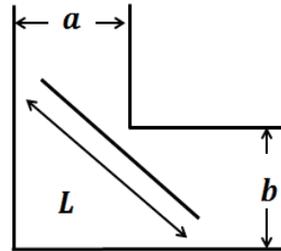
※定理 2 の証明はたとえば [5] pp. 343-344 を参照するとよい。

2.2 包絡線法による線分のガーダー問題の解法

この節では一般的に出題されている棒の幅を無視した線分のガーダー問題を提示し、包絡線を用いた解法を紹介する。

ガーダー問題

右図のように、幅 a の通路と幅 b の通路が直角に位置している。この通路を長さ L の棒を水平に保ったまま、角を曲がり切りたい。このとき、このようなことが可能である棒の長さ L の最大値を求めよ。ただし、棒の幅は無視し、通路は十分に長いものとする。



[解法] 長さ L の線分が、 x 軸 ($x > 0$) と y 軸 ($y > 0$) に接しながら滑るように動く場合を考える。 xy 平面において、線分と y 軸との交点を A 、線分と x 軸の交点を B とし、 $\angle OBA = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) とする。

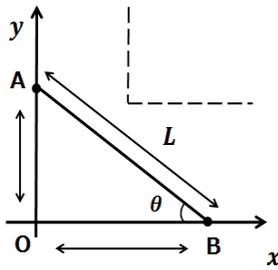


図 1: ガーダー問題の図

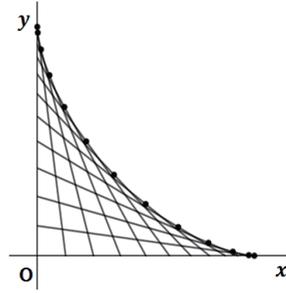


図 2: 棒の通過領域の境界線

$\triangle AOB$ は $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ の直角三角形であり, $\angle OBA = \theta$ である. 三角比を利用すると $OA = L \sin \theta$, $OB = L \cos \theta$ であることがわかる. よって, 点 A, B の座標はそれぞれ $(0, L \sin \theta)$, $(L \cos \theta, 0)$ である.

これらより, 線分 AB は傾きが $-\tan \theta$, 切片が $L \sin \theta$ の直線であるから, 線分 AB の方程式は,

$$y = (-\tan \theta)x + L \sin \theta \quad (1)$$

となる. (1) $\times \cos \theta$ ($\cos \theta \neq 0$) とすると,

$$(\sin \theta)x + (\cos \theta)y - L \sin \theta \cos \theta = 0$$

を得る. この式の左辺を $f(x, y, \theta)$ とおいて,

$$f(x, y, \theta) := (\sin \theta)x + (\cos \theta)y - L \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (2)$$

について考える. (2) の両辺を θ で偏微分すると,

$$\frac{\partial}{\partial \theta} f(x, y, \theta) = (\cos \theta)x - (\sin \theta)y - L \cos^2 \theta + L \sin^2 \theta = 0 \quad (3)$$

となる. 式(2)と式(3)を連立して θ を消去し, 包絡線の方程式を求める.

(2) $\times \sin \theta +$ (3) $\times \cos \theta$, (2) $\times \cos \theta -$ (3) $\times \sin \theta$ より,

$$\begin{cases} x = L \cos^3 \theta, \\ y = L \sin^3 \theta \end{cases} \quad (4)$$

$$\quad (5)$$

を得る. この2式は包絡線の条件を満たす.

式(4)と式(5)は,

$$\cos \theta = \left(\frac{x}{L}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad (6)$$

$$\sin \theta = \left(\frac{y}{L}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (7)$$

と変形できる. これを, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ の関係式に代入すると,

$$\left(\frac{x}{L}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{L}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \quad (8)$$

を得る. 式 (8) の両辺に $L^{\frac{2}{3}}$ をかけると包絡線の方程式

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = L^{\frac{2}{3}} \quad (9)$$

が得られる.

ガーダー問題の包絡線は棒が通過する領域の境界線を表しているため, 包絡線と通路の曲がり角の大小関係によってガーダーが通過できるかを判断できる. 包絡線上に曲がり角があるときに棒の長さは最大であり, その棒の長さの最大値より小さければ棒は通過できる (ただし, 曲がり角は通路の外枠より内側に存在しなければならない). よって, この考えを用いて通路を通過できる棒の長さの最大値を求める.

問題文より 2 つの通路の幅は a と b より, 通路の曲がり角の座標は (a, b) と表せる. この包絡線が通路の曲がり角を表す点 (a, b) 上を通るときに, 棒の長さが最大になる.

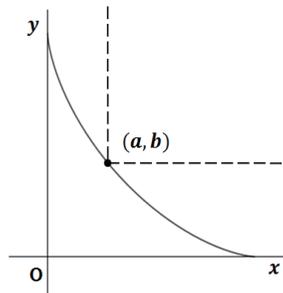


図 3: 包絡線上に点 (a, b) がある場合

式 (9) を変形すると,

$$L = (x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \quad (10)$$

となり, これに $x = a, y = b$ を代入すると,

$$L = (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \quad (11)$$

を得る. これが棒の長さ L の最大値である. 包絡線を用いてガーダー問題の解答を求めることができる. また, 最大の長さより棒が小さければ通路を通過することもわかる.

包絡線以外の他の方法でも最大値は $L = (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ となる.

3. 包絡線法による幅のあるガーダー問題の解法

この章では包絡線を用いて幅のあるガーダー問題の解法について検証する.

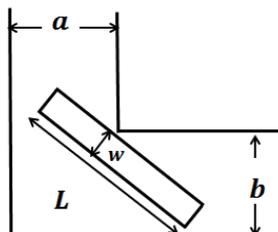
3.1 幅のあるガーダー問題の設定

Miller [4] は, girder (棒) を長方形と見立てて幅を無視しない実用的なガーダー問題 (girder problem) を設定した. 彼が設定したガーダー問題をもとに題意が通路を通過できる棒の最大値である問

題にアレンジする. 棒を立てずに水平に保ったまま動くよう条件を定め, 通路の高さや棒の高さを考慮せずに平面上で解決できるように以下の問題を設定した. この問題を「幅のあるガーダー問題」と呼ぶことにする.

幅のあるガーダー問題

右図のように, 幅 a の通路と幅 b の通路が直角に位置している. この通路を長さ L で幅が w である棒を水平に保ったまま, 角を曲がり切りたい. このとき, このようなことが可能である棒の長さ L の最大値を求めよ. ただし, 幅 w は通路の道幅 a, b より小さいものとし, 通路は十分に長いものとする. また, 通路の高さは棒の高さよりも大きいものとし, 棒は立てないこととする.



3.2 包絡線の方程式

ここからは幅のあるガーダー問題の解法を明確にしていく. まずは棒の通過領域の境界線を表す包絡線の方程式を求める.

幅のある棒に見立てるために, 長辺の長さが L , 短辺の長さが w の長方形 $ABCD$ でとらえる. xy 平面に対して, 長方形の1つの長辺が y 軸上 ($y > 0$) と x 軸 ($x > 0$) に接しながら滑るように動く場合を考える (ただし, 長方形が $x > 0, y > 0$ の範囲に収まるようにする). 長辺と y 軸 ($y > 0$) との交点を A とし, 長辺と x 軸 ($x > 0$) との交点を B , 残りの長方形の2点をそれぞれ C と D とする. さらに直線 CD と x 軸の交点を E , 直線 CD と y 軸との交点を F とする. $\angle OBA = \theta$ とすると, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ である.

解答を導くためには線分 CD の包絡線の方程式を求め, その包絡線が通路の曲がり角である点 (a, b) を通る場合を考えればよい.

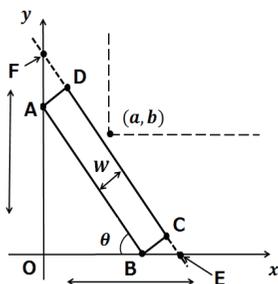


図4: 問題の図

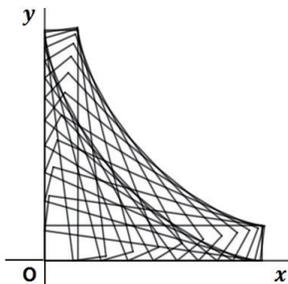


図5: 棒の通過図

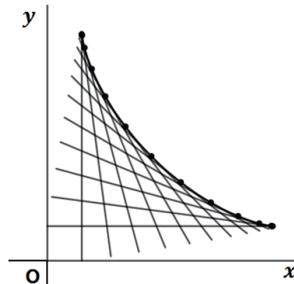


図6: 棒の通過領域の境界線

線分 AB の傾きは $-\tan \theta$ である. 線分 CD は線分 AB を平行移動したものと同一であるから, 傾きは線分 AB と同じ $-\tan \theta$ である. また, $\triangle ADF$ は $\angle ADF = \frac{\pi}{2}$ の直角三角形であり, $\angle DAF = \theta$ である. 三角比を利用すると, $AF = \frac{w}{\cos \theta}$ であることがわかる. $OA = L \sin \theta$ であり, $OF = L \sin \theta + \frac{w}{\cos \theta}$, すなわち, 線分 CD の切片は $L \sin \theta + \frac{w}{\cos \theta}$ である.

したがって、線分 CD の方程式は、

$$y = (-\tan \theta)x + L \sin \theta + \frac{w}{\cos \theta} \quad (12)$$

となる。式 (12) $\times \cos \theta$ ($\cos \theta \neq 0$) より、次の式を得る:

$$(\sin \theta)x + (\cos \theta)y - L \sin \theta \cos \theta - w = 0.$$

この等式の左辺を $f(x, y, \theta)$ と定め、

$$f(x, y, \theta) := (\sin \theta)x + (\cos \theta)y - L \sin \theta \cos \theta - w = 0 \quad (13)$$

について考える。式 (13) の両辺を θ で偏微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial \theta} f(x, y, \theta) = (\cos \theta)x - (\sin \theta)y - L \cos^2 \theta + L \sin^2 \theta = 0 \quad (14)$$

となる。式 (13) と式 (14) を連立して θ を消去し、包絡線の方程式を求める。

(13) $\times \sin \theta$ + (14) $\times \cos \theta$, (13) $\times \cos \theta$ - (14) $\times \sin \theta$ より、

$$\begin{cases} x = L \cos^3 \theta + w \sin \theta, \\ y = L \sin^3 \theta + w \cos \theta \end{cases} \quad (15)$$

$$(16)$$

を得る。式 (15) と式 (16) は包絡線の条件を満たす。よって、この 2 式は媒介変数表示ではあるが線分 CD の包絡線の方程式を表す。

3.3 無理方程式の導出

題意は通路を通過できる棒の最大の長さであるから、包絡線上に曲がり角の座標が位置するときが最大の長さとなる。よって、そのときの $\sin \theta$ の値を調べ、棒の最大の長さを導いていく。

この包絡線が通路の曲がり角である点 (a, b) を通るときに棒の長さは最大となる。

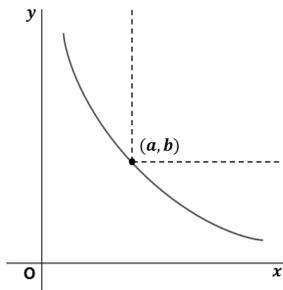


図 7: 包絡線上に点 (a, b) がある場合

式 (15) と式 (16) に $x = a, y = b$ を代入する:

$$a = L \cos^3 \theta + w \sin \theta, \quad (17)$$

$$b = L \sin^3 \theta + w \cos \theta. \quad (18)$$

ここで、式(17)と式(18)を利用して θ を消去したうえで棒の長さ L を求めることは困難である。そこでこの2つの式を1つの式にして解法を考える。

式(17)と式(18)は次のように変形できる:

$$L = \frac{a - w \sin \theta}{\cos^3 \theta}, \quad (19)$$

$$L = \frac{b - w \cos \theta}{\sin^3 \theta}. \quad (20)$$

式(19)を式(20)に代入すると、等式

$$\frac{a - w \sin \theta}{\cos^3 \theta} = \frac{b - w \cos \theta}{\sin^3 \theta} \quad (21)$$

を得る。式(19)~(21)より、等式(21)を満たす $\sin \theta$ もしくは $\cos \theta$ を見つけ、それを式(19)または式(20)に代入することで問題の解答である棒 L の長さの最大値を求めることができる。

式(21)の両辺に $\sin^3 \theta \cos^3 \theta$ をかけて、次のように変形していく:

$$\sin^3 \theta (a - w \sin \theta) = \cos^3 \theta (b - w \cos \theta), \quad (22)$$

$$w \sin^4 \theta - w \cos^4 \theta - a \sin^3 \theta + b \cos^3 \theta = 0, \quad (23)$$

$$w(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) - a \sin^3 \theta + b \cos^3 \theta = 0, \quad (24)$$

$$w(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) - a \sin^3 \theta + b \cos^3 \theta = 0, \quad (25)$$

$$w \sin^2 \theta - w \cos^2 \theta - a \sin^3 \theta + b \cos^3 \theta = 0. \quad (26)$$

次に式(26)を $\sin \theta$ で統一する。 $\cos^3 \theta = (1 - \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}$, $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ であるからこれを式(26)に代入すると、

$$w \sin^2 \theta - w(1 - \sin^2 \theta) - a \sin^3 \theta + b(1 - \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}} = 0, \quad (27)$$

$$a \sin^3 \theta - 2w \sin^2 \theta + w = b(1 - \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}} \quad (28)$$

となる。ここで、 $\sin \theta = t$ とおく。 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $0 < t < 1$ であり、 t は単調増加であることに注意する。

$$at^3 - 2wt^2 + w = b(1 - t^2)^{\frac{3}{2}}, \quad (29)$$

$$at^3 - 2wt^2 + w - b(1 - t^2)^{\frac{3}{2}} = 0. \quad (30)$$

式(30)の方程式が $0 < t < 1$ の範囲でただ1つの解を持てば、式(21)を満たす $\sin \theta$ を見つけたことになる。そして、その $\sin \theta$ を式(19)または(20)に代入することで L を求めることができる。今、式(30)の方程式が $0 < t < 1$ の範囲でただ1つの解を持つと仮定し、その解を β とする。これを用いると、問題の解答である棒 L の長さの最大値を導くことができる。棒の長さ L は2通りの表し方があったのでそれぞれを考える。

●式(19)の場合

式(19)を $\sin \theta$ で統一し、それを β で置き換える($\sin \theta = t = \beta$)と、棒 L の長さの最大値を求める

ことができる.

$$L = \frac{a - w \sin \theta}{\cos^3 \theta} = \frac{a - w \sin \theta}{(1 - \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\therefore L = \frac{a - w\beta}{(1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

●式 (20) の場合

式 (20) を $\sin \theta$ で統一し, それを β で置き換える ($\sin \theta = t = \beta$) と棒 L の長さの最大値を求めることができる.

$$L = \frac{b - w \cos \theta}{\sin^3 \theta} = \frac{b - w \sqrt{1 - \sin^2 \theta}}{\sin^3 \theta}.$$

$$\therefore L = \frac{b - w \sqrt{1 - \beta^2}}{\beta^3}.$$

よって, 方程式 $at^3 - 2wt^2 + w - b(1 - t^2)^{\frac{3}{2}} = 0$ が $0 < t < 1$ の範囲でただ 1 つの解を持てば通路を通過できる棒の長さの最大値を求めることができ, 問題を定式化できることがわかった. 次の章で方程式の解について解析する.

4. ガーダー問題の解の公式

この章では, 定式化した幅のあるガーダー問題が解けることを示し, 解の公式を与える.

4.1 補題 3

ガーダー問題を解くには, 方程式 $at^3 - 2wt^2 + w - b(1 - t^2)^{\frac{3}{2}} = 0$ が $0 < t < 1$ の範囲でただ 1 つの解を持つことをいえばよい. これを示すために次の補題を提示し, 証明する.

補題 3 正定数 a, b, w は $a > w, b > w$ を満たすとする. このとき, 方程式

$$at^3 - 2wt^2 + w - b(1 - t^2)^{\frac{3}{2}} = 0$$

は $0 < t < 1$ の範囲でただ 1 つの解を持つ.

[証明] この条件を示すことと式 (29) の左辺と右辺の式が $0 < t < 1$ の範囲でただ 1 つの交点を持つことを示すことは同値である. よって, 式 (29) の左辺の式と右辺の式が $0 < t < 1$ の範囲でただ 1 つの交点を持つことを示す.

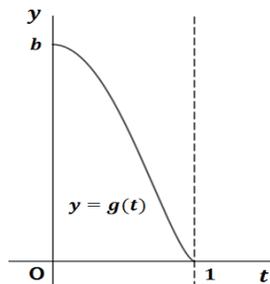
$g(t) = b(1 - t^2)^{\frac{3}{2}}, h(t) = at^3 - 2wt^2 + w$ とする. まずはそれぞれの曲線の増減表, グラフを表す.

● $g(t) = b(1 - t^2)^{\frac{3}{2}}$ の増減表・グラフ

$g'(t) = -3bt\sqrt{1 - t^2}$ である. $g'(t) = 0$ とすると, $t = 0, \pm 1$ であるが, $0 < t < 1$ よりどれも不適である.

$g(t)$ を増減表, グラフにまとめると下のようになる.

t	0	...	1
$g'(t)$	/	-	/
$g(t)$	/	↘	/

図 8: $y = g(t)$ の増減表図 9: $y = g(t)$ のグラフ

また, $g(0) = b > 0$, $g(1) = 0$ である.

● $h(t) = at^3 - 2wt^2 + w$ の増減表・グラフ

$h'(t) = 3at^2 - 4wt$ である. $h'(t) = 0$ とすると, $t = \pm \frac{4w}{3a}$ であるが, $0 < t < 1$ より $t = \frac{4w}{3a}$ である.

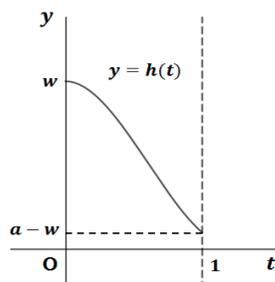
よって, $0 < \frac{4w}{3a} < 1$ を満たすとき, 極値を持つ. 条件より明らかに $0 < \frac{4w}{3a}$ である. また, $\frac{4w}{3a} < 1$ と仮定すると, $a > \frac{4}{3}w$ となる. よって, $0 < a \leq \frac{4}{3}w$ のときは極値を持たず, $a > \frac{4}{3}w$ の時は極値を持つことがわかる.

これらを踏まえ, 場合分けして $h(x)$ の増減表とグラフを考えていく.

(i) $0 < a \leq \frac{4}{3}w$ のとき

この場合は $h(t)$ は $0 < t < 1$ の範囲で極値を持たない. 増減表とグラフは次のようになる.

t	0	...	1
$h'(t)$	/	-	/
$h(t)$	/	↘	/

図 10: $y = h(t)$ の増減表図 11: $y = h(t)$ のグラフ

(ii) $a > \frac{4}{3}w$ のとき

この場合は $h(t)$ は $0 < t < 1$ の範囲でただ 1 つの極値を持つ. 増減表とグラフは次のようになる.

t	0	...	$\frac{4w}{3a}$...	1
$h'(t)$	/	-	0	+	/
$h(t)$	/	\	極小値	/	/

図 12: $y = h(t)$ の増減表

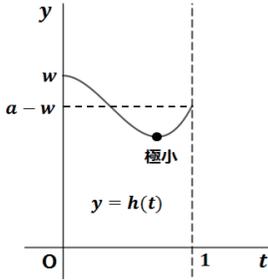


図 13: $y = h(t)$ のグラフ ($h(0) > h(1)$)

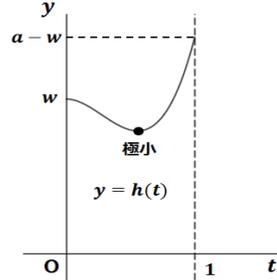


図 14: $y = h(t)$ のグラフ ($h(0) < h(1)$)

また、どちらの場合も $h(0) = w$, $h(\frac{4w}{3a}) = \frac{w(27a^2 - 32w^2)}{27a^2} > 0$, $h(1) = a - w > 0$ である。

最後に $g(t)$ と $h(t)$ のグラフの関係性を調べ、 $g(t)$ と $h(t)$ が $0 < t < 1$ でただ 1 つの交点を持つことを示す。 $h(t)$ のグラフは 2 通りあったので、場合分けしてグラフの関係性を明らかにする。

[i] $0 < a \leq \frac{4}{3}w$ のとき

このとき $g(t)$ と $h(t)$ は極値を持たない。この場合の $g(t)$ と $h(t)$ の $0 < t < 1$ の範囲でのグラフを次のようになる。

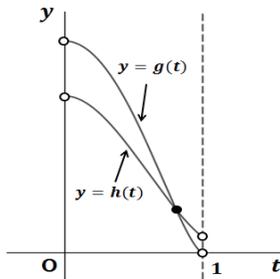


図 15: 2 つのグラフの関係

また、 $g(0) = b, h(0) = w$ であり、 $b > w$ であるから $g(0) > h(0)$ である。そして、 $g(1) = 0, h(1) = a - w$ であり、 $a > w$ であるから $g(1) < h(1)$ である。

したがって、 $g(t), h(t)$ は次の 4 つの条件を満たす。

- (A) $g(0) > h(0)$ である。
- (B) $g(1) < h(1)$ である。
- (C) $g(t)$ は $0 < t < 1$ で単調減少である。

(D) $h(t)$ は $0 < t < 1$ で単調減少である.

この4つの条件を満たすので $g(t)$ と $h(t)$ は $0 < t < 1$ でただ1つの交点を持つ.

【ii】 $a > \frac{4}{3}w$ のとき

このとき $g(t)$ は極値を持たないが $h(t)$ は極値を持つ. この場合の $g(t)$ と $h(t)$ の $0 < t < 1$ の範囲でのグラフを次のようになる.

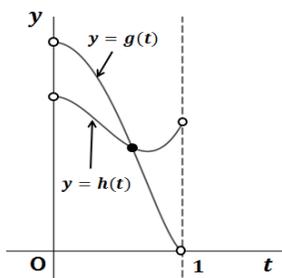


図 16: 2つのグラフの関係 ($h(0) > h(1)$)

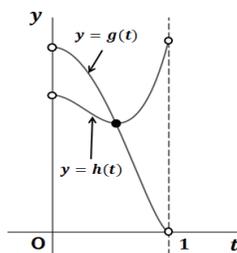


図 17: 2つのグラフの関係 ($h(0) < h(1)$)

【i】と同じように $g(0) > h(0)$, $g(1) < h(1)$ である.

したがって, $g(t)$, $h(t)$ は次の4つの条件を満たす.

(A) $g(0) > h(0)$ である.

(B) $g(1) < h(1)$ である.

(C) $g(t)$ は $0 < t < 1$ で単調減少である.

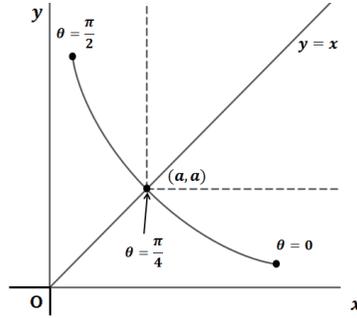
(D) $h(t)$ は $0 < t < 1$ でただ1つの極小値を持つ.

この4つの条件を満たすので $g(t)$ と $h(t)$ は $0 < t < 1$ でただ1つの交点を持つ.

【i】, 【ii】より $g(t)$ と $h(t)$ は $0 < t < 1$ でただ1つの交点を持ち, 補題3は成り立つ. したがって, 方程式 $at^3 - 2wt^2 + w - b(1-t^2)^{\frac{3}{2}} = 0$ が $0 < t < 1$ の範囲でただ1つの解を持ち, 幅のあるガーダー問題が解けることがわかる.

4.2 通路が同じ幅の場合

通路の幅が同じ場合 ($a = b$) は曲がり角の座標は (a, a) である. この場合の座標は直線 $y = x$ 上に位置し, 棒の最大値を求めるときは包絡線の曲線 ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) と直線 $y = x$ の交点に曲がり角の座標が位置することになる. この場合, 直線 $y = x$ は包絡線の対称軸となり, 包絡線の θ の範囲の中点, すなわち, $\theta = \frac{\pi}{4}$ のところで曲がり角の座標が位置する.

図 18: $a = b$ の場合

したがって、通路の幅が同じ場合は方程式 $at^3 - 2wt^2 + w - b(1-t^2)^{\frac{3}{2}} = 0$ の $0 < t < 1$ の範囲でのただ 1 つの解 β は $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ となる。よって、通路の幅が同じ場合は方程式の解 β が決定され、 $\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ を式 (19), (20) のどちらかに代入しても $L = 2\sqrt{2}a - 2w$ である。このように、通路の幅が同じ場合はより簡潔に示すことができる。

4.3 包絡線法による幅のあるガーダー問題の解の公式

4.1 と 4.2 を踏まえ、包絡線法による幅のあるガーダー問題の解の公式を導く。

定理 4 幅のあるガーダー問題に関して、直角の通路の横幅と縦幅を a, b , 棒の長さを L , 幅を w とする。問題の条件から $a, b, w > 0$, $a > w$, $b > w$, $0 < t < 1$ である。このとき、次が成り立つ。

(ア) $a = b$ の場合では、通路を通過できる棒の長さの最大値は

$$L = 2\sqrt{2}a - 2w$$

となり、棒の長さが L 以下であれば通路を通過できる。

(イ) $a \neq b$ の場合では、方程式

$$at^3 - 2wt^2 + w - b(1-t^2)^{\frac{3}{2}} = 0$$

は $0 < t < 1$ の範囲でただ 1 つの解を持つ。その解を β とすると、通路を通過できる棒の長さの最大値は

$$L = \frac{a - w\beta}{(1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{または,} \quad L = \frac{b - w\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta^3}$$

となり、棒の長さが L 以下であれば通路を通過できる。

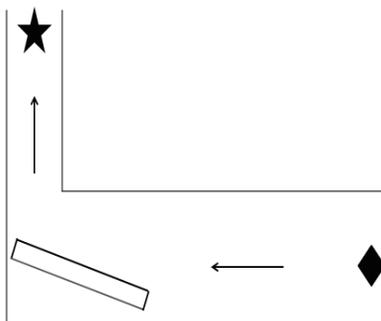
5. 身近な事例への活用

この章では前章で導いたガーダー問題の解の公式をもとに具体的な数値で問題を解決する。

5.1 具体例 1.

具体例 1.

右図のように、幅 4m の通路と幅 8m の通路が直角に位置している。この通路の◆地点から通路の★地点まで棒を立てずに水平にして運び、できるだけ長い棒を運びたい。棒は幅が 1m であり、長さは自由に変えられるものとする（ただし、棒の長さが棒の幅よりも長いものとする）。通路を通過できる棒の最大の長さのくらいか。ただし、通路は十分に長いものとする。また、通路の高さは棒の高さよりも大きいものとし、棒は立てないこととする。



この問題は 2 つの通路の幅が異なるから定理 4 の (イ) が使える。棒の長さを L として、定理 4 の方程式に $a = 4, b = 8, w = 1$ を代入すると、

$$4t^3 - 2t^2 + 1 - 8(1 - t^2)^{\frac{3}{2}} = 0 \quad (31)$$

を得る。この式は $0 < t < 1$ の範囲でただ 1 つの解を持つのでその解を見つける。解の公式はないので無料グラフ作成アプリ desmos で $y = 4t^3 - 2t^2 + 1 - 8(1 - t^2)^{\frac{3}{2}}$ のグラフを作成し、 x 軸との交点を調べて解を求めた。その結果、交点が $(0.7975, 0)$ であった。このことから、 $0 < t < 1$ の範囲で持った 1 つの解は $t \doteq 0.7975$ である。

したがって、定理 4 の (イ) の 2 式に $a = 4, b = 8, w = 1$ を代入したもののどちらかに $\beta \doteq 0.7975$ を代入すると棒の長さの最大値 L を求めることができる。

● $L = \frac{a-w\beta}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}$ に代入した場合

この式に $a = 4, b = 8, w = 1$ を代入すると、 $L = \frac{4-\beta}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}$ である。さらに $\beta \doteq 0.7975$ を代入して L を求める。計算が複雑なため、電卓を用いて計算する。その値は

$$L = \frac{4 - (0.7975)}{(1 - (0.7975)^2)^{\frac{3}{2}}} = 14.5830460945 \dots \doteq 14.58 \quad (32)$$

となる。

● $L = \frac{b-w\sqrt{1-\beta^2}}{\beta^3}$ に代入した場合

この式に $a = 4, b = 8, w = 1$ を代入すると $L = \frac{8-\sqrt{1-\beta^2}}{\beta^3}$ である。さらに $\beta \doteq 0.7975$ を代入して L を求める。その値は

$$L = \frac{8 - \sqrt{1 - (0.7975)^2}}{(0.7975)^3} = 14.5829308737 \dots \doteq 14.58 \quad (33)$$

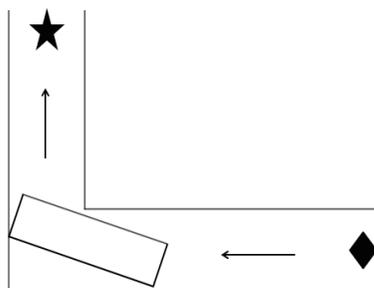
となる。

これらの結果から、通路を通過できる棒の長さの最大値はおおよそ 14.58m である。

5.2 具体例 2.

具体例 2.

右図のように、幅 5m の 2 つの通路が直角に位置している。この通路の◆地点から通路の★地点まで棒を立てずに水平にして運びたい。棒は幅が 3m であり、長さは 10m である。この棒は通路を通過し、◆地点から★地点まで運ぶことは可能であるか。ただし通路は十分に長いものとする。また、通路の高さは棒の高さよりも大きいものとし、棒は立てないこととする。



この問題は 2 つの通路の幅が同じであるから定理 4 の (ア) が使える。棒の長さを L として定理 4 の (ア) の式に $a = b = 5, w = 3$ を代入すると、

$$L = 2\sqrt{2} \cdot 5 - 6 = 10\sqrt{2} - 6 (\approx 8.14) \quad (34)$$

を得る。これらの結果から、通路を通過できる棒の長さの最大値はおおよそ $(10\sqrt{2} - 6)$ m である。今、実際の棒の長さは 10m であり、 $10 > 10\sqrt{2} - 6$ なので明らかに通過できる棒の長さの最大値より大きい。したがって、この棒は通路を通過できず、◆地点から★地点まで運ぶことは不可能である。

6. desmos の活用

グラフ作成の無料アプリ Desmos Graphing Calculator (desmos) はグラフが簡単に作成できるだけでなく、アニメーション機能やスライド機能もあり、グラフを自由に動かすことも可能である。数式が美しいかつ入力が簡単であり、グラフ作成以外にも統計や回帰分析といった有用な機能が豊富にある (pp. 1-12 [6])。とても利便性に優れ、高校数学の授業にも導入している学校もあるなど、最近注目のアプリである。本論文のガーダー問題における desmos の活用方法を紹介する。

6.1 desmos を用いた解法

desmos を用いると、次の (1)~(3) の手順から幅のあるガーダー問題を包絡線法により簡単に求めることができる。

- (1) desmos に式リストを入力し、グラフ (包絡線、曲がり角の座標など) を作成する。

アプリ (またはインターネットブラウザ) で Desmos Graphing Calculator を開き、式リスト (図 20 参照) をもとに幅のある棒の通過領域を表す包絡線及び曲がり角の座標を入力する。この際、棒の長さ l や幅 w 、通路の幅 a, b のパラメーターや変数が表示され、グラフが作成される。

- (2) スライダーを動かして、題意以外の条件を設定する。

式リストを入力するといくつかの文字でスライダー機能があるのがわかる。これはパラメー

タや変数を表している. 問題から通路の幅 a, b , 棒の幅 w , 包絡線の範囲 t などの条件を求めたいガーダー問題の条件を確認し, その条件と同じようにスライダーを利用して値を設定する. ただし, 問題の題意である棒の長さ l は設定しないものとする.

- (3) 曲がり角の座標と包絡線が重なるように棒の長さ l のスライダーを設定する.

最後に棒の長さ l を設定する. 設定前では包絡線と通路の曲がり角の座標はおそらくズレが生じている. 包絡線上に通路の曲がり角の座標が来るように l のスライダーを動かす. ちょうど包絡線と曲がり角の座標が重なるとき, l のスライダーに着目する. そこには l の値が表示されており, その l の値が包絡線法による幅のあるガーダー問題の解答である棒の長さの最大値である. また, この条件のガーダー問題であれば, その最大値より小さい棒は通路を通過できることもわかる.

(1)~(3) の手順から簡単に通路を通過できる幅のある棒の長さの最大値や求めたり, 幅のある棒が通路を通過できるかの判定を行うことができる.

6.2 シミュレーションの作成

独自の式リストを作成した結果, desmos に入力することで, ガーダー問題をグラフを用いて幾何学的に描くことができる (図 19 参照). 変数 θ の値を設定するスライダーを動かすと棒が動き, 通路を通過できるかの判定のシミュレーションを行える. ただし, 今までの問題では変数 θ を扱っていたが, desmos では θ 表記ができなかったので代わりに u を用いている (包絡線の曲線を表す場合のみ t を用いるが, これは範囲の全体像を表すのでスライダーは用いない). u のスライダーを動かすと棒が動き, 棒が包絡線上を通過して動く様子がわかる. また, 6.1 のように式リストを活用すると簡単に棒の幅を拡張したガーダー問題を解決できる.

※図 20 の式リストの□はスライダー (定数を変化させるもの) の範囲内での定数の値, ○・△・●・◆はスライダーの範囲を示す.

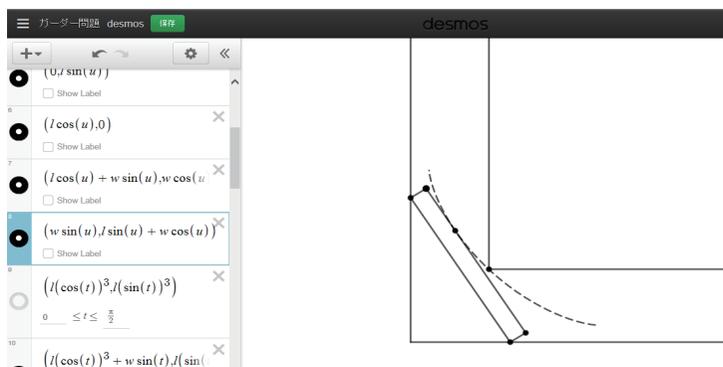


図 19: 幅のあるガーダー問題のシミュレーション図

番号	形式	グラフの示す内容	式リストの数式
1	直線	線分 AB	$y = -\tan(u)x + l \sin(u) (0 \leq y \leq l \sin(u))$
2	直線	線分 CD	$y = -\tan(u)x + l \sin(u) + \frac{w}{\cos(u)} \{w \cos(u) \leq y \leq l \sin(u) + w \cos(u)\}$
3	直線	線分 AD	$y = \frac{1}{\tan(u)}x - \frac{l \cos(u)}{\tan(u)} (0 \leq y \leq w \cos(u))$
4	直線	線分 BC	$y = \frac{1}{\tan(u)}x + l \sin(u) (l \sin(u) \leq y \leq l \sin(u) + w \cos(u))$
5	点	点 A	$(0, l \sin(u))$
6	点	点 B	$(l \cos(u), 0)$
7	点	点 C	$(l \cos(u) + w \sin(u), w \cos(u))$
8	点	点 D	$(w \sin(u), l \sin(u) + w \cos(u))$
9	曲線	線分 AB の包絡線	$(l \cos^3(t), l \sin^3(t)) \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
10	曲線	線分 CD の包絡線	$(l \cos^3(t) + w \sin(t), l \sin^3(t) + w \cos(t)) \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
11	点	線分 AB の包絡線と直線 AB との交点	$(l \cos^3(u), l \sin^3(u))$
12	点	線分 CD の包絡線と直線 CD との交点	$(l \cos^3(u) + w \sin(u), l \sin^3(u) + w \cos(u))$
13	スライダー	棒の長さ (l)	$l = \square (0 < l < \circ)$
14	スライダー	棒のなす角度 (u)	$u = \square (0 < u < \frac{\pi}{2})$
15	スライダー	棒の幅 (w)	$(0 < w < \triangle)$
16	点	通路の座標	(a, b)
17	直線	通路	$x = 0 \{y \geq 0\}$
18	直線	通路	$y = 0 \{x \geq 0\}$
19	直線	通路	$x = a \{y \geq b\}$
20	直線	通路	$y = b \{x \geq a\}$
21	スライダー	通路の幅 (a)	$a = \square (0 < a < \bullet)$
22	スライダー	通路の幅 (b)	$b = \square (0 < b < \blacklozenge)$

図 20: 幅のあるガーダー問題の式リスト

7. おわりに

この論文では、数学の実用性の観点から Miller の研究をもとに幅のあるガーダー問題をアレンジし、包絡線を用いて解法の過程および問題の定式化を明らかにした。これにより、棒を立てずに水平に保ったまま動かすことや通路の高さが棒の高さより小さいこと等の制約があるが、日常の事象にも適応できる。また、グラフ作成アプリ desmos を用いた解法及びシミュレーションの作成方法も与え、問題の視覚的理解に有効に機能する。しかし、日常では水平でなく、立てて棒を運ぶほうが棒の最大長は大きくなる。そのためにはガーダー問題の条件に通路の高さや棒の高さを加え、三次元空間で問題を考えてその問題を定式化し、解を見つける必要がある。また、より実用性を重視するには直角に曲がった通路だけでなく、通路の角度が鋭角・鈍角の場合、または通過する物が長方形の形をした棒でなく、楔形や菱形の形をした船の場合など、幅のあるガーダー問題を発展させ、バリエーションを多様にする必要もある。したがって、今後の課題はガーダー問題を三次元的にとらえ、棒を立ててもよい条件のもとで立体的なガーダー問題を設定し、その問題の定式化及び ICT によるシミュレーションの作成を検証すること、幅のあるガーダー問題を発展させた問題をいくつか設定し、それぞれ包絡線を用いた解法の過程および問題の定式化とその解の公式を与えることである。

参考文献

- [1] 東京出版編集部 (2009), 『大学への数学 解法の追究・微積分』, 東京出版.
- [2] Howard Anton, Irl Bivens and Stephen Davis (西田吾郎 監訳, 井川 満 訳) (2013), 『微積分学講義 上』, 京都大学学術出版会.
- [3] John C. Sparks (2004), “ Calculus Without Limits-Almost ”, AuthorHouse.
- [4] Norman Miller (1949), “ The Problem of Non-Vanishing Girder Rounding a Corner ”, American Mathematical Monthly, Vol.56, pp. 177-179.
- [5] 高木貞治 (2010), 『定本 解析概論』, 岩波書店.
- [6] Team Desmos (堀川由人 訳), 『desmos ユーザーガイド』, pp. 1-12.