論　説

自動化が資本蓄積と熟練・非熟練労働に与える影響

濱　田　弘　潤*

概 要

本論文は，自動化 (automation) の進展が，資本蓄積及び熟練・非熟練労働者の雇用や賃金に与える影響について，簡単なモデルを用いて説明する試みである．近年急速に発展している AI（人工知能）の普及は，大局的な観点からは生産活動における自動化の進展として捉えることができる．自動化の進展が，資本蓄積や熟練・非熟練労働に与える影響を考察することは，AI が雇用や経済成長に与えるインパクトを考察する手掛かりとなる．本論文では，Zeira (1998) のシンプルな自動化の定式化と，資本，熟練・非熟練労働という 3 生産要素を用いた生産関数を前提として，自動化の進展が資本蓄積，雇用，賃金に与えるインパクトについての分析結果を提示する．非熟練労働が他の生産要素と完全代替で，資本と熟練労働間に補完関係のある生産関数を考え，得られた主な結論は以下の通りである．第一に，自動化の進展に伴い資本蓄積が増加するかどうかはパラメータに依存し，自動化が経済成長を常に促進させるとは限らない．特に，熟練・非熟練労働者が共存する安定定常均衡における 1 人当り資本は，自動化の進展と共に減少する．第二に，熟練労働者の賃金は 1 人当り資本水準にも依存し，自動化の進展が熟練労働者の賃金を常に上昇させるとは言えない．熟練・非熟練労働者が共存する安定定常均衡では，熟練・非熟練労働者の賃金はどちらも自動化の進展と共に下落する．第三に，安定定常均衡では，生産関数や効用関数のパラメータに依存して，熟練・非熟練労働者の賃金格差が縮小する可能性がある．

Keywords: 自動化，資本蓄積，熟練・非熟練労働，経済成長，生産関数

JEL classifications: E13, E23, J24, O14

* 住所：〒 950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050　新潟大学経済科学部
Tel. and Fax: 025-262-6538
Email: khamada@econ.niigata-u.ac.jp
ORCID iD: 0000-0002-4684-5477

1　はじめに

近年，生成系 AI (Generative AI) に代表される AI（人工知能）の急速な普及は，我々の社会・経済・文化に与える AI のインパクトについて，様々な議論を引き起こしている．経済学的な関心に議論を限定しても，AI の普及が我々人類の仕事を奪う可能性や，経済成長に与えるインパクトの大きさについてなど，研究者に限らず多数の人々の耳目を集めている．AI を経済学でどのように定義し分析するかについて，現在のところ必ずしも見解が一致している訳ではない．近年急速に発展している AI の普及は，経済理論では生産活動における自動化またはオートメーション (automation) の進展として，大局的な観点からは捉えることができる．本論文は，こうした若干単純化した見方に従いつつ，自動化の進展が資本蓄積や熟練・非熟練労働の雇用及び賃金に与える影響について，簡単なモデル化によって説明する試みである．

経済理論で AI をどう捉えるのかについては，Aghion, Jones, and Jones (2017) が，AI と経済成長の関係について最も簡潔な形で，複数のシナリオを提示している．彼らのサーベイ論文を踏まえて，著者も以前，AI と経済成長の関係を分析する先行理論研究を概説し，AI のモデル化の違いによって起こり得る未来像が異なることを示した（濱田 (2021)）．特に，若干古典的な見方ではあるが，AI の普及を生産活動における広範な自動化の進展と捉える見方がある．すなわち，これまで労働や人的資本という生産要素が担ってきた生産活動を，機械設備やソフトウェアといった物的資本が代替するという，生産関数上の変化として捉えるものである．[1] こうした見方が AI の本質を適切に捉えているとは，必ずしも言い切れないかもしれない．しかしながら，生産活動における自動化の進展という切り口を通して，自動化が資本蓄積や熟練・非熟練労働に与える影響を考察することは，AI が雇用や経済成長に与えるインパクトを考察するための第一歩となる．こうした点を踏まえて本論文では，昨今の AI の普及に象徴される自動化の進展が，資本蓄積と熟練・非熟練労働に与える影響を，可能な限り簡単なモデルを用いて考察することを目的とする．特に本論文では，Zeira (1998) のシンプルな自動化の定式化に焦点をあて，生産が資本集約的となるプロセスに注目する．生産関数が，資本，熟練・非熟練労働という 3 つの生産要素に依存するケースを前提とし，非熟練労働が他の生産要素と完全代替で，資本と熟練労働間に補完関係のある生産関数を考察する．自動化の進展が資本蓄積を通じた経済成長や，熟練・非熟練労働の雇用及び賃金に与えるインパクトについて，分析結果を提示する．

本論文に関係する既存研究に関しては，既に濱田 (2021) で AI が経済成長に与える影響に関する先行研究のサーベイを論じた際に，自動化の進展と経済成長に関する主要論文を挙げている．従って，ここでは論文紹介を繰り返さない．代わりに，本論文で構築するモデルや分析内容と密接に関係する先行研究を，最低限挙げて概要を説明する．第一に，自動化の進展を生産関数上の労働

[1] Aghion, Jones, and Jones (2017) でも紹介されているように，人類の技術革新には一貫した共通の特徴がある．自動車，紡績機，半導体，コンピュータから AI まで，従来人間が行ってきた仕事を機械が代替するという共通点である．人間の仕事（労働）を機械（資本）が代替するという技術革新の特徴は，「自動化（オートメーション）」と呼ばれる．全ての技術革新は自動化という共通した観点から，統一的に考察することができる．とはいえ，近年の AI 技術の普及が，これまでの技術革新と比較して，定量的な違いだけで定性的な違いがないかどうかについては，議論の余地がある．

から資本への代替プロセスとして捉え，自動化の定式化を行った先駆的論文として，Zeira (1998) が最も重要な先行研究である．本論文でも基本的に，Zeira (1998) による定式化に従い，自動化の進展が経済に与える影響を考察する．Zeira (1998) の定式化については，次節で紹介する．第二に，Galor and Moav (2000) は，能力に応じて異なる技術移転が賃金の不平等と経済成長に与える影響を論じた代表的論文であり，本論文と問題意識を共有している．技術進化を自動化の進展と関連付けることもできる．ただし，Zeira (1998) が考えた形の自動化を分析している訳ではない．また，資本と労働の 2 生産要素モデルで，労働が熟練・非熟練労働を含む複合生産要素として扱われており，資本と熟練・非熟練労働との代替・補完関係が明確ではない．第三に，Aghion, Jones, and Jones (2017) は，AI の普及が経済成長に与える影響を分析するための分析枠組みとして，Zeira (1998) による生産活動への自動化プロセスを含む様々な定式化の可能性について，先行研究を紹介し概説を行った．実際のところ，AI の普及を単なる自動化の進展と同一視できるとは限らない．例えば，Acemoglu and Restrepo (2018) では，技術革新により生まれた新技術が，既存の仕事で労働を必要としなくなる一方，労働を必要とする新たな仕事が生み出されるモデルを構築し，経済成長率や労働分配率，雇用への影響を分析している．とはいえ，上記モデルの下での結論の導出は非常に複雑となるため，本論文はより簡単に分析可能な新古典派モデルに基づいている．第四に，Mountford and Rapoport (2011) の分析を関連文献として挙げておく．Mountford and Rapoport (2011) は，2 国モデルで熟練・非熟練労働が存在する状況での熟練労働者の移民，すなわち「頭脳流出 (brain drain)」の問題を扱った．[2] 本論文では，彼らのモデルが描写した，親世代が子世代に教育を施す形の熟練技能形成については扱っていない．しかし，世代間の教育を通じた技能形成のモデル化は，将来的な研究の拡張可能性として検討の余地がある．最後に，本論文のモデルは，Kimura and Yasui (2007) による 3 生産要素の世代重複モデルを参考として，議論が展開されている．彼らの論文を参考としたのは，様々なモデルが存在する中で，最も簡潔かつ明快な分析が可能なためである．具体的には，生産関数が 3 生産要素モデルで，資本と熟練労働に補完性があると同時に，非熟練労働は他の生産要素と完全代替である．さらに，親世代が子供世代のために教育を行い技能形成が決まる通常のモデルでは分析が複雑になるのに対して，Kimura and Yasui (2007) モデルでは，成年世代が自らの技能形成のために教育を選択し，技能形成の世代間相互作用のないシンプルなモデルとなっている．ただし，自動化の進展の影響を分析する上で，どのモデルが最も適切なのかについて明確には決まっていないので，モデルの適切さについては今後検討の余地があると言える．

本論文で得られる結論のうち，主な結論を要約すると以下の通りである．第一に，自動化の進展に伴い資本蓄積が増加するかどうかはパラメータに依存し，自動化が経済成長を常に促進させるとは限らない．特に，熟練・非熟練労働者が共存する安定定常均衡における 1 人当り資本は，自動化の進展と共に減少する．第二に，熟練労働者の賃金は 1 人当り資本水準にも依存し，自動化の進展が熟練労働者の賃金を常に上昇させるとは言えない．熟練・非熟練労働者が共存する安定定常

[2] Mountford and Rapoport (2011) に関するサーベイ及び，熟練労働者のみならず非熟練労働者の移民を扱った分析については，濱田 (2022) を参照せよ．

均衡では，熟練・非熟練労働者の賃金はどちらも自動化の進展と共に下落する．静学分析で予想されるように，もし資本量が一定であれば，生産関数の形状にかかわらず多くの状況で，熟練労働者の賃金が上昇し非熟練労働者の賃金が下落する．しかし，マクロ動学で資本蓄積を考える場合，静学分析とは異なる結論が導かれる可能性がある．第三に，安定定常均衡において，生産関数や効用関数のパラメータに依存して，熟練・非熟練労働者の賃金格差が縮小する可能性がある．

本論文の構成は以下の通りである．第2節では，生産プロセスの自動化を考える基本モデルを説明する．第3節では，資本，熟練・非熟練労働という3生産要素を用いた生産関数を前提として世代重複モデルを提示し，自動化の進展が資本蓄積や雇用，賃金に与える影響について，定常状態分析を行う．第4節では，論文のまとめを述べ，今回論文で分析できなかった課題と今後の拡張について論じる．

2　基本モデル

2.1　自動化の位置付け

Aghion, Jones, and Jones (2017) の議論によれば，これまで人類が行ってきた技術革新の一貫した共通の特徴は，従来人間が行ってきた仕事を機械が代替するという点にある．このことを「自動化（オートメーション）(automation)」と呼び，人間の仕事（労働）を機械（資本）が代替する技術革新の特徴の中に，AI 技術の普及も位置付けることができる．従って，過去の技術革新と同様な形で，AI も分析可能と位置付けられる．このように，生産プロセスの自動化という観点から，初めて定式化を行ったのは Zeira (1998) である．自動化についての彼の定式化を，最も簡単な形で紹介すると以下のようになる．

n 種類の生産要素を用いて生産を行う，コブ・ダグラス型 (Cobb-Douglas) 生産関数を以下に想定する．

$$Y = AX_1^{\alpha_1}X_2^{\alpha_2}\times\cdots\times X_n^{\alpha_n} = A\sum_{i=1}^{n}X_i^{\alpha_i}. \tag{2.1}$$

ここで，A は全要素生産性，X_i は i 番目の生産要素（タスク），Y は生産量であり，$\alpha_i\in(0,1)$ が第 i 生産要素の要素分配率である．規模に関する収穫一定として，$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$ を仮定する．ここで，Zeira (1998) は生産要素 X_i を中間財と考えたが，仕事（タスク）と解釈することができる．例えば，Acemoglu and Autor (2011) では，X_i をタスクと解釈している．どちらの解釈も可能であるが，タスクと解釈した方が自動化の説明上分かりやすいので，以下 X_i をタスクと解釈する．

X_i を，第 i 番目のタスクに必要な生産要素投入量と考える．この時，まだ自動化されていないタスクは労働力を用いて生産される．一方，技術革新により自動化が進むと，このタスクは機械設備等の物的資本を用いて生産される．従って，自動化前後でタスク i に必要な生産要素は以下の通

りとなる．

$$X_i = \begin{cases} L_i & \text{自動化前} \\ K_i & \text{自動化後} \end{cases} \tag{2.2}$$

ここで，L_i と K_i はそれぞれ，タスク i の生産に必要な労働と資本の投入量である．全てのタスク $i = \{1, \cdots, n\}$ についても同様に考えれば，総資本量 K と L が全てのタスクに適切に配分され，t 期の生産関数は次式の通りとなる．

$$Y_t = A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}. \tag{2.3}$$

すなわち，コブ・ダグラス生産関数 (2.3) の要素分配率パラメータ α は，技術革新に伴い自動化されたタスクのシェアを反映する指標と解釈可能である．自動化の進展は，単純に α の増加として捉えることができる．従って，自動化の進展がもたらす影響は，α を外生変数として，α の増加に関する比較静学として分析することができる．

以上が，Zeira (1998) のモデルにおける自動化の本質である．このモデルに従えば，要素分配率 α は生産要素のうち資本への支払いシェアを意味するので，α の増加は資本蓄積による乗数効果を通じて長期の成長率を上昇させる．従って，自動化技術の進展は長期の経済成長率を上昇させるという結論が得られる．[3] 以下では，新たな仕事が生み出され新たな雇用が生まれるといった状況は考えず，Zeira (1998) 流の単純化されたモデルに基づいて，議論を進める．[4]

2.2　3 生産要素の生産関数

本論文のモデルでは，3 つの生産要素を用いた生産関数を考える．生産要素は，資本と熟練労働，非熟練労働である．この 3 要素の要素分配率を変化させることで，自動化の進展についての比較静学を行い，自動化が資本蓄積や熟練・非熟練労働者の雇用と賃金に与える影響を考察する．

はじめに変数について述べ，生産関数について説明する．t 期の物的資本量を K_t，熟練労働 (skilled labor) 量と非熟練労働 (unskilled labor) 量をそれぞれ，L_t^s と L_t^u とし，t 期の生産量を Y_t で表す．企業は完全競争市場下で多数存在し，集計された生産関数は，規模に関する収穫一定であるとする．

---

[3] Zeira (1998) のモデルは分析上最も簡潔であるが，この単純な設定には問題点が一つある．自動化の進展に伴い資本シェアと成長率が上昇するという結論は，現実のデータとは整合的でない．Kaldor (1961) は，経済成長率と資本シェアが時代を超えて一定であり安定的に推移するという経験則を指摘した．実際に Jones (2016) は，20 世紀米国のデータで資本シェアが安定的で増加傾向にないことを明らかにしている．上記の問題を解決するために，Acemoglu and Restrepo (2018) は，コブ・ダグラス型生産関数に代えて CES (constant elasticity of substitution) 生産関数を考え，タスクの数と自動化の進展を内生化することにより，歴史的事実と整合的な分析を行っている．しかしながら，タスクの数を内生化するモデルは分析が複雑になる．本論文では実証上の整合性を犠牲にしつつ，分析の簡単化を優先し，自動化の進展を要素分配率 α の増加と同一視して分析を進める．Acemoglu and Restrepo (2018) のモデルに基づいた，タスクの数と自動化の進展を内生化するモデルへの拡張は，今後の分析課題である．

[4] 喩えて言えば，馬車から自動車，飛行機へ，手書きからタイピング，自動筆記へと技術革新が進んだ時に，新たな仕事が生まれたと考えるのか，それとも輸送や執筆サービスの自動化が進んだと考えるのかの違いである．前者と比べて後者は非常に粗いモノの見方ではあるが，単純かつ統一的に技術革新の本質を描写することができる．

生産関数を最も一般的な形で書くと，次式のように表現される．

$$Y_t = F(A_K K_t,\, A_s L_t^s,\, A_u L_t^u). \tag{2.4}$$

ここで，$A_K > 0$，$A_s > 0$，$A_u > 0$ はそれぞれ，資本増大技術，熟練労働増大技術，非熟練労働増大技術の要素生産性パラメータに対応する．

しかしながら，このように生産関数が一般的な関数形のままでは，自動化の進展が与える影響を明確な形で分析できない．従って，生産関数の形状がどのようなものであるかについて，具体的な関数形を特定し分析する必要がある．この関数形の特定化は，理論的にも実証的にも難しいものであり，究極的には実証研究の結果によって特定されるべきものである．本論文では，以下に特定化した生産関数の例をいくつか挙げ，その中から理論的・実証的に支持され得る生産関数を一つ挙げて，その特定化した生産関数の下で分析を行う．

まずは使用する外生変数を説明する．全要素生産性を $A > 0$ とし，個別生産要素の生産性のウエイトを示すパラメータを $a > 0$ と $b > 0$ で表す．$\alpha \in (0,1)$ と $\beta \in (0,1)$ を，複数の補完的生産要素間の要素生産性を表すパラメータとする．代表的な生産関数として，以下の 4 つの生産関数が考えられる．

1. 対称型，CES 生産関数：$Y_t = A\left[\alpha (L_t^s)^\rho + \beta (L_t^u)^\rho + (1-\alpha-\beta)(K_t)^\rho\right]^{\frac{1}{\rho}}$
2. 非対称型，弱分離型 1：$Y_t = F\left[G(L_t^s,\, K_t),\, L_t^u\right] = A\left[aK_t^\alpha (L_t^s)^{1-\alpha} + bL_t^u\right]$
3. 非対称型，弱分離型 2：$Y_t = F\left[G(L_t^s,\, L_t^u),\, K_t\right] = A\left[a(L_t^u)^\alpha (L_t^s)^{1-\alpha} + bK_t\right]$
4. 非対称型，弱分離型 3：$Y_t = F\left[G(L_t^u,\, K_t),\, L_t^s\right] = A\left[a(L_t^u)^\alpha K_t^{1-\alpha} + bL_t^s\right]$

第 1 の生産要素が対称型となる CES 生産関数は，言わずと知れた代表的な生産関数の一つである．ここで，$\rho = (\sigma-1)/\sigma$ を σ について解くと，$\sigma = 1/(1-\rho)$ が生産要素の代替の弾力性を表す．CES 生産関数は，要素間の代替性が対称かつ一定のケースに当てはまる．この第 1 のケースでは，自動化の進展は β の低下で表される．しかしながら難点として，3 生産要素の場合，CES 生産関数だと計算が複雑過ぎるという問題がある．仮に $\rho \to 0$ を考えると，代替の弾力性が $\sigma \to 1$ となり，コブ・ダグラス型生産関数 $Y_t = A(L_t^s)^\alpha (L_t^u)^\beta K_t^{1-\alpha-\beta}$ となる．とはいえコブ・ダグラス型生産関数でも，式の展開は簡単ではない．次に，第 2 の非対称型，弱分離型 1 は，非熟練労働は他の生産要素と完全代替であり，資本と熟練労働間に補完関係があるケースである．この第 2 のケースが理論的・実証的にもっともらしいと考えられるので，第3節の分析ではこの生産関数を用いて分析を行う．Kimura and Yasui (2007) においても，この生産関数を用いた分析が行われている．[5] 第 2 のケースでは，自動化の進展は b の低下と a の上昇で表される．第 3 の非対称型，弱分離型

[5] Kimura and Yasui (2007) によれば，物的資本と熟練労働間に補完性があるかどうかは議論のあるところだが，それを支持する実証結果が存在するとして，参考文献を挙げている．さらに，Galor and Weil (1996) は，熟練・非熟練労働とは若干異なる文脈ではあるが，同様の生産関数を導入し分析を行っている．

2 は，資本は熟練・非熟練労働を問わず労働と完全代替であり，熟練労働・非熟練労働間に補完関係があるケースである．第 2 のケースとの大きな違いは，資本と熟練労働の間に補完性がない点にある．AI の普及が，熟練・非熟練労働を問わず，労働者の仕事を代替することが懸念されているが，その視点に従うとこの第 2 のケースの定式化が，正当化されるかもしれない．ただし理論的・実証的な支持はこれまでのところ少ない．AI の普及が熟練労働を含めた人間の仕事を完全代替することを支持する実証結果がなければ，この生産関数を用いた分析の正当化は難しそうである．本論文では扱わない．自動化の進展は a の低下と b の上昇で表される．最後に，第 4 の非対称型，弱分離型 3 は，熟練労働が他の生産要素と完全代替で，資本と非熟練労働間に補完関係があるケースである．こちらも，理論的・実証的な裏付けが必要であるが，実証的な観点からはあまり現実的とは言えそうにない生産関数である．こちらも本論文では扱わない．自動化の進展は α の低下で表される．以下の分析では，第 2 の非対称型，弱分離型 1 の生産関数に注目する．

2.3　世代重複モデル

3 生産要素を用いた生産活動が行われる世代重複モデル (overlapping generations model) として，Kimura and Yasui (2007) のモデル設定に従う．彼らの論文の設定を採用する理由として，第一に，3 生産要素を扱う世代重複モデルとして，モデルが簡潔であることが挙げられる．特に，生産関数が先に紹介した非対称型，弱分離型 1 で，非熟練労働が他の生産要素と完全代替であり，資本と熟練労働間に補完関係があるケースを扱っている．第二の理由として，熟練労働への技能形成が自らの教育投資の結果となっており，親世代から子世代への世代間相互作用がないという点で，簡潔な分析が可能となっていることが挙げられる．[6]

世代重複モデルを考え，期間 t は離散時間で $t=0$ 期から無限に進むものとする．各個人は，幼年期，成年期，老年期の 3 期間生存する．幼年期に，個人は何ら意思決定を行わない．単に親から与えられた決まった時間を消費する受動的な存在である．成年期に，個人は労働を供給し，子供を育て，必要ならさらなる教育水準を受ける．具体的には，何人子供を育てるか，また熟練技能を必要とする職業に就くために高等教育を受けるかどうかを決定する．老年期は，成年期の貯蓄を全て消費に充てる．消費は老年期のみに行われる．

各期 $t=0,1,2,\dots$ に，3 世代（幼年世代，成年世代，老年世代）が存在している．幼年世代は，成年世代に扶養される．成年世代は，1 単位の時間を初期に賦与され，育児と労働力参加，教育に与えられた時間に配分する．また成年世代は，熟練・非熟練労働のどちらを選ぶかを決定する．熟練労働を選ぶ場合，高等教育を獲得するために $\tau \in (0,1)$ の時間を費やす必要がある．高等教育獲得のための時間 τ は，全個人で同一であると簡単化する．また，以下では表現を統一するため

[6] 簡潔に，Kimura and Yasui (2007) の論文概要を紹介する．職業（教育）選択と出生率決定のあるモデルで，資本蓄積と関係する高学歴の人口増に伴う，出生率低下を説明している．さらに，定常状態の均衡が複数存在する可能性を指摘している．既存研究との違いは，子の人的資本への親の投資ではなく，親が自分の教育投資を行う状況を扱っており，教育支出の質・量 (quality-quantity) のトレード・オフを考慮することなく，出生率の推移を扱える分析となっている．

に，熟練・非熟練を問わず，教育（の時間）費用を $\tau^i \in [0,1), i = \{s,u\}$ とする．上付文字 s と u はそれぞれ，熟練 (skilled)・非熟練 (unskilled) を表す．$\tau^s = \tau > \tau^u = 0$ である．

各個人は，教育投資の意思決定をする前は同質的である．子供を 1 人養育するために必要な時間を z，熟練・非熟練労働者が育てる子供の数をそれぞれ n_t^s と n_t^u とおくと，熟練労働者が供給する労働力は $1-\tau^s - zn_t^s = 1-\tau - zn_t^s$ で表わされる．一方，非熟練労働者が供給する労働力は，$1-\tau^u - zn_t^u = 1 - zn_t^u$ で表される．全労働者に対する熟練労働者の比率を φ_t，労働人口，すなわち第 $t-1$ 世代の成年期 t 期（成年世代）の数を N_t とすると，t 期の熟練労働者・非熟練労働者の総供給は，それぞれ次式を満たす．

$$L_t^s = (1-\tau - zn_t^s)\varphi_t N_t, \tag{2.5}$$

$$L_t^u = (1-zn_t^u)(1-\varphi_t)N_t. \tag{2.6}$$

次に，各個人の効用と予算制約について述べる．個人は，子供の数と老年期の消費から効用を得る．各個人は同一の選好を持つと想定し，世代 $t-1$（$t-1$ 期に生まれた世代）の効用関数は，対数線形で次式を満たすものとする．

$$u_t^i = U(n_t^i, c_{t+1}) \equiv \gamma \ln n_t^i + (1-\gamma)\ln c_{t+1}^i. \tag{2.7}$$

ここで，n_t^i は t 期に熟練・非熟練労働 $i = \{s,t\}$ を選んだ個人の子供数，c_{t+1}^i は $t+1$ 期の老年期消費水準を表す．$\gamma \in (0,1)$ は，個人の選好に占める子供の数の相対的ウエイトである．各個人は，総時間数 1 の制約下で，子育て，労働，教育に時間を配分し，子供の数と老年期消費水準を選択する．

熟練・非熟練労働者 $i = \{s,u\}$ の予算制約は，それぞれ次式の通りである．

$$c_{t+1}^i = (1+r_{t+1})(1-\tau^i - zn_t^i)w_t^i. \tag{2.8}$$

ここで，r_t は t 期の（純）利子率である．

個人は，予算制約式 (2.8) の下で，子供の数 n_t^i に関して効用 (2.7) を最大化する．効用最大化の 1 階条件は次式を満たす．

$$\frac{\gamma}{n_t^i} = \frac{1-\gamma}{c_{t+1}^i}(1+r_{t+1})zw_t^i \ \Leftrightarrow \ n_t^i = \frac{(1-\tau^i)\gamma}{z}. \tag{2.9}$$

(2.9) より，熟練・非熟練労働者の子供の数は次式を満たす．

$$n_t^s = \frac{(1-\tau)\gamma}{z},\ n_t^u = \frac{\gamma}{z}. \tag{2.10}$$

(2.10) より，熟練労働者は非熟練労働者より子供の数が少ない ($n_t^s < n_t^u$)．これは，熟練労働者には，自分の熟練技能形成の教育に充てる時間が必要なことから明らかである．また子供の数の差は，τ と共に増大する ($n_t^u - n_t^s = \tau\gamma/z$)．さらに，$t$ 期の出生率 (fertility rate) を m_t として，以下のように

定義する．

$$m_t \equiv \varphi_t n_t^s + (1-\varphi_t) n_t^u = \frac{(1-\tau\varphi_t)\gamma}{z}. \tag{2.11}$$

$n_t^s < n_t^u$ が成立するので，熟練労働者の比率 φ_t が大きければ出生率 m_t は低下する．

熟練・非熟練労働者の最適な子供の数 (2.10) を老年期の消費水準 (2.8) に代入して，最適貯蓄水準 $s_{t+1}^i = c_{t+1}^i/(1+r_{t+1})$ を次式の通り導出する．

$$s_t^s = (1-\gamma)(1-\tau)w_t^s,\ s_t^u = (1-\gamma)w_t^u. \tag{2.12}$$

熟練労働者の貯蓄は非熟練労働者より大きい ($s_t^s > s_t^u$). [7]

続いて，賃金に関する裁定条件について述べる．事前の段階で同質的な各個人は，自分の意志で自由に，熟練・非熟練労働者のどちらになるかを選択するため，両タイプの労働者が共存する均衡において，熟練・非熟練労働者のどちらを選んでも無差別となるはずである．すなわち，両労働者の効用は等しくなるはずである．熟練労働者と非熟練労働者の間接効用が等しいという裁定条件から，両労働者の賃金について次の裁定条件を得る．

$$u_t^s = u_t^u \ \Leftrightarrow\ \frac{w_t^u}{w_t^s} = (1-\tau)^{\frac{1}{1-\gamma}} < 1. \tag{2.13}$$

$1-\tau < 1$ と $1-\gamma < 1$ が成立するので，(2.13) の賃金比率 w_t^u/w_t^s は 1 より小さい．すなわち，熟練労働者の均衡賃金は非熟練労働者より高い ($w_t^u < w_t^s$)．この結果も明らかで，熟練労働者は非熟練労働者より子供の数が少ないため，効用関数 (2.7) から，労働者が熟練・非熟練労働者で無差別となるためには，老年期消費は熟練労働者の方が多くなければならない ($c_t^s > c_t^u$) からである．老年期消費 (2.8) より，熟練労働者の賃金所得が非熟練労働者の賃金所得より高いことも成り立つ ($(1-\tau-zn_t^s)w_t^s > (1-zn_t^u)w_t^u$).

2.4 熟練・非熟練労働者の賃金

2.2節では，生産関数の例として 4 つのケースを挙げた．2.3節で説明した世代重複モデルの下で，4 ケースそれぞれの生産関数を考える．生産要素市場が完全競争市場であるとして，t 期の 1 人当り資本ストックを $k_t \equiv K_t/N_t$ とおくと，4 つの生産関数それぞれのケースで熟練・非熟練労働者の賃金は，次式を満たす．

---

[7] $s_t^s = (1-\gamma)(1-\tau)w_t^s > s_t^u = (1-\gamma)w_t^u \Leftrightarrow (1-\tau)w_t^s > w_t^u = (1-\tau)^{\frac{1}{1-\gamma}} \Leftrightarrow 1 > (1-\tau)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \Leftrightarrow 1 > 1-\tau.$

1. 対称型

$$w_t^s = \frac{\partial Y_t}{\partial L_t^s} = A\frac{\alpha}{\rho}\left[\alpha + \beta\left(\frac{(1-zn_t^u)(1-\varphi_t)}{(1-\tau-zn_t^s)\varphi_t}\right)^{\rho} + (1-\alpha-\beta)\left(\frac{k_t}{(1-\tau-zn_t^s)\varphi_t}\right)^{\rho}\right]^{\frac{1-\rho}{\rho}}, \tag{2.14}$$

$$w_t^u = \frac{\partial Y_t}{\partial L_t^u} = A\frac{\beta}{\rho}\left[\beta + \alpha\left(\frac{(1-\tau-zn_t^s)\varphi_t}{(1-zn_t^u)(1-\varphi_t)}\right)^{\rho} + (1-\alpha-\beta)\left(\frac{k_t}{(1-zn_t^u)(1-\varphi_t)}\right)^{\rho}\right]^{\frac{1-\rho}{\rho}}. \tag{2.15}$$

コブ・ダグラス型生産関数の時

$$w_t^s = \frac{\partial Y_t}{\partial L_t^s} = A\alpha(1-\tau-zn_t^s)^{\alpha-1}(1-zn_t^u)^{\beta}\varphi_t^{\alpha-1}(1-\varphi_t)^{\beta}k_t^{1-\alpha-\beta}, \tag{2.16}$$

$$w_t^u = \frac{\partial Y_t}{\partial L_t^u} = A\beta(1-\tau-zn_t^s)^{\alpha}(1-zn_t^u)^{\beta-1}\varphi_t^{\alpha}(1-\varphi_t)^{\beta-1}k_t^{1-\alpha-\beta}. \tag{2.17}$$

2. 非対称型，弱分離型 1

$$w_t^s = \frac{\partial Y_t}{\partial L_t^s} = Aa(1-\alpha)\left[\frac{k_t}{(1-\tau-zn_t^s)\varphi_t}\right]^{\alpha}, \tag{2.18}$$

$$w_t^u = \frac{\partial Y_t}{\partial L_t^u} = Ab. \tag{2.19}$$

3. 非対称型，弱分離型 2

$$w_t^s = \frac{\partial Y_t}{\partial L_t^s} = Aa(1-\alpha)\left[\frac{(1-zn_t^u)(1-\varphi_t)}{(1-\tau-zn_t^s)\varphi_t}\right]^{\alpha}, \tag{2.20}$$

$$w_t^u = \frac{\partial Y_t}{\partial L_t^u} = Aa\alpha\left[\frac{(1-\tau-zn_t^s)\varphi_t}{(1-zn_t^u)(1-\varphi_t)}\right]^{1-\alpha}. \tag{2.21}$$

4. 非対称型，弱分離型 3

$$w_t^s = \frac{\partial Y_t}{\partial L_t^s} = Ab, \tag{2.22}$$

$$w_t^u = \frac{\partial Y_t}{\partial L_t^u} = Aa\alpha\left[\frac{k_t}{(1-zn_t^u)(1-\varphi_t)}\right]^{1-\alpha}. \tag{2.23}$$

2.2節で述べたように，どの生産関数が最も適切かは実証的に明らかにすべき課題である．ただし，第 1 の CES 関数は式が複雑なため，分析も若干複雑となる．また第 3 と第 4 の非対称型のケースは，実証研究の裏付けがなく非現実的とも言えるので，以下では，第 2 の非対称型のケースの生産関数，すなわち非熟練労働が他の生産要素と完全代替であり，資本と熟練労働間に補完関係があるケースに分析を絞る．

ところで，マクロ動学的な一般均衡分析を行わず，静学の部分均衡分析を行うのであれば，自動化の進展に伴って熟練・非熟練労働者の賃金にどのような影響が出るのかを見るのは，簡単である．資本量をはじめとして他の変数を一定とし，自動化の進展が均衡賃金に与える影響を比較静学すればよい．(2.14)–(2.23) で表される熟練・非熟練労働者の賃金について，自動化の進展に応じ

たパラメータの変化による比較静学を行えばよい．例えば，第 1 の対称型で CES 生産関数のケースでは，自動化の進展は β の低下で表わされる．しかしながら，熟練・非熟練労働者数 n_t^s, n_t^u と 1 人当り資本水準 k_t を一定としても，β の低下が熟練労働者の賃金 w_t^s を上昇させ，非熟練労働者の賃金 w_t^u を下落させるかは，一概には言えない．仮に，コブ・ダグラス型生産関数に簡単化したケースを考えても，β の低下が非熟練労働者の賃金 w_t^u を下落させる可能性が高そうではあるが，実際に下落するかどうかは，所与とした変数の下で β の低下が与える相対的な影響に依存する．[8] 一方，以下で分析を行う第 2 の非対称型，弱分離型 1 のケースでは，自動化の進展は，b の低下と a の上昇で表される．他の変数が一定であれば (2.18) と (2.19) より必ず，熟練労働者の賃金 w_t^s は上昇し，非熟練労働者の賃金 w_t^u は下落することが言える．すなわち，労働者間の賃金格差が拡大する．さらに，第 3 の非対称型，弱分離型 2 のケースでは，自動化の進展は a の低下と b の上昇で表される．このケースは，熟練・非熟練労働が補完関係にあり，他の変数が一定であれば (2.20) と (2.21) より，熟練・非熟練労働者の賃金 w_t^s と w_t^u は共に下落することが言える．賃金格差が拡大するかどうかはわからない．最後に，第 4 の非対称型，弱分離型 3 のケースでは，自動化の進展は α の低下で表される．このケースは，資本と非熟練労働が補完関係にあり実証的に支持されないケースであるが，他の変数が一定であれば (2.22) と (2.23) より，熟練労働者の賃金 w_t^s には全く影響しない一方で，非熟練労働者の賃金 w_t^u は下落する可能性が高いことが言える．[9]

しかしながら，今述べた比較静学は，1 人当り資本量 k_t や熟練・非熟練労働者数 $n_t^i, i = \{s, u\}$ を一定とした分析である．実際には，資本蓄積を通じて k_t や n_t^i は変化するので，動学的な影響を考えて，自動化の進展が賃金に与える影響を考察する必要がある．次節では，世代重複モデルのマクロ動学に従って定常状態を分析し，自動化が資本蓄積に与える影響を考察する．

3 定常状態分析

本節では，Kimura and Yasui (2007) の分析結果を提示して，資本 k_t の動学方程式と定常状態均衡の導出過程を示す．[10]

[8] (2.17) において，β の低下は非熟練労働の限界生産性を低下させるので，w_t^u を下落させる可能性がある．しかし，$1 - zn_t^u < 1$ と $1 - \varphi_t < 1$ が成立するので，$(1 - zn_t^u)^{\beta - 1}$ と $(1 - \varphi_t)^{\beta - 1}$ は，β の低下と共に増加する．言い換えれば，β の低下は，非熟練労働者が供給する労働力や非熟練労働者の比率を通じて，賃金に正の影響をもたらす．さらに $k_t > 1$ であれば，$k_t^{1-\alpha-\beta}$ も β の低下と共に増加する．資本量が一定であっても β の低下は 1 人当り資本が賃金に与える影響を高める．従って，β の低下が w_t^u を下落させるかどうかについては，一概に言えない．

[9] ただしこちらも，脚注8と同様に，α の低下が w_t^u を下落させるかどうかについては，一概に言えない．(2.23) からわかるように，α の低下は 1 人当り資本が賃金に与える影響を高める可能性がある．

[10] 定常状態分析とは別に，移行動学 (transitional dynamics) も分析する必要があるが，本論文では省略する．今後の分析課題である．

3.1　定常状態均衡の導出

以下では，元となる論文と同様に，非対称型，弱分離型 1 の生産関数の下で，資本の動学方程式を導出する．

はじめに，出生率 m_t を 1 人当り資本 k_t の関数として導出する．熟練・非熟練労働者の賃金の裁定条件 (2.13) に，(2.18) と (2.19) で導出した熟練・非熟練労働者の均衡賃金 w_t^s と w_t^u，また (2.10) で求めた熟練労働者の子供の数 n_t^s を代入して，次式を得る．

$$\varphi_t = \varphi(k_t) = \frac{(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}(1-\tau)^{\frac{1}{\alpha(1-\gamma)}-1}}{1-\gamma}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{\alpha}} k_t \equiv \theta k_t,$$
$$\theta \equiv B\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{\alpha}},\ B \equiv \frac{(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}(1-\tau)^{\frac{1}{\alpha(1-\gamma)}-1}}{1-\gamma}. \tag{3.1}$$

ここで θ は，パラメータ $a, b, \alpha, \gamma, \tau$ に依存する一定の定数である．従って $\varphi(k_t)$ は，全労働者に対する熟練労働者の比率が，1 人当り資本 k_t に比例することを意味する．

ただし，この比率 $\varphi(k_t)$ は 1 を超えることはできない．このため，$\varphi(k_t) = 1$ を満たす k_t の値を $\bar{k}$ と定義する．すなわち $\bar{k} \equiv \theta^{-1}$ である．もし，1 人当り資本が $\bar{k}$ 以上 $(k_t \geq \bar{k})$ となるならば，全ての個人は熟練労働者になることを選ぶ．従って，全労働者に対する熟練労働者の比率 φ は次式を満たす．

$$\varphi_t = \varphi(k_t) = \begin{cases} \theta k_t & \text{if } k_t < \bar{k}, \\ 1 & \text{if } k_t \geq \bar{k}. \end{cases} \tag{3.2}$$

(3.2) より，熟練労働者の比率 $\varphi(k_t)$ は 1 人当り資本 k_t の非減少関数で，特に $k_t \in [0, \bar{k})$ において厳密な増加関数となる．このことは，1 人当り資本量，または 1 人当り生産量と教育水準との間には正の相関関係があることを示唆する．

(2.11) で定義した出生率 m_t は，熟練労働者の比率 φ_t が決まれば一意に決まる．(2.11) に (3.2) を代入して，次式を得る．

$$m(k_t) = \begin{cases} (1-\tau\theta k_t)\dfrac{\gamma}{z} & \text{if } k_t < \bar{k}, \\ (1-\tau)\dfrac{\gamma}{z} & \text{if } k_t \geq \bar{k}. \end{cases} \tag{3.3}$$

出生率 m_t は 1 人当り資本 k_t の関数で，資本が $\bar{k}$ を下回る時，1 人当り資本または 1 人当り生産量と出生率の間には厳密に負の関係がある．

次に，1 人当り資本 k_t の動学方程式を導出する．$t+1$ 期の総資本ストックは t 期の総貯蓄量に等しいので，以下の資本市場均衡式を考える．

$$K_{t+1} = \left[\varphi_t s_t^s + (1-\varphi_t)s_t^u\right]N_t = \left[\varphi_t(1-\tau)w_t^s + (1-\varphi_t)w_t^u\right](1-\gamma)N_t. \tag{3.4}$$

ここで (3.4) の貯蓄 s_t^i には，(2.12) を代入している．人口成長率と 1 人当り資本の定義より，$N_{t+1} = m_t N_t$ と $k_{t+1} \equiv K_{t+1}/N_{t+1}$ を，(3.4) に代入して次式を得る．

$$k_{t+1} = z\frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{\varphi_t(1-\tau)w_t^s + (1-\varphi_t)w_t^u}{1-\tau\varphi_t}. \tag{3.5}$$

さらに，(2.18) と (2.19) で導出した均衡賃金率 w_t^s と w_t^u を (3.5) に代入し，(3.2) より熟練労働者の比率 $\varphi(k_t)$ を代入すると，次式を得る．

$$k_{t+1} = \Phi(k_t) \equiv Az\frac{1-\gamma}{\gamma} \times \begin{cases} \frac{a(1-\alpha)(1-\gamma)^{-\alpha}(1-\tau)^{1-\alpha}\theta^{1-\alpha}k_t + b(1-\theta k_t)}{1-\tau\theta k_t} & \text{if } k_t < \bar{k}, \\ \frac{a(1-\alpha)k_t^\alpha}{(1-\gamma)^\alpha(1-\tau)^\alpha} & \text{if } k_t \geq \bar{k}. \end{cases} \tag{3.6}$$

(3.6) は，1 人当り資本 $\{k_t\}_{t=0}^\infty$ の動学均衡の流列を決定する．初期資本水準 k_0 は外生的に与えられるとする．

(3.6) の $\Phi(k_t)$ を k_t で 1 階微分して，次式を得る．

$$\Phi'(k_t) = Az\frac{1-\gamma}{\gamma} \times \begin{cases} \frac{b(1-\tau)\theta[(1-\tau)^{-\frac{1}{1-\gamma}}-1]}{(1-\tau\theta k_t)^2} > 0 & \text{if } k_t < \bar{k}, \\ \frac{a\alpha(1-\alpha)k_t^{\alpha-1}}{(1-\gamma)^\alpha(1-\tau)^\alpha} > 0 & \text{if } k_t \geq \bar{k}. \end{cases} \tag{3.7}$$

(3.6) と (3.7) より次式を得る．

$$\Phi(0) = Az\frac{1-\gamma}{\gamma}b > 0, \quad \lim_{k_t \to +\infty} \Phi'(k_t) = 0. \tag{3.8}$$

(3.7) より 2 階微分は，次式を満たす．

$$\Phi''(k_t) = Az\frac{1-\gamma}{\gamma} \times \begin{cases} \frac{2b\tau(1-\tau)\theta^2[(1-\tau)^{-\frac{1}{1-\gamma}}-1]}{(1-\tau\theta k_t)^3} > 0 & \text{if } k_t < \bar{k}, \\ -\frac{a\alpha(1-\alpha)^2k_t^{\alpha-2}}{(1-\gamma)^\alpha(1-\tau)^\alpha} < 0 & \text{if } k_t \geq \bar{k}. \end{cases} \tag{3.9}$$

(3.7), (3.8), (3.9) から，1 人当り資本の閾値 $\bar{k}$ に応じて，$\Phi(k_t)$ は次のように解釈できる．はじめに，$k_t < \bar{k}$ が成立する時，(3.2) より k_t が増加するにつれて熟練労働者の比率も増加する．(2.12) より，熟練労働者の貯蓄は非熟練労働者より大きい ($s_t^s > s_t^u$)．一方で (2.10) より，熟練労働者の子供の数は非熟練労働者より小さい ($n_t^s < n_t^u$)．これらのことから，1 人当り資本 k_t の蓄積は，熟練労働者への職業選択の変化に伴い加速する．またこの時，$\Phi(k_t)$ は厳密に凸関数である．

次に，$k_t \geq \bar{k}$ が成立する時，全ての個人が熟練労働者となり，非熟練労働者は存在しない．この時，生産は通常の 2 生産要素のコブ・ダグラス型生産関数に従う ($Y_t = AaK_t^\alpha(L_t^s)^{1-\alpha}$)．出生率 $m_t = \varphi_t n_t^s + (1-\varphi_t)n_t^u = n_t^s$ は変化せず一定となる．従って，この状況で 1 人当り資本 k_t の動学的振る舞いは，Diamond (1965) の古典的な世代重複モデルと同じである．$\Phi(k_t)$ は，厳密に凹関数である．

(3.6) の k_t の動学方程式を踏まえて，定常状態均衡を導出する．定常状態均衡は 1 人当り資本が

一定水準 k^* となる状態，すなわち $k^* = \Phi(k^*)$ である．(3.2) と (3.3) より，定常状態の k^* の下で，熟練労働者の比率 φ^* と出生率 m^* も一意に決定する．

まず，定常状態均衡の存在についてだが，(3.8) より $\Phi(0) > 0$ かつ $\lim_{k_t \to +\infty}\Phi'(k_t) = 0$ が成立する．このことは，k_t が 0 に近いところでは $\Phi(k_t) > k_t$ が成立し，k_t が大きくなるにつれて $\Phi(k_t) < k_t$ が成立することを意味する．従って，必ず定常状態均衡は存在する．しかし，定常状態均衡が一意であるとは限らない．Kimura and Yasui (2007) は，均衡が一意になるとは限らず，最大で 2 つの安定的定常状態が存在し得ることを，図を用いて明らかにした．以下では，Kimura and Yasui (2007) の結論の概要を，本論文では数値計算例を用いて図示する．[11]

数値計算のパラメータを，以下の数値に特定する．熟練労働と資本の要素生産性パラメータを $a = 1$，非熟練労働の個別要素生産性パラメータを $b = 0.1$ とおく．[12] 資本と熟練労働の要素分配率を $\alpha = 0.33$，個人の選好に占める子供の数のウエイトを $\gamma = 0.6$，高等教育を獲得するに必要な時間比率を $\tau = 0.6$，子供 1 人を養育するのに必要な時間比率を $z = 0.2$ とおく．[13] この時，(3.1) で定義したパラメータ θ は，おおよそ $\theta \approx 1.925$ の値を取る．(3.2) で定義した，熟練労働者の比率が 1 となる 1 人当り資本の閾値は，$\bar{k} \equiv \theta^{-1} \approx 0.51948$ となる．

全要素生産性 A のみを変化させる時，k_t の動学方程式 (3.6) は近似的に次式を満たす．

$$k_{t+1} = \Phi(k_t) \approx 0.13333 \times A \times \begin{cases} \frac{0.1+0.56843k_t}{1-1.155k_t} & \text{if } k_t < \bar{k} \approx 0.51948, \\ 1.2266k_t^{0.33} & \text{if } k_t \geq \bar{k} \approx 0.51948. \end{cases} \tag{3.10}$$

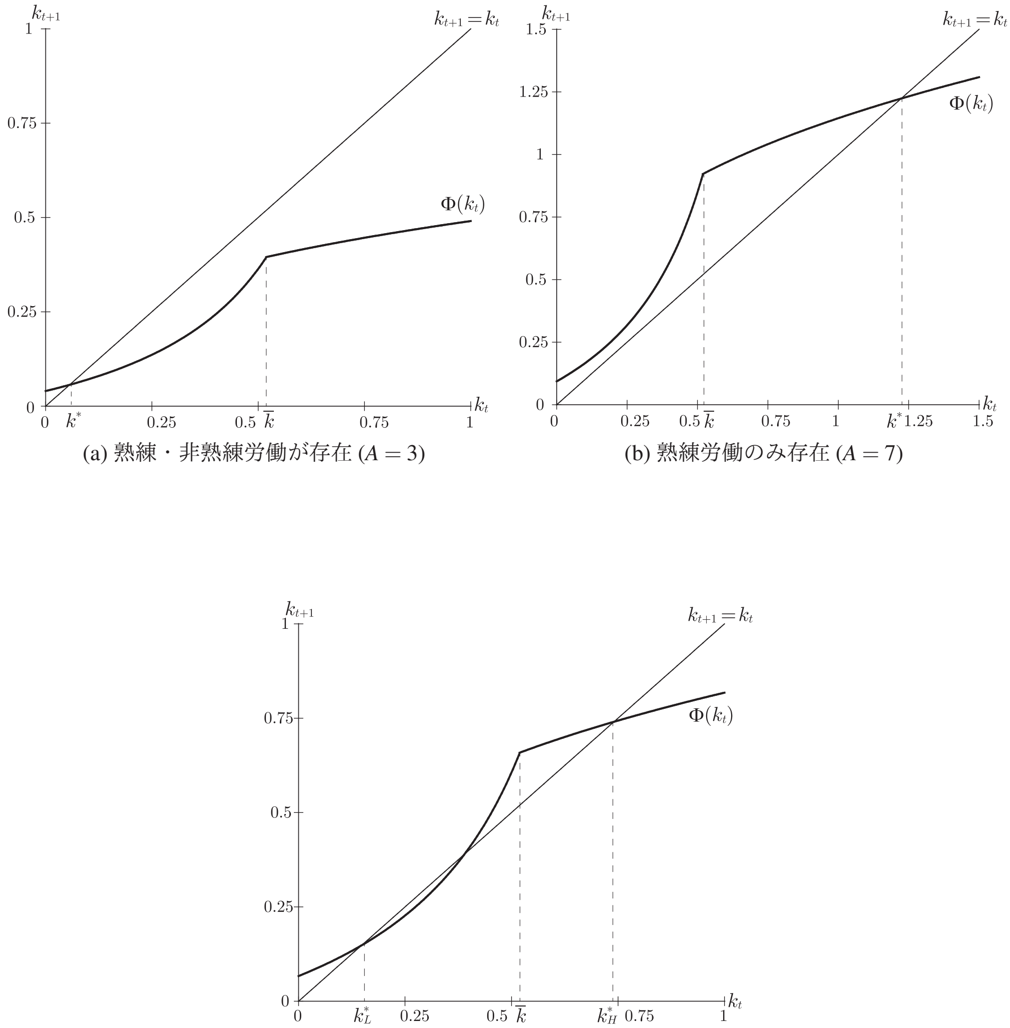
全要素生産性が $A = 3,5,7$ の数値例を考える．はじめに $A = 3$ の時は，定常状態が一意で，熟練・非熟練労働者が共存する図 1(a) のケースとなる．このケースは，図からもわかる通り $\Phi(\bar{k}) < \bar{k}$ の時に生じる．次に $A = 7$ の時は，図 1(b) のケースに対応し，定常状態が一意で全労働者が熟練労働者のみとなる．こちらのケースは，$\Phi(\bar{k}) > \bar{k}$ かつ全ての $k_t < \bar{k}$ において $\Phi(k_t) > k_t$ が成立する時に生じる．最後に，中間の値となる $A = 5$ のケースを考える．複数の定常状態均衡が存在し，2 つの安定した定常状態均衡が存在している．図 1(c) のケースに対応する．この複数均衡のケースでは，低い教育水準と高い出生率の定常状態 k_L^* と，高い教育水準と低い出生率の定常状態 k_H^* が存在し，高い資本水準の定常状態では，全ての労働者が熟練労働者となる．第三のケースは，$\Phi(\bar{k}) > \bar{k}$ かつ $\Phi(k_t) < k_t$ を満たすある $k_t < \bar{k}$ が存在する時に生じる．

第三の複数均衡が生じるケースでは，経済の初期条件により長期の定常状態均衡が決定される．複数均衡が存在するケースで良く知られているように，初期の 1 人当り資本水準が相対的に低い状態から始まる経済は，経路依存性 (path dependence) により，貧困の罠 (poverty trap) もしくは開

[11] とはいえ残念ながら，本論文で用いた数値計算例は，マクロ動学のカリブレーション (calibration) を実施するのに必要な実証的な根拠には基づいていない．実証的に適切なパラメータを用いたカリブレーションの実施は，今後の検討課題である．

[12] Kimura and Yasui (2007) のモデルでは，$a = 1, b > 0$ である．

[13] このモデルでは，熟練労働と非熟練労働の個別の要素生産性パラメータ a と b が存在するので，全要素生産性 A と a と b のいずれかを 1 に基準化しても問題がない．また，他のパラメータについては数値を若干変えても，同様の動学方程式を図示できる．



(a) 熟練・非熟練労働が存在 ($A = 3$)

(b) 熟練労働のみ存在 ($A = 7$)

(c) 複数均衡 ($A = 5$)

図 1: 1 人当り資本 k_t の動学

($a = 1$, $b = 0.1$, $\alpha = 0.33$, $\gamma = 0.6$, $\tau = 0.6$, $z = 0.2$)

発の罠 (development trap) に囚われる可能性がある．いずれにせよ，図 1(a), (b), (c) のどの動学的システムが生じるかにかかわらず，このモデルを通じて，1 人当り所得や教育水準，出生率について，動学的分析を行うことができる．例えば，定常状態に向かう動学的経路では，1 人当り所得と出生率の間に負の関係が生じる．また，平均教育水準と出生率との負の関係とも整合的である．複数均衡が生じる理由は，資本水準の閾値を超えると，熟練労働者の比率が上昇し最終的には全労働者が熟練労働者となり，経済成長が加速するからである．資本水準の閾値を超えないと，熟練・非熟練労働者が共存する均衡が持続し，経済成長率は停滞する．[14]

3.2　自動化進展の影響

それでは，自動化の進展が定常状態均衡に与える影響を分析する．定性的な性質を調べたいので，$b=1-a$ とおいてモデルを簡単化し，自動化の進展をパラメータ a の増加と解釈する．3.1節で述べたように，複数均衡が存在するか否かにかかわらず，(3.6) より 1 人当り資本 k が閾値 $\bar{k}$ 未満か以上かによって，定常状態均衡は 2 種類の異なる均衡のうちのいずれかとなる．閾値 $\bar{k}$ は次式を満たす．

$$\bar{k} \equiv \theta^{-1} = \frac{1-\gamma}{(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}(1-\tau)^{1-\frac{1}{\alpha(1-\gamma)}}}\left(\frac{1-a}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{B}\left(\frac{1-a}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$
$$B \equiv \frac{(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}(1-\tau)^{1-\frac{1}{\alpha(1-\gamma)}}}{1-\gamma}. \tag{3.11}$$

$\bar{k}$ を a で 1 階偏微分した偏微係数は，次式の通りである．

$$\frac{\partial\bar{k}}{\partial a} = -\frac{1}{a^2\alpha B}\left(\frac{1-a}{a}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} < 0. \tag{3.12}$$

閾値 $\bar{k}$ はパラメータ a の増加と共に減少する．すなわち，自動化の進展により $\bar{k}$ が低下し，全ての個人が熟練労働者になる均衡が成立し易くなる．

それでは最初に，1 人当り資本が $k \geq \bar{k}$ の時の，定常状態均衡における自動化の進展について考察する．この均衡では，非熟練労働者が存在せず全ての個人が熟練労働者となる．この均衡は，自動化の進展により，資本と代替的な非熟練労働が生産要素として必要のなくなった究極的な状況であると解釈できる．しかし，この均衡は熟練・非熟練労働者が共存する状況ではないので，熟練・非熟練労働者の賃金や雇用に与える影響を分析することはできない．このため，労働格差を分析できず，分析対象としては面白くはないかもしれないが，自動化の進展の影響を以下に示す．

生産関数 $Y_t = A[aK_t^{\alpha}(L_t^s)^{1-\alpha} + (1-a)L_t^u]$ は，既に非熟練労働者が存在しない ($L_t^u = 0$) ので，$Y_t = AaK_t^{\alpha}(L_t^s)^{1-\alpha}$ と，よく見慣れた資本と熟練労働の 2 要素コブ・ダグラス型生産関数となる．パラメータ a の増加は単なる全要素生産性の増加に過ぎず，当然のことながら，自動化の進展に伴い

[14] Kimura and Yasui (2007) では，熟練・非熟練労働者間の生産技術の収穫逓増を仮定せずとも，職業構造の変化によって加速される資本蓄積が複数均衡を発生させ得る点を，新たな発見として強調している．

($a \Uparrow$) 生産性は向上し，資本蓄積は進む ($k \Uparrow$)．(3.6) より，1 人当り資本 k は次式を満たす．

$$k = Az\frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{a(1-\alpha)k^{\alpha}}{(1-\tau)^{\alpha}(1-\gamma)^{\alpha}} \Leftrightarrow k = \left(Az\frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{(1-\alpha)a}{(1-\tau)^{\alpha}(1-\gamma)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{3.13}$$

(3.13) より k が a と共に厳密に増加することは明らかである．

この均衡では，自動化の進展が資本蓄積を進め経済成長率を高める．自動化の進展が労働の限界生産性を高めるのに加えて，1 人当り資本蓄積の増加によっても，熟練労働者の賃金所得は増加する．熟練労働者の賃金 (2.18) に，全労働者に対する熟練労働者の比率 $\varphi = 1$ と，(2.10) で求めた熟練労働者の子供の数 $n^s = (1-\tau)\gamma/z$ を代入すると，定常状態における熟練労働者の賃金 w^s は次式を満たす．

$$w^s = Aa(1-\alpha)\left[\frac{k}{(1-\gamma)(1-\tau)}\right]^{\alpha}. \tag{3.14}$$

a の増加は，全要素生産性を増加させる直接効果と資本蓄積による k の増加の効果によって，熟練労働者の賃金 w^s を必ず増加させる．

続いて，1 人当り資本が相対的に小さく $k < \bar{k}$ である時の，定常状態均衡における自動化の進展を考察する．この均衡では，熟練・非熟練労働者が共存し，自動化の進展が両労働者の賃金・雇用に与える影響を分析できる．

(3.6) より，1 人当り資本は次式を満たす．

$$\begin{aligned}
k &= Az\frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{a(1-\alpha)(1-\gamma)^{-\alpha}(1-\tau)^{1-\alpha}\theta^{1-\alpha}k + (1-a)(1-\theta k)}{1-\tau\theta k} \\
&\Leftrightarrow \gamma\tau\theta k^2 + Hk + Az(1-a)(1-\gamma) = 0, \\
H &\equiv Aza(1-\alpha)(1-\gamma)^{1-\alpha}(1-\tau)^{1-\alpha}\theta^{1-\alpha} - Az(1-a)(1-\gamma)\theta - \gamma \\
&= Aza^{\frac{1}{\alpha}}(1-a)^{1-\frac{1}{\alpha}}(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}(1-\tau)^{\frac{1-\alpha}{\alpha(1-\gamma)}}\left[1-(1-\tau)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\right] - \gamma.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

(3.15) は k の 2 次方程式であり，2 つの解をそれぞれ k^- と k^+ とおくと，解は次式を満たす．

$$k^-,\, k^+ = \frac{-H \pm \sqrt{H^2 - 4Az\gamma\tau\theta(1-a)(1-\gamma)}}{2\gamma\tau\theta}. \tag{3.16}$$

実数解が存在するためには，2 次方程式の解 (3.16) の判別式が非負である，すなわち $H^2 \geq 4Az\gamma\tau\theta(1-a)(1-\gamma)$ が成立する必要がある．とはいえ，図 1(b) のように，熟練労働のみ存在する均衡だけしか存在しないケースでは，実数解は存在しない．実数解が存在し重解でない時，2 つの解を小さい方からそれぞれ，k^- と k^+ と置く ($k^- < k^+$)．図 1(c) の複数均衡のケースで示されるように，k^- は安定均衡だが k^+ は不安定均衡である．とはいえ，実数解が存在しても，安定均衡 k^- が $k \in [0,\bar{k})$ の範囲内に存在しなければ，この均衡は存在し得ない．$\bar{k}$ の定義より $k^- < \bar{k}$ が成立する一方，k^- が正であるためには，$H < 0$ の成立が必要十分条件である．

従って以下では，(3.16) で k の実数解が存在し，その解のうち安定均衡解が $k^- > 0$ を満たすと仮定して，議論を続ける．[15] 安定均衡 k^- について，自動化の進展すなわち a の増加の影響を調べる．k^- の a に関する 1 階偏微係数の導出は，式変形が複雑となるが，付録 Aの (A.7) で導出されるように，符号が負であることが確定する．

$$\frac{\partial k^-}{\partial a} = -\frac{1}{2\gamma\tau\theta}\Big[\underbrace{\frac{\partial H}{\partial a}}_{(+)} + \underbrace{\frac{H\big(V(\frac{a}{1-a})^{\frac{1}{\alpha}}\frac{1-\alpha(1+a)}{\alpha} + \frac{\gamma}{1-a}\big) + 2Az\gamma\tau\theta(1-\gamma)(1+a)}{a\sqrt{H^2 - 4Az\gamma\tau\theta(1-a)(1-\gamma)}}}_{(+)} - \underbrace{\frac{H}{a(1-a)}}_{(-)}\Big] < 0. \quad (3.17)$$

(3.17) の符号条件から結果を要約すると，以下の命題が成立する．

命題 1.
非熟練労働が他の生産要素と完全代替で，資本と熟練労働間に補完関係のある生産関数を考える．熟練・非熟練労働者が共存する場合の安定定常均衡における 1 人当り資本は，自動化の進展と共に減少する．すなわち，$\partial k^-/\partial a < 0$ が成立する．

命題 1より，自動化の進展と共に 1 人当り資本が減少し，経済成長率が低下することが言える．数値計算の例として，3.1節と同様のパラメータ，$\alpha = 0.33, \gamma = 0.6, \tau = 0.6, z = 0.2$，$A = 3,5,7$ を用いる．全要素生産性が $A = 3,5,7$ の時に，自動化のパラメータ a を 0.1 から 0.85 まで変化させた時の 1 人当り資本 k^- を計算し，a と k^- の関係を表わしたグラフと数値計算結果が，図 2及び表 1である．[16] 数値計算結果を示した図と表からも，自動化の進展が 1 人当り資本蓄積を減少させることが確認できる．言い換えれば，技術や経済の初期状態によっては，自動化の技術革新が資本蓄積を阻害する可能性がある．

---

[15] $H^2 \geq 4Az\gamma\tau\theta(1-a)(1-\gamma)$ かつ $H < 0$ を満たすのは，$H \leq -2\sqrt{Az\gamma\tau\theta(1-a)(1-\gamma)}(< 0)$ が成立する時である．

[16] $\theta = 0.0017953 \times \big(a/(1-a)\big)^{\frac{1}{0.33}}$ より，θ は a の増加関数である．$\bar{k} \equiv \theta^{-1}$ より，1 人当り資本の閾値 $\bar{k}$ は a の減少関数である．a が 0.9 に近づくと閾値 $\bar{k}$ が安定均衡の資本水準 k^- を下回り，熟練・非熟練労働者が共存する安定均衡が存在しなくなる可能性がある．このため，図 2では a の範囲を $a \in [0.1, 0.85]$ に限ったグラフを導出し，表 1では，a が 0.1 から 0.8 の時の k^- の値を導出している．

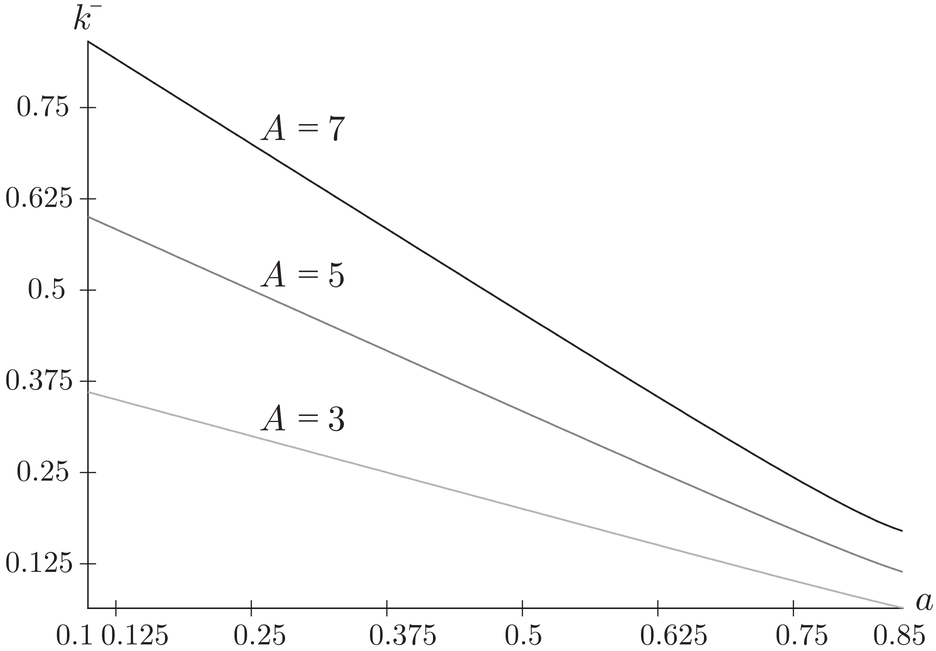


図 2: 自動化パラメータ a と安定均衡の 1 人当り資本 k^- の関係
($\alpha = 0.33$, $\gamma = 0.6$, $\tau = 0.6$, $z = 0.2$, $A = 3, 5, 7$, $a \in [0.1, 0.85]$)

a	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$A = 3$	0.360	0.320	0.280	0.240	0.200	0.161	0.121	0.083
$A = 5$	0.600	0.533	0.467	0.400	0.334	0.268	0.203	0.141
$A = 7$	0.840	0.747	0.654	0.561	0.468	0.376	0.287	0.203

表 1: $a = 0.1$ から 0.8 までの 1 人当り資本 k^- の値
($\alpha = 0.33$, $\gamma = 0.6$, $\tau = 0.6$, $z = 0.2$, $A = 3, 5, 7$, $a = \{0.1, \cdots, 0.8\}$, 小数第 4 位で四捨五入)

次に，熟練・非熟練労働者が共存する安定均衡における，全労働者に占める熟練労働者の比率 φ について検討する．(3.1) より，安定均衡における φ は次式を満たす．

$$\varphi = \theta k^{-},\ \theta \equiv B\Big(\frac{a}{1-a}\Big)^{\frac{1}{\alpha}},\ B \equiv \frac{(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}(1-\tau)^{\frac{1}{\alpha(1-\gamma)}-1}}{1-\gamma}. \tag{3.18}$$

(3.12) より，θ は a の厳密な増加関数である．すなわち，次式が成立する．

$$\frac{\partial\theta}{\partial a} = \frac{\partial(\bar{k}^{-1})}{\partial a} = -\frac{1}{\bar{k}^2}\underbrace{\frac{\partial\bar{k}}{\partial a}}_{(-)} > 0. \tag{3.19}$$

もし 1 人当り資本 k^{-} が一定であれば，a の増加は θ を増加させ，熟練労働者の比率を増加させる $(\partial\theta/\partial a > 0)$．しかしながら，命題1で示したように，(3.17) より $\partial k^{-}/\partial a < 0$ が成立するので，a の増加が φ を増加させるかどうかは，次式で示すように 2 つの効果の相対的な大小関係に依存する．

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a} = k^{-}\underbrace{\frac{\partial\theta}{\partial a}}_{(+)} + \theta\underbrace{\frac{\partial k^{-}}{\partial a}}_{(-)}. \tag{3.20}$$

(3.20) が意味することは，自動化の進展により，1 人当り資本蓄積 k^{-} が変化しなければ，第 1 項の正の効果により熟練労働者の比率は増加する方向に働く．しかしながら，1 人当り資本 k^{-} が減少し所得が減少することで，第 2 項の負の効果として，熟練労働者の比率が減少する逆方向の影響が存在する．第 1 項の正の効果と第 2 項の負の効果のどちらが大きいかは，パラメータの大きさに依存するので，自動化の進展に伴い全労働者に占める熟練労働者の比率 φ が増加するか減少するかは，不確定である．

続いて，自動化の進展に伴い，熟練・非熟練労働者の均衡賃金が上昇するか下落するかを考察する．非対称型，弱分離型 1 の生産関数の下で得られる熟練・非熟練労働者の賃金の式 (2.18) と (2.19) を用いて，均衡賃金を導出すると次式の通りである．

$$w^s = Aa(1-\alpha)\Big[\frac{\bar{k}}{(1-\gamma)(1-\tau)}\Big]^{\alpha} = \frac{A(1-\alpha)}{(1-\gamma)^{\alpha}(1-\tau)^{\alpha}}a\bar{k}^{\alpha} = A(1-a)(1-\tau)^{\frac{1}{1-\gamma}-2\alpha}, \tag{3.21}$$

$$w^u = A(1-a). \tag{3.22}$$

(3.21) の式変形では，$k/\varphi = 1/\theta = \bar{k}$ を用いている．熟練・非熟練労働者の均衡賃金を，a に関して 1 階偏微分すると次式が得られる．

$$\frac{\partial w^s}{\partial a} = \frac{A(1-\alpha)}{(1-\gamma)^{\alpha}(1-\tau)^{\alpha}}\Big(\bar{k}^{\alpha} + a\alpha\bar{k}^{\alpha-1}\frac{\partial\bar{k}}{\partial a}\Big) = -A(1-\tau)^{\frac{1}{1-\gamma}-2\alpha} < 0, \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial w^u}{\partial a} = -A < 0. \tag{3.24}$$

(3.23) と (3.24) より，以下の命題が成立する．

命題 2.
非熟練労働が他の生産要素と完全代替で，資本と熟練労働間に補完関係のある生産関数を考える．熟練・非熟練労働者が共存する場合の安定定常均衡における熟練・非熟練労働者の均衡賃金は，自動化の進展と共に減少する．すなわち，$\partial w^s/\partial a<0$ かつ $\partial w^u/\partial a<0$ が成立する．

命題2より，熟練・非熟練労働者の均衡賃金が共に下落するため，両労働者間で賃金格差が拡大するか縮小するかについては，パラメータの大きさに依存する．a の増加に伴う自動化の進展は，非熟練労働者の労働生産性を下落させるので，(3.24) に示されるように，非熟練労働者の賃金 w^u は必ず下落する．一方，自動化の進展は熟練労働者の賃金 w^s に 2 つの相反する効果を与える．第一の効果は，自動化の進展に伴い労働生産性が向上することによる正の直接効果である．第二の効果は，1 人当り資本が減少することにより労働生産性が低下する負の間接効果である．(3.23) の第一式右辺の括弧内の第 1 項が正の直接効果を表わし，第 2 項が負の間接効果を表す．a の増加は，1 人当り資本 k^- を減少させ，資本と補完的な熟練労働者の生産性を低下させるので，熟練・非熟練労働者が共存する安定均衡が存在するのに必要な 1 人当り資本の閾値 $\bar{k}$ を減少させる．閾値の減少は，熟練・非熟練労働者が共存する安定均衡の生産性が低下することを，実質的に意味する．従って，第二の効果は，熟練労働者の均衡賃金を下落させる方向に働く．(3.23) の計算結果から，第一の効果と第二の効果とでは，第二の負の間接効果の方が大きいことが言える．結果として，熟練労働者の賃金 w^s は，自動化の進展と共に必ず下落する．従って，自動化の進展が熟練・非熟練労働者の賃金格差を拡大するかどうかについては，パラメータの相対的な大小関係に依存する．

最後に，自動化の進展に伴い熟練・非熟練労働者の賃金格差が拡大するか否かを計算すると，次式が成立する．

$$-\frac{\partial w^s}{\partial a} \gtreqless -\frac{\partial w^u}{\partial a} \Leftrightarrow (1-\tau)^{1-2\alpha(1-\gamma)} \lesseqgtr 1. \tag{3.25}$$

(3.25) は，a の増加に対して，熟練労働者の賃金下落幅が非熟練労働者の賃金下落幅を上回るか否かが，パラメータ α と γ に依存することを示している．より詳しく述べると，$\tau<1$ であることから (3.25) より，$(1-\tau)$ の乗数 $1-2\alpha(1-\gamma)$ が正（負）ならば，熟練労働者の賃金下落幅が非熟練労働者の賃金下落幅を上回る（下回る）．要約すると，次式の関係が成立する．

$$\text{If } \alpha(1-\gamma) \lesseqgtr \frac{1}{2},\ -\frac{\partial w^s}{\partial a} \gtreqless -\frac{\partial w^u}{\partial a}. \tag{3.26}$$

(3.26) より次の命題が得られる．

命題 3.
非熟練労働が他の生産要素と完全代替で，資本と熟練労働間に補完関係のある生産関数を考える．熟練・非熟練労働者が共存する場合の安定定常均衡において，α が小さく γ が大きい時に，熟練・非熟練労働者の賃金格差は，縮小する可能性がある．具体的に，$\alpha(1-\gamma) < 1/2$ が成立する時，熟練・非熟練労働者の賃金格差は縮小する．

命題3において，α は生産関数のパラメータで，資本と熟練労働に補完関係がある時の資本分配率である．α が小さいほど，補完的な熟練労働が資本に比べて生産に寄与する割合が高い．このため 1 人当り資本の減少の影響を受けやすい．γ は効用関数のパラメータで，個人の選好に占める個人の消費に対する子供の数の相対的ウエイトである．γ が大きいほど子育てを重視し，子供の数は増加するが，将来貯蓄に回すお金が減り，1 人当り資本蓄積が減少する負の影響が大きい．命題3では熟練・非熟練労働者の賃金格差は，縮小することが起こり得る点を示したが，注意点としては，命題 2で示したように，自動化によって熟練・非熟練労働者の賃金自体はどちらも下落することを指摘しておく．労働者間の賃金格差縮小自体は，所得分配上重要な課題ではある．しかしながら，両労働者が共存する安定均衡では自動化に伴い熟練・非熟練労働者の賃金がどちらも下落する．従って，たとえ賃金格差自体が縮小するとしても，自動化の進展は両労働者にとってパレート効率性の観点から望ましいとは言えない．

4　結論と今後の課題

本論文は，昨今の AI の普及に代表される自動化の進展が，資本蓄積や熟練・非熟練労働者の雇用及び賃金に与える影響について，簡単なモデルを用いた分析を行った．特に Zeira (1998) による自動化の簡潔な定式化に焦点をあて，資本，熟練・非熟練労働という 3 つの生産要素に依存する生産関数を考察し，自動化の進展が資本蓄積を通じて経済成長に与えるインパクトや，熟練・非熟練労働者の雇用や賃金に与える影響について分析を行った．

本論文では，非熟練労働が他の生産要素と完全代替で，資本と熟練労働間に補完関係のある生産関数を考えて，主に次の結論を得た．第一に，自動化の進展により，資本蓄積が増加し経済成長が促進されるかどうかは，パラメータに依存することを明らかにした．言い換えれば，自動化が経済成長を常に促進させるとは限らない．具体的に命題 1では，熟練・非熟練労働者が共存する場合の安定定常均衡における 1 人当り資本は，自動化の進展と共に減少することを示した．第二に，資本と熟練労働が補完的生産要素の時，熟練労働者の賃金は資本水準にも依存し，自動化の進展が熟練労働者の賃金を増加させるとは必ずしも言えない．命題 2では，安定定常均衡における熟練・非熟練労働者の賃金はどちらも，自動化の進展と共に下落することを示した．第三に命題

3では，安定定常均衡において，熟練・非熟練労働者の賃金格差が拡大するかどうかは，生産関数と効用関数のパラメータに依存することを示した．場合によっては，熟練・非熟練労働者の賃金格差が縮小する可能性を指摘した．

本論文を終えるにあたり，今回分析できなかった研究課題と将来に向けた研究の拡張可能性について述べる．最初に挙げるべき注意点として，本論文のモデル分析はあくまで，自動化が経済に与える影響を分析するための分析枠組みの一つを提示するに過ぎないというものである．いくつかの点で今後，分析の拡張やモデルの精緻化が必要である．第一に，本論文では定常均衡のみに議論を限定した．自動化の進展をパラメータの変化とみなして分析する際に，変化前後でどのような違いが生じるのかについて，移行過程 (transition process) を含めた動学的分析が当然必要である．実際に本論文では，熟練・非熟練労働者が共存する安定均衡の他，熟練労働者しか存在しない均衡という，複数均衡が生じる可能性のあるモデルを検討した．従って，初期条件やパラメータの値に依存して，どの定常状態に収束するのかについて移行過程の分析を進めることは今後の重要課題である．第二に，生産関数の形状について一般化を考える必要がある．本論文のモデルでは，非熟練労働が他の生産要素と完全代替で，資本と熟練労働間に補完関係のある生産関数に限定して議論を進めた．どのような生産関数を前提として議論を進めるべきかは，実証分析の結果に依存する．しかし，生産関数の形状に応じて自動化の影響が異なる可能性は十分想定される．今後の拡張として，異なる生産関数の形状に応じて，自動化の進展が資本蓄積や熟練・非熟練労働者の雇用と賃金に，どのような異なる影響をもたらすのか分析する必要がある．第三に，第1節でも説明したように，AI の普及を自動化の進展と単純に同一視できるとは限らない．Acemoglu and Restrepo (2018) は，技術革新を内生的に生み出すモデルを提示した．技術革新により生まれた新技術が，既存の仕事で労働を不必要とする一方，労働を必要とする新たな仕事が生み出されるモデルを構築し，経済成長率や労働分配率，雇用への影響を分析している．分析が複雑にはなるものの，新たな仕事が創出されるモデルへの拡張は喫緊の分析課題と言える．この他にモデルの微調整を必要とする点もある．例えば，本論文のモデルは，親世代が子世代に教育を施し技能形成するといった，世代間投資による熟練技能形成を扱っていない．多くの世代重複モデルでは，技能形成を世代間教育投資の側面から扱っている．技能形成に世代間関係を導入するモデル化は，将来的な拡張として検討の余地がある．

謝辞

本論文を作成するにあたり，2023 年 8 月 10 日（木），11 日（金）の 2 日間，早稲田大学政治経済学術院で開催された研究会にて，金子 昭彦先生（早稲田大学政治経済学術院），柳原 光芳先生（名古屋大学経済学研究科），篠崎 剛先生（東北学院大学経済学部），加藤 秀弥先生（龍谷大学経済学部）から，大変有益なコメント及びアドバイスを頂いた．ここに記して感謝の意を表する．本研究は，JSPS 科研費基盤研究 (C) No.20K01629 及び No.23K01439 からの研究助成を受けている．本論文に有り得べき誤謬は全て筆者に帰する．

付録

A　安定均衡における1人当り資本 k^- の a に関する1階偏微分の導出

初めに，安定均衡の k^- が正の実数解として存在すると仮定する．k^- を再掲すると，

$$k^- = \frac{-H-\sqrt{H^2-4Az\gamma\tau\theta(1-a)(1-\gamma)}}{2\gamma\tau\theta}. \tag{A.1}$$

ここで，(3.15) と (3.1) より H と θ はそれぞれ，a の関数として次式を満たす．

$$H \equiv Az(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}(1-\tau)^{\frac{1-\alpha}{\alpha(1-\gamma)}}[1-(1-\tau)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}]a^{\frac{1}{\alpha}}(1-a)^{1-\frac{1}{\alpha}}-\gamma = Va^{\frac{1}{\alpha}}(1-a)^{1-\frac{1}{\alpha}}-\gamma, \tag{A.2}$$

$$V \equiv Az(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}(1-\tau)^{\frac{1-\alpha}{\alpha(1-\gamma)}}[1-(1-\tau)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}],$$

$$\theta \equiv \frac{(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}(1-\tau)^{\frac{1}{\alpha(1-\gamma)}-1}}{1-\gamma}\left(\frac{a}{1-a}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = B\left(\frac{a}{1-a}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{A.3}$$

$$B \equiv \frac{(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}(1-\tau)^{\frac{1}{\alpha(1-\gamma)}-1}}{1-\gamma}.$$

ここで正の実数解を満たすために，$H \leq -2\sqrt{Az\gamma\tau\theta(1-a)(1-\gamma)}(<0)$ を仮定する．H と θ の a に関する1階偏微分は次式を満たす．

$$\frac{\partial H}{\partial a} = V\left(\frac{a}{1-a}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\frac{1-\alpha a}{\alpha a} > 0, \tag{A.4}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial a} = B\left(\frac{a}{1-a}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\frac{1}{a(1-a)} = \frac{\theta}{a(1-a)} > 0. \tag{A.5}$$

k^- の a に関する1階偏微分を計算すると，次式の通り．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial k^-}{\partial a} &= \frac{1}{2\gamma\tau\theta^2}\Big[-\Big(\frac{\partial H}{\partial a}+\frac{2H\frac{\partial H}{\partial a}-4Az\gamma\tau(1-\gamma)[\frac{\partial\theta}{\partial a}(1-a)-\theta]}{2\sqrt{H^2-4Az\gamma\tau\theta(1-a)(1-\gamma)}}\Big)\theta+\Big(H+\sqrt{H^2-4Az\gamma\tau\theta(1-a)(1-\gamma)}\Big)\frac{\partial\theta}{\partial a}\Big] \\
&= \frac{1}{2\gamma\tau\theta}\Big[-\frac{\partial H}{\partial a}-\frac{H\frac{\partial H}{\partial a}-2Az\gamma\tau(1-\gamma)\frac{\theta(1-a)}{a}}{\sqrt{H^2-4Az\gamma\tau\theta(1-a)(1-\gamma)}}+\frac{H+\sqrt{H^2-4Az\gamma\tau\theta(1-a)(1-\gamma)}}{a(1-a)}\Big] \qquad \text{(A.6)} \\
&= -\frac{1}{2\gamma\tau\theta}\Big[\underbrace{\frac{\partial H}{\partial a}}_{(+)}+\underbrace{\frac{H\Big(V(\frac{a}{1-a})^{\frac{1}{\alpha}}\frac{1-\alpha(1+a)}{\alpha}+\frac{\gamma}{1-a}\Big)+2Az\gamma\tau\theta(1-\gamma)(1+a)}{a\sqrt{H^2-4Az\gamma\tau\theta(1-a)(1-\gamma)}}}_{(+)}-\underbrace{\frac{H}{a(1-a)}}_{(-)}\Big] < 0. \qquad \text{(A.7)}
\end{aligned}$$

(A.6) の式変形では，(A.3) と (A.5) を用いた．(A.7) の式変形では，(A.2) を用いた．(A.7) より，$\partial k^-/\partial a < 0$ が必ず成立する．

参考文献

[1] 濱田弘潤 (2021) 「AI が経済成長に与える影響：モデル化とシンギュラリティに関する概説」,『新潟大学経済論集』, 111(2021-I): 1–20.

[2] 濱田弘潤 (2022) 「熟練・非熟練労働者の移民と経済成長に関する一考察」,『新潟大学経済論集』, 114(2022-II): 15–37.

[3] Acemoglu, Daron, and Autor, David (2011) Skills, Tasks and Technologies: Implications for Employment and Earnings, In Ashenfelter, Orley, and Card, David (eds), *Handbook of Labor Economics*, Elsevier, Amsterdam, Vol. 4, Ch. 12, 1043–1171.

[4] Acemoglu, Daron, and Restrepo, Pascual (2018) The Race Between Man and Machine: Implications of Technology for Growth, Factor Shares, and Employment, *American Economic Review*, 108(6): 1488–1542.

[5] Aghion, Philippe, Jones, Benjamin F., and Jones, Charles I (2017) Artificial Intelligence and Economic Growth, *National Bureau of Economic Research*, 23928: 1–56.

[6] Diamond, Peter A. (1965) National Debt in a Neoclassical Growth Model, *American Economic Review*, 55(5): 1126–1150.

[7] Galor, Oded, and Moav, Omer (2000) Ability-biased Technological Transition, Wage Inequality, and Economic Growth, *Quarterly Journal of Economics*, 115(2): 469–497.

[8] Galor, Oded, and Weil, David N. (1996) The Gender Gap, Fertility, and Growth, *American Economic Review*, 86(3): 374–387.

[9] Jones, Charles I (2016) The Facts of Economic Growth, In Taylor, John B., and Uhlig, Harald (eds), *Handbook of Macroeconomics*, Elsevier, Amsterdam, Vol. 2, Ch. 1, 3–69.

[10] Kaldor, Nicholas (1961) Capital Accumulation and Economic Growth, In Hague D. C. (ed), *The Theory of Capital*, Palgrave Macmillan, London, 177–222.

[11] Kimura, Masako, and Yasui, Daishin (2007) Occupational Choice, Educational Attainment, and Fertility, *Economics Letters*, 94(2): 228–234.

[12] Mountford, Andrew, and Rapoport, Hillel (2011) The Brain Drain and the World Distribution of Income, *Journal of Development Economics*, 95(1): 4–17.

[13] Zeira, Joseph (1998) Workers, Machines, and Economic Growth, *Quarterly Journal of Economics*, 113(4): 1091–1117.