研究論文

ホイヘンスの衝突論が教えてくれること

吉田雄真，樽田航太，伊藤克美 [a]
新潟大学大学院自然科学研究科数理物質科学専攻，[a] 新潟大学教育学部

「ホイヘンスの原理」で有名な 17 世紀の物理学者クリスチャン・ホイヘンスは，力学研究においてもガリレイやニュートンに引けを取らない業績を残している．その１つは２物体の弾性衝突の問題を完全に解いたことである．彼の方法は非常に論理的かつ独創的なものであり，教育的な観点でも，そして現代の物理学を深く理解するといった観点でも大変興味深い．本論文では，ホイヘンスの衝突論を紹介するとともに，物理の思考方法の理解を目的として行った授業実践について報告する．また，最後にホイヘンスの衝突論を対称性・保存則といった観点から考察した．

1　はじめに

1.1　「物理離れ」「物理嫌い」

物理を嫌う子どもたちが多いことがいくつかの研究で示されている[1]．「理科離れ」「理科嫌い」が叫ばれているが，この中でも「物理離れ」「物理嫌い」は特に深刻な問題なのかもしれない．

中学生を対象に生物と物理における好き・嫌いの要因を検討した興味深い調査があるので，ここで簡単に紹介しよう．栗山・平山は，生物と物理の好き・嫌いの要因について質問紙調査を行い，回答をいくつかの因子に分類して各因子の得点を比較した．観察・実験活動の充実や有用性の認知が「理科離れ」「理科嫌い」への対応として重要だと言われることが多いが，この調査ではそれらに加えて「思考活動」の重要性が示された．知識を使って予測したり，法則の意味を深く理解したり，考えることの楽しさ，活動そのものの楽しさである「思考活動」が重要だと主張している [3].

特に物理では「思考活動」が重要だろう．知識の丸暗記では何も面白くない．しかし，そもそも物理において何をどう思考するのかを理解している人はそう多くないように感じる．物理には大きく分けて２つの思考がある．１つ目は現象からその背後にある規則性を見つける帰納的な思考であり，２つ目は既知の規則性から具体的な現象を説明する演繹的な思考である．この２種類の思考方法を知れれば，身のまわりに潜む規則性を見つけることができたり，それらの組み合わせで様々な現象を説明できたりし，物理の面白さを感じられるはずだ．逆にこれらを知らなければ，物理は「勝手に規則を決めたり数式を羅列して何かを求めたりする得体の知れない学問」になってしまう．物理好きを増やす第一歩として，物理の思考方法を理解させることが重要だと強く思う．

[1] 中学生については，例えば [1]．高校生については，例えば [2].

1.2　物理の思考方法を理解するには

さて，物理の思考方法を理解するためには何が必要だろうか．説明を聞くだけではきっと分からない．自然界に存在する規則性を帰納的に見つけ，それらを用いて演繹的に他の現象を説明する，これを実際に経験することが一番の近道だろう．

17 世紀の物理学者クリスチャン・ホイヘンス（1629〜1695）は，実験的に確証されるわずかな規則性を用いて，幾何学的な証明を次々と行い２物体の弾性衝突を完全に説明した．このホイヘンスの方法こそ帰納と演繹を見事に使った方法であり，ホイヘンスの衝突論は物理の思考方法を理解する上でとても教育的である．

本論文では，見事な方法で完成させたホイヘンスの衝突論を紹介するとともに，物理の思考方法を理解させることを目的としてホイヘンスの衝突論をアレンジして行った授業実践の成果と課題を報告する．また，最後にホイヘンス

の衝突論を現代力学の視点から考察した．

2　ホイヘンスの衝突論

ホイヘンスの衝突論は，ホイヘンスの死後に遺稿集の中で『衝突による物体の運動について』と題して公表された．後に，オランダ科学協会が『ホイヘンス全集』を刊行し，第 16 巻に補遺として衝突論が収録されている．フランス語の文献であるが，興味のある読者のために文献リストに示しておこう [4]．ホイヘンスの衝突論を取り上げた日本語の文献として『科学の名著 第 II 期 10 ホイヘンス』[5] があり，これは『ホイヘンス全集』の一部を翻訳し，解題および非常に細かな注記を加えたものである．ただ，質量の定義やベクトルの概念がなかった当時の言葉がそのまま翻訳されているため，我々にとってはいくらか回りくどい説明に感じてしまう．そこで，この節では，ホイヘンスの衝突論の一部を現代風な表現に書き換えて分かりやすく紹介しよう．

ホイヘンスは 2 物体の弾性衝突を議論するにあたり，説明に必要な原理として，実験的に確証される 5 つ仮説を置いた[2]．以下にこれらを列挙する．

仮説 I

いったん動かされた物体は，なにものにも妨げられない限り絶えず同じ速さで直線に沿って動き続ける．（慣性の法則）

仮説 II

同じ質量[3]の 2 物体が逆向きに同じ速さで衝突すると，それぞれ衝突前と同じ速さではね返る．

仮説 III

2 つの物体が衝突するとき，たとえ両者がさらに他の等速運動に同時にしたがっていたとしても，同じ等速運動によって運ばれる人から見れば，それらの物体の運動は等速運動がない場合と変わらない．（ガリレイの相対性原理）

仮説 IV

質量の大きい物体が静止した質量の小さい物体に衝突すると，前者は後者にいくらか運動を与え，自分の運動をいくらか失う．

仮説 V

2 つの物体の衝突において，一方の物体で衝突前後の運動（質量と速さ[4]）が等しいならば，他方の物体の衝突前後の運動（質量と速さ）も等しい．

これらの仮説の特徴は，どれも成り立つことが実験によって確証されているという点である．先人やホイヘンス自身が様々な条件で実験を行い，その実験結果から帰納的に得られたのが上の 5 つの仮説である．従って，これらの仮説からは実験と矛盾しない正しい命題を導き出すことが可能であると考えられる．

ホイヘンスは，これらの仮説にユークリッドの『原論』の定理と当時知られていたいくつかの力学公理を組み合わせて，2 物体の衝突における様々な命題を証明した．『ホイヘンス全集』には I〜XIII の命題が示されているが，本稿では 2 物体の衝突後の速度を求めることにつながる命題 I と命題 II・命題 III・命題 IV・命題 VIII・命題 IX を紹介し，証明しよう．

下の図 1 は仮説と命題の関係を示したものである．矢印は依存関係を示している．証明をたどる際に参考になるだろう．

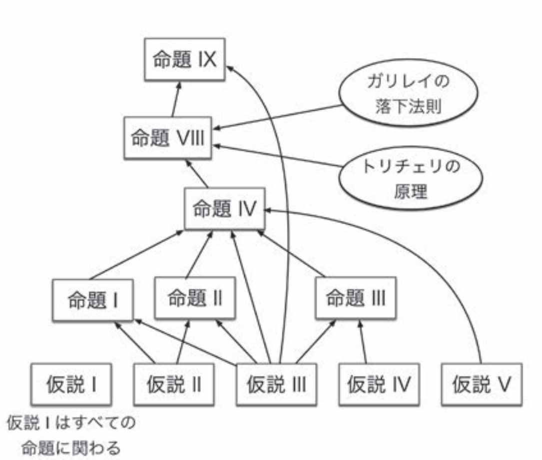

図 1: 仮説と命題の階層的関係

[2] ホイヘンスが衝突論を展開する以前に，デカルト（1596〜1650）が，「神は運動の第一原因であり，宇宙のうちにつねに同一の運動量を保存する」（『哲学原理』）といった原理をもとに 7 つの衝突規則を主張していた．しかし，この衝突規則のほとんどが実験と矛盾するものであり，ホイヘンスは，明証的原理をもとに現象を説明するデカルトの方法を批判した．

[3]「同じ大きさ」とホイヘンスは表現していたが，「同じ重さ」ということを意味している．我々が「同じ質量」と言い換えても全く問題ない．

[4] 今日の運動量は質量と速度の積であるが，ホイヘンスは質量と速さの積，つまりスカラー量として運動量を考えていた．これはデカルトがそうしていたことの影響だろう．

命題 I

> 静止している物体に質量の等しい物体が衝突するならば，衝突後，後者は静止し前者は衝突前の後者の速さで動く．

これを証明するためにちょっとした思考実験を行おう．ある観測者が等速で動く船に乗り，質量の等しい球[5]を糸で吊るして両手 A，B に持っている（最初に球のある位置を E，F とし，線分 EF の中点を G とする）（図 2[6]）．さて，

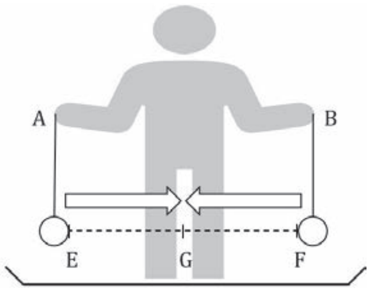

図 2: 船上での衝突実験

２つの球を点 G で等しい速さで衝突させるとしよう．２つの球に同じ大きさの初速を与え，後は手 A，B を添えておけばよい（【仮説 I】）．衝突前の２つの球の速度をそれぞれ $\overrightarrow{EG}$，$\overrightarrow{FG}$ と表すことにする[7]．すると，【仮説 II】より，２つの球はそれぞれ $\overrightarrow{GE}$，$\overrightarrow{GF}$ の速度ではね返る（【仮説 III】より，【仮説 II】は船上でも成り立つ）．

ところで，船上でこの衝突実験を行う間に，船が岸に対して速度 $\overrightarrow{GE}$ で動いていたとする．また，船は岸に非常に近い所を進んでいて船上に立つ人と岸に立つ人が手を差し出し合えるとしよう．船上の観測者を P，岸に立つ観測者を Q として，観測者 Q の両手 C，D を観測者 P の両手 A，B に添えさせる（図 3）．すると，観測者 Q が行う実験は，静止した球にもう一方の球が速度 $\overrightarrow{FE}$ で衝突する実験になる．では，観測者 Q にとって衝突後の球はどのように見えるだ

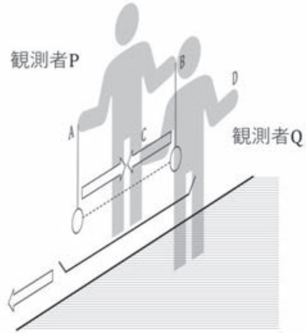

図 3: 船上での衝突実験に岸から手を添える

ろうか．観測者 P に対しては２つの球が速度 $\overrightarrow{GE}$，$\overrightarrow{GF}$ ではね返ることを既に知っているため，その速度に船の移動速度 $\overrightarrow{GE}$ を加えてやれば観測者 Q に対する衝突後の速度が計算できる．すなわち，左側の球の衝突後の速度は $\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{FE}$ となり，右の球の衝突後の速度は $\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GE}$（$= \overrightarrow{FG}$）$= \overrightarrow{0}$ となるだろう．観測者 Q が行った衝突実験を再度まとめると，「静止した球に質量の等しい球が速度 $\overrightarrow{FE}$ で衝突し，衝突後に後者は静止し前者は速度 $\overrightarrow{FE}$（衝突前の後者の速度）で動く」[8]ことになり，命題 I が示された．

命題 II

> 質量の等しい２物体が不等な速さで衝突するならば，衝突後両者は互いに交換された速さで動く．

一方の球が速度 $\overrightarrow{EH}$ で動き，質量の等しい他方の球が速度 $\overrightarrow{FH}$ で動いて衝突するとしよう（図 4）．衝突後に前者が速度 $\overrightarrow{FH}$ で動き後者が速度 $\overrightarrow{EH}$ で動くことを示したい．

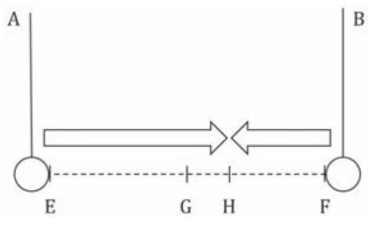

図 4: 同質量・異なる速度の球の衝突

[5]金属球のような硬い球をイメージしてほしい．この球の衝突は弾性衝突である．

[6]説明の都合上，点 E，点 F をそれぞれの球の重心からずれた位置にとっている．本来は質点の運動として議論すべき問題であり，この球の大きさは十分に小さいと思ってほしい．

[7]速度 $\overrightarrow{EG}$ とは，単位時間に位置 E から G まで一定の速さで移動したということである．以降断りなくこのように速度を表す．尚，向きを気にせずにその大きさ（つまりは速さ）を表したいときは単に EG と書く．

[8]命題は「速さ」となっているが，ここでは向きにも注意を払いながら証明を書いたため，「速度」としている．

先程と同様の思考実験を行おう．質量の等しい２つの球を船上で速度 $\overrightarrow{EG}$，$\overrightarrow{FG}$ で衝突させると，船上の観測者 P は２つの球が速度 $\overrightarrow{GE}$，$\overrightarrow{GF}$ ではね返ることを見る（【仮説 II】）．では，この間に船が速度 $\overrightarrow{GH}$ で動いていたとしよう．岸に立つ観測者 Q が両手を船上の観測者 P の両手に添えると，観測者 Q は２つの球が速度 $\overrightarrow{EH}$，$\overrightarrow{FH}$ で衝突する実験を行うことになる．観測者 Q にとって衝突後の球はどのように見えるだろうか．観測者 P に対しては２つの球が速度 $\overrightarrow{GE}$，$\overrightarrow{GF}$ ではね返ることを既に知っているため，その速度に船の移動速度 $\overrightarrow{GH}$ を加えてやれば観測者 Q に対する衝突後の速度が計算できる．すなわち，左側の球の衝突後の速度は $\overrightarrow{GE}$（$=\overrightarrow{FG}$）$+\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{FH}$ となり，右の球の衝突後の速度は $\overrightarrow{GF}$（$=\overrightarrow{EG}$）$+\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{EH}$ となるだろう．観測者 Q が行った衝突実験を再度まとめると，「質量の等しい２つの球が速度 $\overrightarrow{EH}$，$\overrightarrow{FH}$ で衝突し，衝突後に前者は速度 $\overrightarrow{FH}$，後者は速度 $\overrightarrow{EH}$ で動く」ことになり，命題 II が示された．

命題 III

質量の大きい物体は，質量の小さい物体に任意の速さで衝突されるならば，動く．

船上の観測者 P が，静止した質量の小さい球に質量の大きい球を速度 $\overrightarrow{AB}$ で衝突させたとしよう（図 5）．すると，前者は押しやられ，後者は衝突前よりも小さな速さで衝突前の進行方向に進むことになる（【仮説 IV】）．

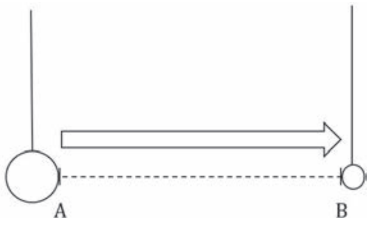

図 5: 静止した球に質量の大きい球が衝突する

この間に船が速度 $\overrightarrow{BA}$ で動いていたとしよう．岸に立つ観測者 Q が両手を船上の観測者 P の両手に添えると，観測者 Q は，速度 $\overrightarrow{BA}$ で動く質量の小さい球が，静止した質量の大きい球に衝突する実験を行うことになる．質量の大きい球が衝突後に船上の観測者 P に対して A から B の方向に速さ AB より小さな速さで動くことを既に確認したが，岸の観測者 Q にとって，これは，衝突後大きい球が B から A の方向に動くことを意味する．観測者 Q が行った衝突実験を再度まとめると，「質量の大きい静止した球に質量の小さい球が速度 $\overrightarrow{BA}$ で衝突し，衝突後に質量の大きい球が B から A の方向に動く」ことになり，命題 III が示された[9]．

命題 IV

２物体が衝突するとき，それらの相対的運動を見ると，接近するときと離れるときの速さは常に同じである．

質量の等しい物体については命題 II より明らかである．質量が異なる２物体の衝突の例として，質量の大きい静止した球に質量の小さい球が速度 $\overrightarrow{BA}$ で衝突する場合を考えてみよう（図 6）．衝突後に質量の小さい球が質量の大きい球から相対的な速さ AB で離れることを示せばよい．

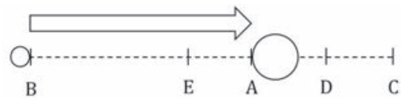

図 6: 静止した球に質量の小さい球が衝突する

質量の大きい球が衝突後にある速度を受け取ることが分かっており（【命題 III】），この速度を $\overrightarrow{AC}$ とする．また，線分 AC の中点を D，AD ＝ AE となる点 E を定めておく．さて，この衝突が岸に対して速度 $\overrightarrow{DA}$ で動く船上で起こっていたとしてみよう．船上の観測者 P と岸の観測者 Q（彼はまた観測者 P に手を添えて実験を行った）がどのような衝突を見るかを以下の表 1，表 2 にまとめた．

表 1: 船上の観測者 P が見た衝突

	質量の小さい球	質量の大きい球
衝突前	速度 $\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{0}$
衝突後		速度 $\overrightarrow{AC}$

表 2: 岸に立つ観測者 Q が見た衝突

	質量の小さい球	質量の大きい球
衝突前	速度 $\overrightarrow{BE}$	速度 $\overrightarrow{DA}$
衝突後		速度 $\overrightarrow{AD}$

[9] これはデカルトの衝突規則を完全に否定する．デカルトの第４規則は「C がまった静止しており，B よりもいくらか大きいとすると，B は C にどれほどの速さで運動しても，C を動かすことができず，C によって反対方向にはね返される」（『哲学原理』）であった．

両観測者が見た衝突で質量の小さい球の衝突後の速度を空欄にしているが，観測者 Q が見た衝突の方は【仮説 V】から得ることができる．観測者 Q が見た衝突において，質量の大きい球は衝突前後の速さが変わらないため，質量の小さい球も衝突前後で同じ速さになる（【仮説 V】）．ゆえに，観測者 Q が見た質量の小さい球の衝突後の速度は $\overrightarrow{\mathrm{EB}}$ になる[10]．よって，質量の小さい球が質量の大きい球に近づくときの相対的な速さと離れるときの相対的な速さが，いずれも速さ AB[11]になることが明らかになった．

ここまでで，図 6 の場合の衝突で命題 IV が成り立つことを示した．残りいくつかの場合があるが，先の証明を利用して一挙に示そう．まず，残りの場合を列挙しておく．

- 質量の小さい球が静止している場合
- 両者が逆向きに衝突する場合
- 質量の小さい球が質量の大きい球をより大きな速さで追いかける場合
- 質量の大きい球が質量の小さい球をより大きな速さで追いかける場合

これらの各場合を順に図でも示そう（図 7）．

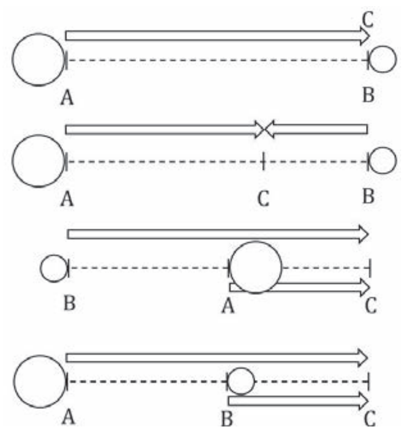

図 7: 考えるべき残りの場合

質量の大きい球の最初の位置を A，質量の小さい球の最初の位置を B とし，2 つの球が速度 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と速度 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ で衝突するとした．さて，これらの衝突が速度 $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ で動く船で起こっているとすれば，岸にいる観測者はこれらをどう見るだろうか．どの場合も，静止した質量の大きい球に質量の小さい球が速度 $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ で衝突するように見え，先の場合が現れるのである．よって，どの場合でも，質量の小さい球が質量の大きい球に近づくときの相対的な速さと離れるときの相対的な速さが AB となり，命題 IV が示された．

命題 VIII

速さが質量に反比例する 2 物体が逆向きに衝突するならば，両者はそれぞれ接近したときと同じ速さではね返る．

質量の大きい球が速度 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，質量の小さい球が速度 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ で衝突する（図 8）．いま，速さが質量に反比例する，つまり［速さ AC］:［速さ BC］＝［質量の小さい球の質量 $m_{小}$］:［質量の大きい球の質量 $m_{大}$］であるとする．このとき，質量の大きい球は速度 $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$，質量の小さい球は速度 $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ ではね返ることを証明したい．この証明は少々複雑であるが，その一部をやってみよう．

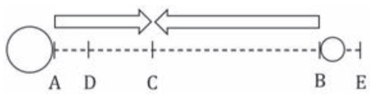

図 8: 速さが質量に反比例する 2 物体の衝突．AD=BE.

背理法で証明しよう．まず，質量 $m_{大}$ の球が C から A の向きに速さCD（<速さ CA）ではね返るとし，矛盾を示したい．

このとき，【命題 IV】を満たすのだから，質量 $m_{小}$ の球は C から B の向きに衝突前よりも大きな速さ CE ではね返ることになる．ただし，AB=DE である．

ホイヘンスは，落下距離と速さの関係[12]を持ち出してここからの証明を展開している．質量 $m_{大}$ の球がHAの高さから落下することで速さACを獲得し，質量 $m_{小}$ の球はKBの高さから落下することで速さBCを獲得するとしよう（図 9）．すると，これらの高さの比は速さの 2 乗の比に等し

[10]【仮説 V】にしたがうだけであれば，衝突後の速度が $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ になることも可能だが，質量の大きい球が進路を妨げるため，そのような衝突は起こらない．

[11]観測者 Q が見た衝突における質量の大きい球の衝突前の速度を $\overrightarrow{\mathrm{DA}} = \overrightarrow{\mathrm{AE}}$，衝突後の速度を $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{EA}}$ と書くと想像しやすいかもしれない．

[12]ガリレイ（1564〜1642）が，物体の落下距離の比が落下によって獲得する速さの 2 乗の比であることを示している [6]．このことは，「落下距離は落下時要する時間の 2 乗に比例する」（t^2 の法則）という言い方をされることも多い．

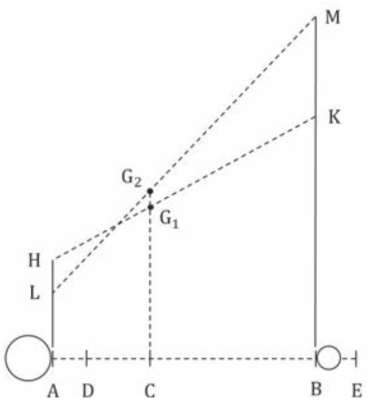

図 9: 衝突前後の速さを高さと関係づける

く，ＨＡ：ＫＢ＝ AC^2：BC^2 となる．逆に，ある速さの物体が鉛直方向に上昇するときは，上昇しうる高さの比が速さの２乗の比に等しい[13]．つまり，速さ CD，速さ CE の小球を鉛直方向に向けたときにそれぞれ高さ LA，MB まで上昇しうるとすると，LA：MB ＝ CD^2：CE^2 となる．ここまでを整理すると，「質量 $m_{大}$ の球は，高さ HA からの落下によって得た速さ AC で衝突し，質量 $m_{小}$ の球は，高さ KB からの落下によって得た速さ BC で衝突した．衝突後，質量 $m_{大}$ の球は速さ CD によって高さ LA まで上昇し，質量 $m_{小}$ の球は速さ CE によって高さ MB まで上昇した.」ということになる．

図 9 で，点 C を通り HA および KB に平行な直線と HK との交点を G_1，LM との交点を G_2 とした．実は，高さ CG_1 は質量 $m_{大}$ の球を点 H，質量 $m_{小}$ の球を点 K に置いたときの２つの球の重心の高さであり，高さ CG_2 は質量 $m_{大}$ の球を点 H，質量 $m_{小}$ の球を点 M に置いたときの２つの球の重心の高さである．これを確認しておこう．点 G_1 は線分 HK を HG_1：KG_1 に内分する点だから，

$$CG_1 = \frac{KG_1 \cdot HA + HG_1 \cdot KB}{HG_1 + KG_1}$$

である．また，HA // G_1C // KB であるから HG_1：KG_1 ＝ AC：BC であり，速さの比 AC：BC ＝ $m_{小}$：$m_{大}$ だったことも思い出すと，

$$CG_1 = \frac{m_{大} \cdot HA + m_{小} \cdot KB}{m_{大} + m_{小}} \tag{1}$$

[13]ガリレイは，ある高さから振れ始めた振り子がもとの高さまで振れるはずだと主張した [6]．これより，落下距離が獲得する速さの２乗に比例するのと同じように，上昇しうる距離が最初の速さの２乗に比例することは明らかである．もちろん両者の比例係数は同じ．

となり，これは明らかに質量 $m_{大}$ の球を点 H，質量 $m_{小}$ の球を点 K に置いたときの２つの球の重心の高さである．同様に点 G_2 についても

$$CG_2 = \frac{m_{大} \cdot LA + m_{小} \cdot MB}{m_{大} + m_{小}} \tag{2}$$

が確認できるだろう．

２つの球が落下によって速さを得て衝突し，衝突後の速さによって上昇することを考えていたが，最初に（1）の高さにあった重心が最終的に（2）の高さに移るということが分かった．さて，最初と最後の重心の高さの大小関係はどうなっているだろうか．図 9 を見る限りは $CG_1 < CG_2$ であるが，これはあり得ない．というのは，物体の重さによって行われる運動において重心の位置が上昇することはあり得ないからである[14]．よって，$CG_1 < CG_2$ を明確に示すことができれば，最初に置いた仮定の矛盾を示すことができる．

では，$CG_1 < CG_2$ を示していこう．（1）（2）から，

$$CG_2 - CG_1 = \frac{m_{大}(LA - HA) + m_{小}(MB - KB)}{m_{大} + m_{小}}$$

となるが，分母は明らかに正だから，

$$m_{大}(LA - HA) + m_{小}(MB - KB) > 0$$

が示せればよい（この左辺を G_2G_1 と書くことにする）．

いま，G_2G_1 は球の質量と高さで書かれているが，質量と速さの関係および高さと速さの関係が分かっているので，すべて速さを用いて表した形に書き直すことができる．まずは高さを速さで表し直そう．落下距離は獲得する速さの２乗に比例し，上昇しうる距離は上昇前の速さの２乗に比例することから，HA ＝ p・AC^2，LA ＝ p・CD^2，KB ＝ p・BC^2，MB ＝ p・CE^2（p は比例係数）と表せる．よって，

$$G_2G_1 = p\,\{m_{大}(CD^2 - AC^2) + m_{小}(CE^2 - BC^2)\}$$

となる．$CE^2 - BC^2$ を計算するために図 10 を見てほしい．全体の正方形の面積から左下の正方形の面積を引くといった計算式であるから，斜線部分の面積を求めればよ

[14]当時，これは力学において非常に重要な公理であり，トリチェリの原理と呼ばれていた．トリチェリの原理は「結び合わされた２個以上の物体は，それら全体の重心が可能な限り低い位置にあるのでなければ静止し得ない」，「自分の重さによって運動する物体の系の重心は高まり得ない」などと表現される．これは，天秤の両皿に物体を載せたときにどの状態が安定するかを指示するような静力学の原理だが，ホイヘンスは動力学の原理として応用した．（[5] の編集者解説で非常に細かな説明がなされている．）

く，$CE^2 - BC^2 = BE\,(CE + BC)$ となる[15]．$CD^2 - AC^2$ も同様に考えると，$CD^2 - AC^2 = -AD\,(CD + AC)$ と計算できる．

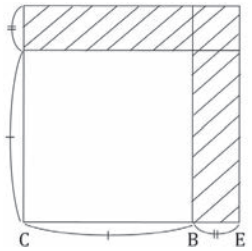

図 10: 幾何学的な計算

次に，球の質量を速さで表す．速さが質量に反比例する衝突を考えているので $m_{大} = q \cdot BC$，$m_{小} = q \cdot AC$（q は比例係数）である．さらに，【命題 IV】より $AB = DE$ であることから，$AD = BE$（$= r$ とする）．これらより，

$$\frac{G_2G_1}{p \cdot q \cdot r} = -BC\,(CD + AC) + AC\,(CE + BC)$$

となる．最後に，いま置いた仮定から得られる $CD + AC < 2AC$，$CE + BC > 2BC$ と言った関係を用いることで，

$$\frac{G_2G_1}{p \cdot q \cdot r} > -BC \cdot 2AC + AC \cdot 2BC = 0$$

となる．これでようやく，$CG_1 < CG_2$ が示され，最初に置いた仮定「質量の大きい球が C から D の向きに速さ CD（< 速さ CA）ではね返る」から矛盾が導かれたことからこの仮定は棄却された．

命題 VIII を完全に示すには，上でやったような背理法による証明を積み重ねていけばよい．ここで１つ１つの証明は省略するが，検討しなければならない残りの仮定を以下に列挙しておく．

- 質量の大きい球が C から A の向きに CA より大きい速さではね返る．
- 質量の大きい球が衝突後に静止する．
- 質量の大きい球が衝突後も衝突前と同じ向きに進む．

これらの仮定をもとに先程と同じような重心についての議論を進めると，２つの球の重心が上昇するといった不合理に陥ることを確認できる．したがって，「質量の大きい球が速度 $\overrightarrow{CA}$ ではね返る（このとき【命題 IV】より，質量の小さい球は速度 $\overrightarrow{CB}$ ではね返る）」という場合だけが残り，命題 VIII が示された．

命題 IX

２物体が真直ぐに衝突する場合において，２物体の質量と衝突前の速度が分かれば，衝突後の両者の速度が分かる．

ここでも具体的な状況を１つ挙げ，２つの球の衝突後の速度が求まることを確認する．質量の大きい球が速度 $\overrightarrow{AD}$，質量の小さい球が速度 $\overrightarrow{BD}$ で衝突するとしよう（図 11）．図 11 で，点 C は $AC : BC = m_{小} : m_{大}$ となる点であり，点 E は $EC = CD$ となる点である．先に結論を言えば，質量の大きい球は速度 $\overrightarrow{EA}$，質量の小さい球は速度 $\overrightarrow{EB}$ ではね返ることになる．これを示そう．

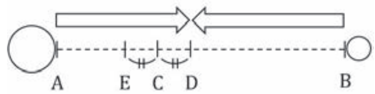

図 11: 質量が異なる２物体の任意の速度での衝突

図 11 の衝突が速度 $\overrightarrow{DC}$ で動く船上で起こっているとしよう．すると，岸に立つ観測者は，質量の大きい球が速度 $\overrightarrow{AC}$，質量の小さい球が速度 $\overrightarrow{BC}$ で衝突することを見る．この観測者が見る衝突では，２つの球がそれらの質量に反比例する速さで逆向きに衝突しているため，それらは衝突前と同じ速さではね返らなければならない（【命題 VIII】）．つまり，岸に立つ観測者にとっては質量の異なる２つの球がそれぞれ速度 $\overrightarrow{CA}$，速度 $\overrightarrow{CB}$ ではね返ることが分かった．それらは船上の観測者にどう見えるだろうか．少し考えれば，質量の大きい球が速度 $\overrightarrow{EA}$，質量の小さい球が速度 $\overrightarrow{EB}$ ではね返ることが分かるだろう[16]．ところで，船上で起こったこの衝突は岸でも起こるはずである（【仮説 III】）．したがって，我々にとっても「質量の大きい球が速度 $\overrightarrow{AD}$，質量の小さい球が速度 $\overrightarrow{BD}$ で衝突すると，それぞれ速度 $\overrightarrow{EA}$，速度 $\overrightarrow{EB}$ ではね返る」ということが示され，２つの球の質量と衝突前の速度が分かれば両者の衝突後の速度が求まることを確認できた．

---

[15] これはユークリッドの『原論』で示されている命題だった．また，因数分解を用いて計算することもできる．

[16] 自分の顔を D から C の向きに動かしながら図 11 を見れば分かりやすいだろう．

いま設定した状況以外でも（2つの球が同じ質量でも，2つの球が衝突前に同じ方向に動いていても構わない），同様の手順を踏むことで衝突後の速度を求めることができる．最後にこの手順を簡潔にまとめておこう（図 12 も参照してほしい）．

1. 2物体が速度 $\overrightarrow{AD}$，速度 $\overrightarrow{BD}$ で衝突する様子を図に書く．線分 AB を2物体の質量の逆比に内分する点を C とする．さらに EC = CD となるように点 E を定める．
2. この衝突が速度 $\overrightarrow{DC}$ で動く船で起こっているとし，岸に立つ観測者にどう見えるかを考える．【命題 VIII】が使える状況になり，衝突後の速度が分かる．
3. 船上の観測者にどう見えるかを考え，船上の衝突実験での衝突後の速度が分かる．
4. 【仮説 III】より船上での衝突実験が岸でも起こることを思い出す．

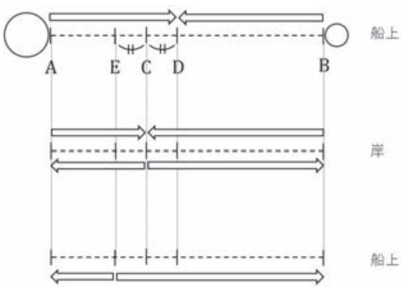

図 12: 衝突後の速度を求める手順

3　衝突論の完成を追体験する教材

ホイヘンスが示した命題はどれも正しいものであり，デカルトが正しく記述できなかった衝突規則を正しく記述したホイヘンスの業績は素晴らしいものだ.「実験によって確証される規則性をもとに様々な現象を論理的に示す」というホイヘンスのとった方法自体も我々が評価し学ぶべき点である．

この思考方法を多くの人たちに理解してもらうことを目指し，ホイヘンスの衝突論をアレンジした授業実践を教育学部の学生に対して行った[17]．この節では授業実践に使った教材（シナリオ）を紹介する．

この授業実践では「2物体の質量と衝突前の速度から衝突後の速度を求める」ことが最後の課題である．これはホイヘンスの衝突論の【命題 IX】を示すことに相当するが，ホイヘンスが置いた仮説からスタートしてこれを導出するには時間がかかる．そこで,【仮説 III】と【命題 VIII】を実験によって帰納的に示し，それを用いて演繹的に【命題 IX】を示すといった方法を採用した[18]．それぞれの過程での概要を以下で紹介しよう．

◇ ガリレイの相対性原理 — 帰納

【仮説 III】を理解する，つまりガリレイの相対性原理を見いだすために2つのことを考える[19]．

- 静止した観測者・それに対して等速で動く観測者それぞれにとって，物体の落下はどのように見えるか．
- 静止した観測者・等速で動く観測者それぞれにとって，同じ質量・同じ速さの2物体の衝突はどのように見えるか．

物体の落下については定性的に考えよう．（それぞれの観測者にとって）静止した人がボールを持ち，静かに手をはなすとする（図 13[20]）．

図 13: ワークシートの図（2人の観測者が見る落下）

それぞれの観測者はボールのどんな様子を見るだろうか．

[17] 今回の授業実践はオンラインでの実践だったため，受講者が自分の手で実験を行うことができなかった．TA が行った実験の動画と結果を示し，受講者は結果の分析と考察を行った．

[18] 【命題 IX】の証明の最後のまとめを見ればわかるように,【命題 IX】の証明のもとになっているのは【仮説 III】と【命題 VIII】である．

[19] 本来はもっと多くの事例を検討すべきであるが，時間が限られているため2つの例に絞った．1つは定性的でイメージしやすい例，もう1つは定量的に確認できる例にしている．

[20] これは授業のワークシートに載せた図である．ワークシートの図をいくつか載せるが，それらはキャプションを「ワークシートの図」としておく．

経験を思い起こせば，静止した観測者も等速で動く観測者もボールが「真下に加速しながら落ちる」様子を見ることが分かるだろう．このことから，物体の自由落下に関して，静止した観測者に対する規則性・等速で動く観測者に対する規則性は同じと言うことができる．

次に，同じ質量・同じ速さの２物体の衝突について考えよう．静止した観測者にとっての実験結果は，我々が実験室で実験を行うことで得ることができる．質量が同じ２台の力学台車[21]A，B を用意してデータロガーで各台車の速度を記録しながら衝突実験を行えばよい．表 3 に実験結果をいくつか示した．実験結果から「質量の等しい２物体が同じ速さで衝突すれば，それぞれ衝突前と同じ速さではね返る」ということが直ちに分かるだろう．

表 3: 静止した観測者の衝突実験

観測者 [m/s]	衝突前 A[m/s]	衝突前 B[m/s]	衝突後 A[m/s]	衝突後 B[m/s]
静止	右に 0.3	左に 0.3	右に 0.3	左に 0.3
静止	右に 0.4	左に 0.4	右に 0.4	左に 0.4

一方，等速で動く観測者にとっての実験結果を得るには少し工夫が必要である：一度静止系に置き換えるという工夫だ．例えば，質量の等しい２台の台車 A, B が，右に 0.1m/s で動く観測者にとって A：右に 0.3m/s，B：左に 0.3m/s で衝突する場合について考えてみよう．右に 0.1m/s で動く実験室はすぐには実現できないため実験を直接行うことはできない．ただ，この２台の台車の衝突を静止した観測者が見ると，A：右に 0.4m/s，B：左に 0.2m/s で衝突するように見えるはずであり（図 14），この実験は可能である．ならば，実験室で A：右に 0.4m/s，B：左に 0.2m/s の実験を行って静止した観測者にとっての衝突後の速度を求め，その後に右に 0.1m/s で動く観測者にとっての衝突後の速度に変換すればよいのだ．このようにして等速で動く観測者にとっての実験結果を得ることができる．表 4 に実験結果をいくつか示すが，これを見れば等速で動く観測者にとっても「質量の等しい２物体が同じ速さで衝突すれば，それぞれ衝突前と同じ速さではね返る」ということが分かるだろう．

[21]島津理化の「力学台車 スマートカート」を使った．センサが内蔵されているため実験を楽に行うことができる．しかし，台車同士を普通に衝突させると弾性衝突とのズレが大きい．そこで，マグネットバンパーを同じ極を向けて２つの台車に取り付け，接触しなくても磁力で反発するようにした．そうすることで弾性衝突を上手く再現できた．

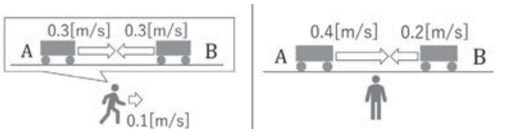

図 14: 静止系で考える

表 4: 等速で動く観測者の衝突実験

観測者 [m/s]	衝突前 A[m/s]	衝突前 B[m/s]	衝突後 A[m/s]	衝突後 B[m/s]
右に 0.1	右に 0.3	左に 0.3	右に 0.3	左に 0.3
右に 0.4	右に 0.4	左に 0.4	右に 0.4	左に 0.4

ここまでの話から，静止した観測者・等速で動く観測者どちらに対しても，「質量の等しい２物体が同じ速さで衝突すれば，それぞれ衝突前と同じ速さではね返る」ということが分かる．さらに，先に確認したように，物体の自由落下に関する規則性も静止した観測者・等速で動く観測者で同じだった．これらから（学習者は論理の飛躍を感じるかも知れないが[22]），「静止した観測者にとっての規則性と等速で動く観測者にとっての規則性は同じである」ことが示唆されるだろう．

◇ 衝突前と同じ速さではね返る条件 ── 帰納

「質量が同じ２物体に関しては，２物体が同じ速さで衝突すればそれぞれ衝突前と同じ速さではね返ることが分かった．では，質量が異なる２物体ではどうか．質量が異なる２物体がそれぞれ衝突前と同じ速さではね返る条件を見つけよう．」といった問題提起によって【命題 VIII】を実験的に示す流れをつくろう．

力学台車の質量を調整することはできないため，同じ質量の２物体の衝突のときとは別の手法を取らなければならない．そこで，実験的な立場からホイヘンス同様の衝突問題に取り組んでいたクリストファー・レン[23]（1632〜1723）が行った実験を用いることにする．

[22]この飛躍を埋める，縮めることが今後の課題である．例えば，異なる質量の弾性衝突についても両観測者に対する何らかの規則性の一致が確認できれば，弾性衝突に関しては規則性の一致を強く主張できるだろう．

[23]レンは建築家としても有名である．セント・ポール大聖堂の設計を行うなど，ロンドン大火災からの復興に尽力し英国にバロック様式の基礎を築いた．建築家の顔を持つ一方で，気鋭の学者たちが集う科学学会「ロイヤル・ソサエティ」の創立メンバーの一人でもあった [7].

レンは振り子を使って衝突実験を行ったが，この方法を理解するには先にも書いた，ガリレイが示す「高さと速さの関係」を思い出さなければならない．ガリレイが示した「高さと速さの関係」をいくつか書き並べておこう．

- ある高さからの落下である速さを得る．その速さで上方へ向かえばもとの高さまで達する．
- 落下によって得られる速さは質量に依らない．
- 落下距離は落下で得られる速さの２乗に比例する．

これらから，衝突前の速さと同じ速さではね返ったかどうか確認するには，衝突前と同じ高さまではね返ってくるかどうかを確認すればよいとすぐに分かるだろう（図15）．

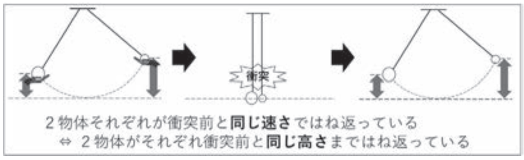

図 15: ワークシートの図（衝突前と同じ速さではね返る）

次は衝突のときの速さを知る方法を示そう．図16を見てほしい．

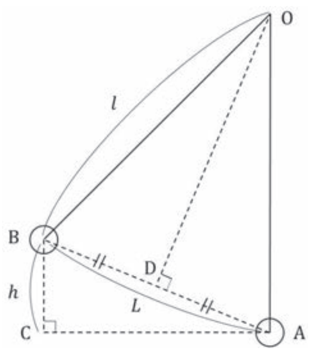

図 16: 振り子を使った衝突実験

振り子の長さを l，持ち上げた高さを h，持ち上げた位置と最下点の間の距離を L とした．ここで，△OBD と△ABC が相似だから，$l : L = L/2 : h$ であり，

$$h = \frac{L^2}{2l}$$

となる．また，点Bから振り子を振り始めたときに最下点Aで速さ $|\vec{v}|$ を得たとすると，上に書いた３番目の関係より，

$$h \propto |\vec{v}|^2$$

である．これらより，

$$|\vec{v}| \propto L$$

となることが分かる．

このことが分かれば，衝突前の２物体の速さの比を求めることができるはずだ．２物体A，Bの衝突前の速さの比 $|\vec{v}_\mathrm{A}| : |\vec{v}_\mathrm{B}|$ は，それぞれの物体を持ち上げた位置から最下点までの距離の比 $L_\mathrm{A} : L_\mathrm{B}$ に等しいのである（図17）．結局，２物体が衝突前と同じ高さまではね返ってくるときの $L_\mathrm{A} : L_\mathrm{B}$ の比を記録していくことで，異なる質量の２物体がそれぞれ衝突前と同じ速さではね返るための条件を帰納的に得ることができるだろう．最終的に，質量 m_A，m_B の物体がそれぞれ衝突前と同じ速さではね返るのは，次のような場合だと導かれるはずだ．

$$|\vec{v}_\mathrm{A}| : |\vec{v}_\mathrm{B}| \ (= L_\mathrm{A} : L_\mathrm{B}) = m_\mathrm{B} : m_\mathrm{A}$$

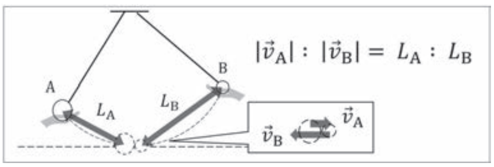

図 17: ワークシートの図（衝突前の速さの比）

では，実際にどのような実験を行ったかを書いておこう．まず，衝突物体として100g，200g，300gのステンレス球[24]を用意した．100g-200g，100g-300g，200g-300gの３通りの組み合わせで実験ができる．これらのステンレス球をそれぞれ紐[25]で吊るすが，正確な実験を行うために少し工夫が必要である．図18，図19を見てほしい．

まずは，図18のようにそれぞれのステンレス球を木材に取り付けた．木材の両端から吊るすことで，ステンレス球

[24]弾性衝突を再現する硬い物体でなければならない．紐で吊るす必要があるためフック付きのステンレス球（フックの質量込みで100g，200g，300g）を用意した．特注で削り出したもので精度は非常に良い．

[25]伸縮しない紐でなければならない．今回の実験では真鍮製（太さ0.23mm）のワイヤーを使った．

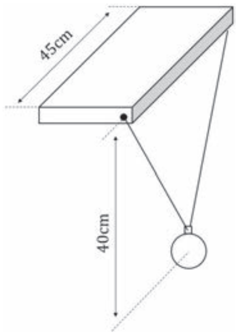

図 18: ステンレス球を吊るす

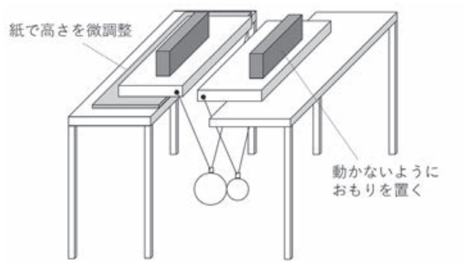

図 19: 衝突実験の実験装置

が横方向にずれてしまうことを防ぐことができる．その後，それらを図 19 のように設置する．２つのステンレス球がそれぞれの中心で衝突するように各方向の微調整が必要であるが，水平方向は木材をスライドすることで，鉛直方向は一方の木材の下に紙を敷くことで調整可能だ．微調整をしやすい点がこの装置の強みだと考える．

装置の説明が終わったので，実験方法を説明しよう．以下に手順を書き並べた．

1. ２つのステンレス球をある高さまでそれぞれ持ち上げて同時に手をはなし[26]，その映像を撮影する．
2. 映像を確認し[27]，２つのステンレス球がそれぞれ衝突前と同じ速さではね返った衝突（＝衝突前と同じ高さまではね返った衝突）を見つける．
3. 見つけた衝突について，L_{A} と L_{B} を定規で測り[28] $L_{\mathrm{A}}:L_{\mathrm{B}}$ を求める．手をはなした直後・衝突時の映像のスクリーンショットを撮り，それらを透かして重ねた画像を印刷すれば定規で測定できる（図 20）．
4. これらを繰り返し，２つのステンレス球の質量 m_{A}，m_{B} と $L_{\mathrm{A}}:L_{\mathrm{B}}$ の間にある関係を見つける．

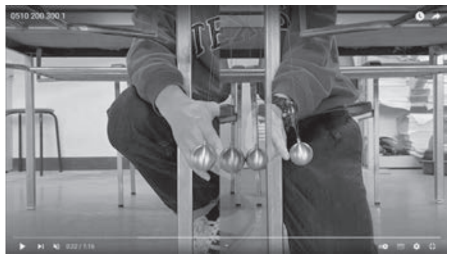

図 20: L_{A} と L_{B} を測定するための画像

最後に，実際の実験結果をいくつか以下に示しておく（表 5）．授業実践では図 20 のような画像が A4 に２枚入る大きさで印刷したものを配布し測定してもらった．多少ずれがあるデータもあるが，データ全体を見れば，$L_{\mathrm{A}}:L_{\mathrm{B}}$（$=|\vec{v}_{\mathrm{A}}|:|\vec{v}_{\mathrm{B}}|$）$=m_{\mathrm{B}}:m_{\mathrm{A}}$ を十分に確認できるだろう．

表 5: L_{A} と L_{B} の測定結果

m_{A}[g]	m_{B}[g]	L_{A}[mm]	L_{B}[mm]
200	100	10.0	20.0
200	100	13.0	25.0
300	100	7.5	22.5
300	100	6.0	18.5
300	200	12.5	19.0
300	200	12.0	18.0

◇ ２物体の衝突後の速度 ― 演繹

ガリレイの相対性原理，２物体がそれぞれ衝突前と同じ速さではね返る条件を実験によって帰納的に得ることができたので，今度はそれらを用いて演繹的に問題を解こう．今回の授業実践では，「質量 300g の物体 A が右向きに 3 m/s，質量 200g の物体 B が左向きに 2 m/s で衝突したとき，そ

[26]振り子の振れ幅を大きくし過ぎると，最下点で衝突しなくなる．理論的な計算によると，持ち上げる角度 θ が 14° 以下であれば，２つのステンレス球が最下点で同時に衝突すると十分にみなせる（誤差が１％以下である）．

[27]YouTube を PC で見れば，「。」キーで 1/30 秒間隔のコマ送り，「、」キーでコマ戻りができる．YouTube に実験映像をアップロードして確認することをおすすめする．

[28]重心間の距離を測る．

れぞれの衝突後の速度はどうなるか」といった課題を与え，ワークシートの誘導にしたがいながらグループごとに解を導いてもらった．

【命題 IX】の証明に書いたホイヘンスの手順をそのまま踏めば解を得ることはできるが，より分かりやすく解が得られるように，ホイヘンスの証明方法をいくらか修正して提示した．

最初に修正の要点をまとめて示し，その後に具体的な流れを紹介しよう．大きく修正したのは以下の２点である．

- ホイヘンスの手順では実験の舞台が船上へ転換される．以下では地上に静止した観測者をベースに考えるようにした．こちらの方が考えるのが楽に思える．
- ホイヘンスの手順では，ガリレイの相対性原理の存在感が薄い．ホイヘンスは，静止した観測者・等速で動く観測者が見る「現象」が同じであることを利用している[29]．そうではなく，静止した観測者・等速で動く観測者に対する「規則性」が同じということをより強調できるようにした．

次に，具体的な考察のステップを説明しよう．図 21 も見ながら確認してほしい．

1. 衝突前の２物体 A，B の図（速度を表す図）を書く．それぞれの矢印の始点を点 A，点 B とし，終点（衝突する位置）を点 C とする．
2. 今の状況では衝突後の速度を求められないため，一旦，【衝突前と同じ速さではね返る条件】を満たす状況を考える．A：300g，B：200g だから，衝突前の速さの比が２：３なら条件を満たす．「1.」の線分 AB を２：３に内分する点を D とし，A→D，B→D の矢印を書く．
3. 静止した観測者にとって「1.」のように見える衝突も，ある速度で動く観測者にとっては「2.」の衝突に見える．それは右に１ m/s で動く観測者である．
4. 【ガリレイの相対性原理】を考慮すると，この観測者にとっても，【衝突前と同じ速さではね返る条件】を満たせば２物体それぞれが衝突前と同じ速さではね返るはずである．右に１ m/s で動く観測者が見る衝突後の２物体の図（速度を表す図）を書く．
5. 静止した観測者にとって「4.」はどのように見えるか書く．これで求めたかった解が得られる．

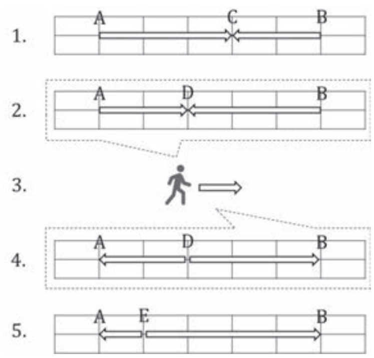

図 21: 衝突後の速度を求める

4　授業実践の成果と課題

３節で紹介した授業実践の成果と課題を報告しよう．

教育学部の幅広い専攻の学生が受講する講義「小学校理科」において，2022 年６月 30 日と７月７日の２コマを使って授業実践を行った．Zoom を用いたオンライン形式での実践であり，109 名の受講者には５人ずつのグループに分かれて議論しながらワークシートの課題に取り組んでもらった．

帰納・演繹といった物理の思考方法を受講者に理解してもらうことがこの授業実践のねらいである．授業後の受講者の理解度を知るために次のようなアンケート調査を行った．

ア　「規則性を見つける」とはどのようなことか理解できたか．

イ　「規則性を見つける」とはどのようなことか．

ウ　「物理の問題を解く」とはどのようなことか理解できたか．

エ　「物理の問題を解く」とはどのようなことか．

(ア)(ウ) は「十分に理解した・やや理解できた・あまり理解できていない・ 理解できていない」の選択式であり，(イ)(エ)

[29] そもそも【仮説 III】自体が「現象」の一致に注目した表現である．ガリレイの相対性原理は「どの慣性系でも力学法則が同じ」と現在では表現される，今回の授業実践でも「規則性」が一致することを強調した．力学が我々の知る形で書かれるようになったのはホイヘンスより後の時代である [8].

は記述式である．このアンケート調査の回答をもとに今回の授業実践の成果と課題をまとめた．

4.1 「規則性を見つける」ことの理解

項目 (ア) の回答結果は表 6 のようになった．

表 6: 項目 (ア) の回答結果

回答	分布 [%]
十分に理解した	26.6
やや理解した	69.7
あまり理解できていない	3.7
理解できていない	0.0

「十分に理解した」「やや理解した」という受講者が大半を占めている．項目 (イ) の回答をみても帰納的に規則性を見つける過程を十分に説明している記述が多く，受講者の多くは規則性を見つけるための帰納的な思考方法を理解したと言ってよいだろう．ここで項目 (イ) の記述をいくつか紹介しておこう．

- 速度や質量などの数値を変化させた実験を繰り返し行い，その実験によって得られた結果をもとに一定のきまりを見つけ出す．
- 実験結果から，一定の条件下において必ず成り立つ共通の事柄を見つける．
- 実際に数値を測定し，共通している部分を見つける．「実際に行う」という活動が必須である．

まさに，実験結果から帰納的に規則性を見つけることを記述しており，これらと類似する記述が多く見受けられたことは今回の授業の大きな成果である．

一方で，

- これだけの実験結果では判断することができない．
- さらに多くの実験結果を集めていく中で違いが生じるかもしれない．

といった理由で，確からしいものとして「規則性を見つける」ことができないという記述が散見された．健全な意見である．

今回の授業実践では授業時間の制限から，提示した実験結果も限られた数のものだった．このような点が原因で納得できない受講者を減らすためには，提示する実験結果を増やすことはもちろん，実際に受講者が自分自身の手で実験をすることも重要だろう．筆者の経験としてだが，実際に自分自身の手で行った実験がもつ意味は他人の実験結果とは比べ物にならない．

4.2 「物理の問題を解く」ことの理解

先程同様にアンケート調査の回答結果を先に示そう．項目 (ウ) の回答結果は表 7 のようになった．

表 7: 項目 (ウ) の回答結果

回答	分布 [%]
十分に理解した	17.4
やや理解した	68.8
あまり理解できていない	12.9
理解できていない	0.9

「規則性を見つける」こと同様に「十分に理解した」「やや理解した」という参加者が多くいることが分かる．項目 (エ) の回答をみると，上手く説明できている記述は「規則性を見つけること」の記述ほど多くはないが，以下のようなよい記述もあった．

- 自分の中での想像や妄想ではなく，実際に起きることを一から確認していき，「こうなるからこうなる」という明確な理由を持ったうえで，考え，解く．
- 繰り返し起こる現象を観測し規則性を導き出し，またその規則性を利用することで物理の問題は解くことができる．
- 規則性は条件さえ合えば必ず成り立つものであると考え，それを根拠として目の前の事象を考える．
- 規則性を複合的に用いることで，感覚とは違う論理的な解き方ができる．
- 観察から規則性を見つけ，それらを利用して問題にアプローチする．

これらの記述は確実な規則性（帰納的に見つけた規則性）をもとにし演繹的に推論する過程を十分に説明している．我々の本来伝えたかったことが確実に伝わっている受講者が少なからずいるようだ．

一方で,「あまり理解できていない」「理解できていない」という受講者が一定数いるのも事実である．記述を見ると,「物理の問題を解く」ことについての理解が不十分な受講者は結局何を前提として問題を解き進めるのかが分かっていない状態のことが多かった．実験によって帰納的に見つけた規則性をどのように位置付ければよいのか分かっていないのである．逆に，この位置付けがしっかりとなされている受講者は解法の論理性に気付けている．

「物理の問題を解く」ことについての理解を深める，つまり，いくつかの確実な規則性から演繹的に現象を説明できるといった物理の論理構造を知るためには何が重要なのか．今回の授業実践から言えることは，問題を解く際に実験によって得た規則性の位置付けがしっかりなされているかどうかで理解度に大きな差が生じるということである．問題に入る前に「現段階で確実に正しいと言えることは何か」と一言問いかけるだけで，演繹的な考え方の理解が大きく変わったかもしれない．

4.3　雑記

本題とはいくらかずれるが，授業実践で面白い現象がみられたので簡単に報告しておこう．

この授業実践の受講者は，高校時代の物理に関する科目の履修状況で「グループ A」: 物理・物理基礎を履修,「グループ B」: 物理基礎のみを履修,「グループ C」: 未履修，と分類できる．上で述べたアンケートに加えて，受講者に次のようなレポート課題を課した．

1. 100g の物体Aが右向きに 3 m/s，200g の物体 B が左向きに 3 m/s で衝突する．物体A，Bそれぞれの衝突後の速度を求めよ．
2. 上の問題の解き方を説明せよ．

この課題の結果をグループ別に集計したところ興味深い結果が得られたのである．

課題 1 の正答率はグループ A が最も高く，次いでグループ B，グループ C となった．その一方で，課題 2 では，問題を解く過程を論理的に説明している記述の割合はグループ C が最も高く，次いでグループ B，グループ A と，課題 1 とは真逆の結果になったのだ．

グループ C は課題 1 の正答率こそ低かったものの，課題 1 の正答者は課題 2 において規則性を根拠として論理的に説明ができていた．これは物理に不慣れであるがゆえに，見つけた規則性を根拠に考えることができたためであろう．対してグループ A は，他のグループよりも問題を解く操作に慣れており課題 1 の正答率が高かったのだろう．しかし，問題を解くための操作を覚えているに過ぎず，規則性を根拠として考える意識が薄かったため，課題 2 では論理的に説明できなかったということが考えられる．高校の物理教育における大きな課題が垣間見える．

5　現代力学の視点からの考察

これまでは「実験によって確証される規則性をもとに様々な現象を理論的に示す」というホイヘンスのとった方法に目を向け，ホイヘンスの衝突論の紹介とその教材化についての報告をしてきた．しかし，ホイヘンスの衝突論から我々が学べることはこれだけではない．ホイヘンスの衝突論を「対称性と保存則」といった現代的な視点から見てみることで，我々は力学についての理解を大いに深化させることができた．新たな視点から考えたことをここで何点か報告しよう．

5.1　対称性のもつ重要な役割

まず，物体の運動（より一般的には系の時間発展）を記述する現代力学の方法の要点を簡単に示しておこう．

- いくつかの対称性をラグランジアン L に課すことで，ラグランジアン L の形を決定できる．
- 物体の運動を表す関数 $q(t)$ は，作用

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t), \dot{q}(t), t)$$

　を最小にするように決まる．

これらが現代力学の指導原理であり，ニュートンの運動方程式もこれらから導き出すことができる．物体の運動を記述する上で対称性が非常に重要な役割を担っていることが伝わるだろうか．対称性がいかに重要かを理解し感動する読者がいる一方で,「なんとなく重要そうだな」と形式的に認識するだけの読者も多いだろう．恥ずかしながら筆者も解析力学を習った当時は後者の立場だった．対称性の重要性を十分に理解できていなかった理由はこんなところだろう．

- 多くの解析力学の教科書は，ニュートンの運動方程式を再現するために保存力下の質点系のラグランジアンを $L = T - U$ と先に与えて議論を進めている．そのため「ラグランジアンは $L = T - U$ だ」という知識が先に定着してしまい，対称性はただのおまけといった認識になってしまう．

- そもそも高校物理では「保存則からスタートして物体の運動を求める」といった問題の解法が主流だった．その背後に対称性があることなど知らなくても問題を解けてしまう．

対称性の重要性が理解されにくいことを指摘したが，ホイヘンスは既に対称性の重要性を熟知していたと思われる．ここでホイヘンスの衝突論をもう一度見てみよう．【命題 IX】は，２物体の質量および衝突前の速度から２物体それぞれの衝突後の速度を求めることができると主張していた．高校物理ではエネルギー保存の式[30]と運動量保存の式を連立することで衝突後の２物体それぞれの速度を求めていたが，ホイヘンスは何を使ってこの問題を解いていたのか．

２節を見直せば，ガリレイの相対性原理（慣性系における力学法則の不変性）こそが２物体それぞれの衝突後の速度を求めるためのカギになっていると気付けるだろう．ホイヘンスは，トリチェリの原理を用いて得られた【命題 VIII】が等速で動く観測者にとっても成り立つということを利用して，２物体それぞれの衝突後の速度を求めたのであった．まさに対称性が物体の運動を記述する上で重要な役割を果たしたのである．ホイヘンスの衝突論を学ぶことは対称性の重要性の理解といった観点からも非常に教育的であると言えよう[31]．

5.2 ホイヘンスの衝突論に潜む２つの保存則

高校物理ではエネルギー保存則・運動量保存則を用いて解く２物体の衝突問題を，ホイヘンスはガリレイの相対性原理やトリチェリの原理を用いて解いていたことを 5.1 節で述べた．さて，ホイヘンスの手法でも高校物理の慣習と同様の結果が得られるということは，ホイヘンスの衝突論の中にエネルギー保存則・運動量保存則が埋め込まれているのではないか．5.2 節では，ホイヘンスの衝突論に潜む保存則について考察する．

5.2.1 エネルギー保存則

ホイヘンスは，本論文では紹介していない命題 XI で運動エネルギーの保存則を示しており，この証明を逆にたどるとトリチェリの原理に行き着く[32]．ホイヘンスは『原論』の諸定理を持ち出しながら幾何学的な証明を行っているが，以下のようにトリチェリの原理から即座にエネルギー保存則を得ることができる．

振り子を使って質量 m_{A}，m_{B} の２つの球の衝突実験を行うとしよう．質量 m_{A} の球の初めの高さを h_{A}，衝突後に到達する高さを h'_{A} とし，質量 m_{B} の球の初めの高さを h_{B}，衝突後に到達する高さを h'_{B} とする．トリチェリの原理よりこの弾性衝突では重心の高さが変わらないから，

$$\frac{m_{\mathrm{A}}h_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}h_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}} = \frac{m_{\mathrm{A}}h'_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}h'_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}$$

を得る．また，質量 m_{A} の球の衝突前後の速さをそれぞれ $|\vec{v}_{\mathrm{A}}|$，$|\vec{v}'_{\mathrm{A}}|$，質量 m_{B} の球のそれらを $|\vec{v}_{\mathrm{B}}|$，$|\vec{v}'_{\mathrm{B}}|$ とする．ガリレイの落下法則における落下または上昇距離と速さの関係を用いることで，

$$\frac{m_{\mathrm{A}}|\vec{v}_{\mathrm{A}}|^2 + m_{\mathrm{B}}|\vec{v}_{\mathrm{B}}|^2}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}} = \frac{m_{\mathrm{A}}|\vec{v}'_{\mathrm{A}}|^2 + m_{\mathrm{B}}|\vec{v}'_{\mathrm{B}}|^2}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}$$

となり，エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}m_{\mathrm{A}}|\vec{v}_{\mathrm{A}}|^2 + \frac{1}{2}m_{\mathrm{B}}|\vec{v}_{\mathrm{B}}|^2 = \frac{1}{2}m_{\mathrm{A}}|\vec{v}'_{\mathrm{A}}|^2 + \frac{1}{2}m_{\mathrm{B}}|\vec{v}'_{\mathrm{B}}|^2 \tag{3}$$

が得られる．[33]．

5.2.2 運動量保存則

ホイヘンスの時代には我々の知るベクトルの概念を使った運動の記述があったわけではなく，ホイヘンスは向きを考慮しないスカラー量としての運動量を考えていた．そのため，「運動量が保存する」と言えたわけではない．しかし「２物体の重心速度が衝突前後で変わらない」と述べており[34]，これはベクトルとしての運動量保存則と等価である．

[30] ホイヘンスの衝突論同様に弾性衝突を想定している．高校物理の参考書を見ると「衝突前後の相対速度の比（反発係数）＝１」といった関係式を使うこが多いようだが，これは本質的にはエネルギーの保存を表している．

[31] ホイヘンスの衝突論が現代的な意義を持つことを述べた論文として『ホイヘンスの創始した理論物理学の方法論』[9] がある．

[32]【仮説 V】やそれを用いて示される【命題 IV】もエネルギー保存則の一部を含むが，それらからエネルギー保存則の式を得るのは難しい．

[33] ここの議論だけでは定まらない係数を 1/2 としたが，本来，エネルギーと仕事の関係から決まるものである．

[34] 弾性衝突だけではなく非弾性衝突についても，さらには３つ以上の物体の衝突についても重心速度が衝突前後で等しいことをホイヘンスは知っていた．ただ，この具体的な証明方法は誰にも明かさなかった [10]．

重心速度に着目して，ホイヘンスの衝突論に内包されるベクトルとしての運動量保存則を示そう．

今度は振り子ではなく水平な直線上で2つの球が衝突する様子を思い浮かべてほしい．2つの球が $|\vec{v}_{\rm A}|:|\vec{v}_{\rm B}|=m_{\rm B}:m_{\rm A}$ の速さで逆向きに衝突するならば $\vec{v}'_{\rm A}=-\vec{v}_{\rm A}$, $\vec{v}'_{\rm B}=-\vec{v}_{\rm B}$ となるというのが【命題Ⅷ】の主張だった．これを用いると，

$$\frac{m_{\rm A}\vec{v}_{\rm A}+m_{\rm B}\vec{v}_{\rm B}}{m_{\rm A}+m_{\rm B}}=\frac{m_{\rm A}\vec{v}'_{\rm A}+m_{\rm B}\vec{v}'_{\rm B}}{m_{\rm A}+m_{\rm B}}=\vec{0}$$

となることが明らかであり，この場合は衝突前後で重心が静止し続けていることが分かる．

さて，どんな任意の2物体の衝突であっても，ある適当な速度 $\vec{V}$ で動く観測者からは $|\vec{v}_{\rm A}-\vec{V}|:|\vec{v}_{\rm B}-\vec{V}|=m_{\rm B}:m_{\rm A}$ の衝突に見えるはずだ．さらに，ガリレイの相対性原理より，この速度 $\vec{V}$ で動く観測者にとっても【命題Ⅷ】が成り立ち，この速度 $\vec{V}$ で動く観測者にとっては衝突前後で重心が静止し続けることになる．もとの観測者にとって，2物体の重心は，衝突に関わりなく，速度 $\vec{V}$ で運動することを意味する．すなわち，

$$\frac{m_{\rm A}\vec{v}_{\rm A}+m_{\rm B}\vec{v}_{\rm B}}{m_{\rm A}+m_{\rm B}}=\frac{m_{\rm A}\vec{v}'_{\rm A}+m_{\rm B}\vec{v}'_{\rm B}}{m_{\rm A}+m_{\rm B}}=\vec{V}\ (\text{一定})$$

となり，運動量保存則

$$m_{\rm A}\vec{v}_{\rm A}+m_{\rm B}\vec{v}_{\rm B}=m_{\rm A}\vec{v}'_{\rm A}+m_{\rm B}\vec{v}'_{\rm B} \tag{4}$$

が得られる．

別の方法でも示しておこう．エネルギー保存則（3）にガリレイの相対性原理を課すことで運動量保存則が得られる[35]．ガリレイの相対性原理より速度 $\vec{V}$ で動く観測者にとってもエネルギー保存則（3）が成り立つから，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}m_{\rm A}|\vec{v}_{\rm A}-\vec{V}|^2+\frac{1}{2}m_{\rm B}|\vec{v}_{\rm B}-\vec{V}|^2\\ &\qquad=\frac{1}{2}m_{\rm A}|\vec{v}'_{\rm A}-\vec{V}|^2+\frac{1}{2}m_{\rm B}|\vec{v}'_{\rm B}-\vec{V}|^2\end{aligned} \tag{5}$$

となる．式（3）から式（5）を引くと，

$$(m_{\rm A}\vec{v}_{\rm A}+m_{\rm B}\vec{v}_{\rm B})\cdot\vec{V}=(m_{\rm A}\vec{v}'_{\rm A}+m_{\rm B}\vec{v}'_{\rm B})\cdot\vec{V}$$

となり，運動量保存則（4）が得られる．

[35] E. マッハ（1838～1916）は，J.R. シュッツが1897年に書いた論文でこのことを示したと言っている [11]．ホイヘンスの没後200年のことであるが，運動量保存則の導出という点においてホイヘンスの論理と本質的に同じである．余談だが，シュッツの時代にはニュートン力学が完成しており，シュッツはエネルギー保存則とガリレイの相対性原理からニュートンの運動方程式や作用反作用の法則が得られることをも主張している．

5.2.3　ラグランジアンの対称性に基づく考察

現代では保存則と対称性には深い結びつきがあることが知られている．特に，エネルギーの保存は系が時間並進の対称性をもつことの帰結，運動量の保存は系が空間並進の対称性をもつことの帰結である．

先程はエネルギー保存則とガリレイの相対性原理から運動量保存則を得たが，これは現代風には「ラグランジアンに時間並進の対称性とガリレイ不変性を課すと，空間並進に対しても対称性をもつラグランジアンになっていた」と言い換えることができるだろう．この事実を確認しよう[36]．

2質点系の一般的なラグランジアン $L(\vec{x}_{\rm A},\vec{x}_{\rm B},\vec{v}_{\rm A},\vec{v}_{\rm B},t)$ に時間並進対称性およびガリレイ不変性を課してみよう．まず，時間並進対称性はラグランジアンが陽な時間依存性をもたないことを要請する：$L(\vec{x}_{\rm A},\vec{x}_{\rm B},\vec{v}_{\rm A},\vec{v}_{\rm B})$．

次に，ガリレイ不変性を課そう．すなわち，いまの座標系 K に対して微小速度 $\vec{\varepsilon}$ で運動する座標系 K' でもラグランジアンが（任意関数 $f(\vec{x},t)$ の時間についての全微分項をのぞいて）不変であることを要請する．座標系 K' でのラグランジアン $L'=L(\vec{x}_{\rm A}-t\vec{\varepsilon},\ \vec{x}_{\rm B}-t\vec{\varepsilon},\ \vec{v}_{\rm A}-\vec{\varepsilon},\ \vec{v}_{\rm B}-\vec{\varepsilon})$ は，

$$\begin{aligned}L' &= L(\vec{x}_{\rm A},\vec{x}_{\rm B},\vec{v}_{\rm A},\vec{v}_{\rm B})-t\vec{\varepsilon}\cdot\left(\frac{\partial L}{\partial\vec{x}_{\rm A}}+\frac{\partial L}{\partial\vec{x}_{\rm B}}\right)\\ &\quad-\vec{\varepsilon}\cdot\left(\frac{\partial L}{\partial\vec{v}_{\rm A}}+\frac{\partial L}{\partial\vec{v}_{\rm B}}\right)+O(\vec{\varepsilon}^2)\end{aligned}$$

と微小量 $\vec{\varepsilon}$ で展開できる．まず第2項に注目してほしい．変換後のラグランジアンも陽な時間依存性をもたないはずだから，

$$\frac{\partial L}{\partial\vec{x}_{\rm A}}+\frac{\partial L}{\partial\vec{x}_{\rm B}}=\vec{0}$$

である必要がある．つまり，ラグランジアン L は位置 $\vec{x}_{\rm A}$, $\vec{x}_{\rm B}$ に関して $L(\vec{x}_{\rm A}-\vec{x}_{\rm B})$ といった依存性でなければならない．

次は第3項だ．ガリレイ不変性を満たすには，この項は任意関数 $f(\vec{x},t)$ の時間についての全微分項になる必要がある．そのためには，$\partial L/\partial\vec{v}_{\rm A}+\partial L/\partial\vec{v}_{\rm B}$ が $\vec{v}_{\rm A}$, $\vec{v}_{\rm B}$ について高々1次でなければならず，ラグランジアン L は $\vec{v}_{\rm A}$, $\vec{v}_{\rm B}$ について高々2次で書かれていなければならないのである[37]．

以上の議論から，時間並進対称性とガリレイ不変性を満たすラグランジアン L の形が分かる：運動エネルギー T と

[36] 教科書 ([12], [13]) では，時間・空間の並進対称性および空間回転対称性に加えて，ガリレイ不変性を課してラグランジアンを決定している．

[37] ここの議論は $\vec{v}_{\rm A}\cdot\vec{v}_{\rm B}$ に比例する項を許す．しかし，2つの質点が十分離れたときに相互の影響がない互いに独立な質点となることを要求して落とす [13]．

ポテンシャル U に分けて書き表すと

$$L = T(\vec{v}_{\rm A}^2, \vec{v}_{\rm B}^2) - U(\vec{x}_{\rm A} - \vec{x}_{\rm B})$$

となる．L は明らかに空間並進に対しても対称性を持つ．すなわち，「ラグランジアンに時間並進対称性とガリレイ不変性を課すと，空間並進対称性ももつラグランジアンになる」ということを確認できた．

5.2.4 保存則存在の裏付けとしてのホイヘンスの衝突論

最後に，物理の数学的道具立てを知らない学習者に向けて保存則の存在を納得する材料を提供してみよう．「自然界には，何かが保存するような規則性のあることが，確かに尤もらしい」といった具合に保存則の存在を直感的に認識してもらえることを期待する．

ホイヘンスの衝突論の【命題 IX】を再度思い出してほしい．２物体の質量と衝突後の速度が分かれば衝突後のそれぞれの速度が求まるという命題だった．もう少し強調しよう．２物体の質量と衝突前の速度が分かれば衝突後のそれぞれの速度が「必ず」しかも「一意に」求まるのである．

２つの未知量が必ず一意に定まるとき，その背後にはどのような構造があったのだろうか．連立方程式の計算問題を思い浮かべれば十分分かるはずだ．２つの未知量を一意に定めるには，それらについての２つの独立な関係式が存在していなければならない．つまり，２物体の衝突後の速度 $\vec{v}'_{\rm A}$，$\vec{v}'_{\rm B}$ が一意に定まるのは，$\vec{v}'_{\rm A}$，$\vec{v}'_{\rm B}$ に関する何かしらの規則性が２つ存在しているからということだ．しかも，２物体の質量 $m_{\rm A}$，$m_{\rm B}$ や衝突前の速度 $\vec{v}_{\rm A}$，$\vec{v}_{\rm B}$ を変えれば別の $\vec{v}'_{\rm A}$，$\vec{v}'_{\rm B}$ に定まることから，その２つの規則性は２物体の質量 $m_{\rm A}$，$m_{\rm B}$ と衝突前の速度 $\vec{v}_{\rm A}$，$\vec{v}_{\rm B}$ を含む関係式で表されると考えられるだろう．

では，その２つの規則性とは何なのか．考えられる最も自然な形は「質量や速度を含む２種類の物理量の保存則」であろう．この２つの保存則はエネルギー保存則と運動量保存則である．

２つの未知量が求まった背景にこれらの保存則が潜んでいることをグラフで書き表して見よう．例として授業実践の課題で使った数値を使う．授業実践では表 8 のように，衝突後の速度 $(v'_{\rm A}, v'_{\rm B})$ を求められた[38]．

表 8: 衝突前後の速度

物体 (質量 [g])	衝突前 [m/s]	衝突後 [m/s]
A ($m_{\rm A} = 200$)	$v_{\rm A} = +3$	$v'_{\rm A} = -1$
B ($m_{\rm B} = 200$)	$v_{\rm B} = -2$	$v'_{\rm B} = +4$

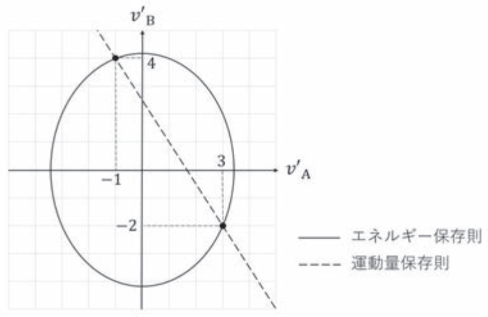

図 22: ２つの保存則

図 22 に描かれた楕円はエネルギーの保存則 (3) を，直線は運動量の保存則 (4) を表す；表 8 にある衝突後の速度 $(v'_{\rm A}, v'_{\rm B})$ は二つの保存則を同時に満たす交点として得られる[39]．

２物体の衝突後の速度が一意に定まるという事実は，その背後に２つの保存則が存在することを強く示唆する．この点は，初学者にとっても納得できるのではないだろうか．

6 まとめ

自然界には物体の運動を決める規則性が確かに存在する．何かを手に取って静かに手をはなしてみる，これを何度か繰り返してみればそれが分かるだろう．その物体は毎回全く同じ落ち方をするのだ．このように再現性のある現象が起こるのは，自然界に何かしらの規則性が存在しているからなのではないか．その規則性を探り自然界の構造を明らかにしていく学問が自然科学なのであり，物理学にはその発展を通じて自然科学の方法論を生み出した歴史的経緯がある．

物理学には２つの面白さがあるだろう．１つ目は自然界の規則性を突き詰めるといった知的好奇心をくすぐる面白さであり，２つ目は見つけた規則性を使って未知の問題を

[38] ここでは速度を成分で書いた．右向きを「+」，左向きを「−」としている．

[39] 図 22 のグラフは２つの交点をもつが，そのうち１点は衝突前と同じ状態を表している．

解いたり日常生活に応用したりできるといった論理性・有用性を感じる面白さである．

さて，我々が最初に問題として挙げたのは，子どもたちの「物理離れ」「物理嫌い」だった．この問題の対応については，先行研究によって様々な指摘がなされている．我々は，先に述べた物理の面白さの２つ目「確証の持てる規則性を使って未知の問題を論理的に解くことのできる面白さ」に目を向け，帰納・演繹といった物理の思考方法を理解することが重要なのではないかと考えた．そこで，見事な思考方法で２物体の弾性衝突を説明したホイヘンスの衝突論に注目したのである．

ホイヘンスの衝突論は実に論理的である．実験によって確証されたいくつかの規則性をもとに演繹的な推論を積み重ね，次々と命題を証明しているのだ．ホイヘンスの衝突論の完成を追体験することで，実験結果から帰納的に規則性を見つけること，それらの組み合わせで未知の問題を解くことを味わうことができるだろうと考えられる．

実際，ホイヘンスの衝突論をアレンジした内容の授業実践を行ったところ，帰納・演繹といった思考方法を多くの受講者が概ね意識できていた．改善点としては，推論の裏付けが何なのかを常に意識させながら問題に取り組ませることなどが挙げられる．

また，ホイヘンスの衝突論はその論理的な思考方法だけではなく，現代的な力学の観点からも考察に値することを見た．ホイヘンスの衝突論における仮説の１つである「ガリレイの相対性原理」がかなり深い話題を与えてくれる．物理現象を記述する上で系のもつ対称性が非常に重要な役割をもつというのが現代の理解であるが，17世紀を生きたホイヘンスの寄与も我々の理解を支えている．

謝辞

執筆に当たって，五十嵐尤二氏，小栗美香氏，小林一夫氏，小林昭三氏から資料提供を受け，議論頂いた．吉田・樽田が実験を行い授業実践案を練り上げた．講義の実施に当たって佐藤寛生氏と東海林大成氏に TA として参加頂いた．皆さんに深く感謝します．本研究は JSPS 科研費 (19H01711, 21K02947) の助成を受けたものである．

引用文献

[1] 原田勇希，坂本一真，鈴木誠，
「いつ，なぜ，中学生は理科を好きでなくなるのか？–期待 - 価値理論に基づいた基礎的研究–」
理科教育学研究 **58** no.3 (2018) pp.319-330.

[2] 長沼祥太郎，「項目毎の理科離れ層の変動の可視化」，日本科学教育学会研究会研究報告 **36** no.2 (2021) pp.141-146.

[3] 栗山和広，平山典子，「中学生の理科の好き嫌いの構成要因」， 愛知教育大学紀要 **65** (2016) pp.1-7.

[4] La Haye, Martinus Nijhoff. *Euvres complétes de Christian Huygens, publiées par la Société Hollandaise des Sciences*. 1888-1950.

[5] ホイヘンス，西敬尚 訳，「衝突による物体の運動について」，『科学の名著 第Ⅱ期 10 ホイヘンス』 (朝日出版社，1989) pp.7-50.

[6] ガリレオ・ガリレイ，今野武雄，日田節次 訳，
『新科學對話 (下)』 (岩波書店，1937-1948).

[7] ロンドン大火から 350 年 Part2 よみがえった都 - 天才クリストファー・レンの挑戦 - [Christopher Wren]. ONLINE ジャーニー.
https://www.japanjournals.com/feature/survivor/85161006-fire-2.html，(閲覧 2022-10-10).

[8] 伊藤和行，オイラーの運動方程式，
科学哲学科学史研究 **1** (2006) pp.153-169,
https://doi.org/10.14989/56969.

[9] 里見志郎，「ホイヘンスの創始した理論物理学の方法論」，大学の物理教育，**10** (2004) pp.145-148.

[10] 横山雅彦，「ホイヘンスの衝突論–その形成過程について–」，科学史研究，**97** (1971) pp.24-33.

[11] エルンスト・マッハ，伏見譲 訳，『マッハ力学 力学の批判的発展史』 (講談社，1969)；同書の他の翻訳として，岩野秀明 訳，『マッハ力学史 （上・下)』(ちくま学芸文庫，2006)

[12] エリ・デ・ランダウ，イェ・エム・リフシッツ，広重徹，水戸巌 訳，『力学 増訂第 3 版』 (東京図書，1974).

[13] 畑浩之,『基幹講座物理学 解析力学』(東京図書, 2014).