

博士論文の要旨及び審査結果の要旨	
氏名	中野 泰河
学位	博士（理学）
学位記番号	新大院博（理）第 484 号
学位授与の日付	令和 5 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
博士論文名	<b>Hypercircle-based local error estimation for the finite element solution of partial differential equations</b> (偏微分方程式の有限要素解に対する Hypercircle 法に基づく局所誤差評価法)
論文審査委員	主査 准教授・劉 雪峰 副査 教授・田中 環 副査 教授・山田 修司 副査 教授・渡邊 恵一 副査 准教授・蛭川 潤一 副査 准教授・應和 宏樹
<p>博士論文の要旨</p> <p>本論文は、微分方程式の境界値問題の有限要素法による近似解(有限要素解)に対して、あらかじめ指定される領域上での誤差を評価する「局所誤差評価」を提案している。特に、本研究では誤差の具体的な上界を算出する「定量的な局所誤差評価」という新しい局所誤差評価の手法について検討を行っている。</p> <p>偏微分方程式の数値解について関心のある部分領域における「局所誤差評価」は数値解析分野の重要な研究テーマのひとつとして注目されている。局所誤差評価の研究は Nitsche (1974) らによって始められ、以下の理論的な評価式が確立されている。</p> $\ \nabla(u - u_h)\ _D \leq C(h^r \ D^r u\ _{\Omega'} + \ u - u_h\ _{-p,\Omega})$ <p>しかしながら、この評価は、誤差の収束性などを示した定性的な誤差評価であるため、式中に未知の定数 <math>C</math> が使われており定量的な局所誤差評価を行うことは困難であった。菊地 (2006) と劉 (2013) の先行研究では、Hypercircle 法をベースにした有限要素解の定量的な事前誤差評価が提案された。ただし、微分方程式が定義される領域全体での誤差評価(大域的な誤差評価)であったため、局所誤差評価として利用する場合は、過大な誤差評価となる。</p> <p>本論文では、菊地 (2006) や劉 (2013) の定量的な誤差評価の発展として、Hypercircle 法を拡張して Poisson 方程式の有限要素解に対する局所誤差評価および、修正 Helmholtz 方程式の非斉次 Neumann 境界値問題への有限要素解の誤差評価を検討している。本論文の構成と主たる結果は以下のとおりである。</p> <p>第 1 章では、半導体材料の抵抗率測定法の原理について説明しており、測定法を支配する偏微分方程式の数値計算法についても紹介している。さらに、局所誤差評価がなぜ必要なのかについても言及している。</p> <p>第 2 章では、Poisson 方程式の有限要素解の局所誤差評価法について説明している。具体的には、局所領域に制限された関数(所謂カットオフ関数)を重み関数として導入し、それに対応したノルムを用いて新しい Hypercircle 式を導出し、菊地・劉らによる既存手法の組み合わせによって、以下の新しい局所誤差評価を得ている。</p> $\ \nabla u - \nabla u_h\ _D \leq \sqrt{E_1^2 + E_2^2} + 2C_0 h \ f - \pi_h f\ _{\Omega}$	

## 別記様式第 10 号の 1 (第 8 関係)

この不等式の左辺は局所誤差を表し、右辺に現れる量は近似解によって具体的に算出可能な誤差評価である。

第 3 章は Hypercircle 法に基づく誤差評価の拡張として、修正 Helmholtz 方程式の非斉次 Neumann 境界値問題の有限要素解に対する、新たな定量的な誤差評価を導いた。さらに、この誤差評価の応用として、劉 (2015) の固有値評価法の枠組みに基づき Steklov 固有値の上下界評価を与えている。

第 4 章は数値計算例を示して、提案手法の有効性を検証している。

### 審査結果の要旨

本論文は、偏微分方程式の有限要素法の誤差解析を行い、Hypercircle 法に基づく誤差評価法を検討し、従来の研究手法では扱えない「厳密解が  $H^2$  正則性を有しない場合」にも対応できる、定量的局所誤差評価を提案した。本提案手法の特徴として、非一様メッシュに対して最適な収束オーダーが得られ、偏微分方程式の解が  $H^2$  正則性を持たない場合にも適用できることが挙げられる。

これらの発表内容から本論文が新規性に富んでいることが確認できた。このような取り組みは、数理科学的に独創性、新規性、汎用性が認められ、今後のこの分野の発展に貢献が期待できる。また、申請論文の内容の一部はすでに学術論文として、応用数学分野では上位の国際 (査読付) 学術雑誌 **Journal of Computational and Applied Mathematics** に掲載されている。このことから、本学位申請論文が当該分野において評価される研究であることが確認できた。

よって、上記の内容に基づき本論文が博士 (理学) の博士論文として十分であると認定した。