

博士論文の要旨及び審査結果の要旨		
氏名	DECHBOON Premyuda	
学位	博士 (理学)	
学位記番号	新大院博 (理) 第 480 号	
学位授与の日付	令和 4 年 9 月 20 日	
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当	
博士論文名	Inheritance properties on cone continuity for set-valued maps via scalarization (スカラー化による集合値写像の錐連続性に対する遺伝的性質)	
論文審査委員	主査	教授・田中 環
	副査	教授・山田 修司
	副査	教授・三浦 毅
	副査	准教授・劉 雪峰
	副査	准教授・蛭川 潤一
	副査	助教・折田 龍馬
<p>博士論文の要旨</p> <p>本論文は、アルゴリズムの収束性や集合最適化 (set optimization) でよく利用される、集合値写像の (錐) 半連続性とその一般化に関する研究を行っている。従来の集合値最適化問題における集合の最適性規準は、ベクトル最適化の延長線上にあり、集合族に対するある種の半順序のような二項関係に対して必ずしも望むべき解になっているとは限らない状況であった。最近では、このようなベクトル同士の有効性の代わりに、集合関係と呼ばれる「集合と集合の優劣を判断する二項関係」(凸錐によるベクトル間の半順序とそれに基づいた二つの集合間の直接的な比較法) とその二項関係を保存するような非線形のスカラー化関数が複数提案され利用されている。</p> <p>一方、反復法におけるアルゴリズムの大域的収束性を議論する際には、そのアルゴリズム写像を集合値写像として考えて、どんな半連続性が成立するのが吟味される。最近、集合最適化の分野で、集合値写像の半連続性がスカラー化関数 (集合関数) との合成によって、どのように遺伝されるかの解明に向けた研究がいくつか行われている。このことは、うまくスカラー化関数を選びその合成写像の半連続性を調べることで収束性が理論的に保障できることを意味している。</p> <p>一般に、2 つの連続な実数値関数の合成写像が連続となることはよく知られたことである。これと似た性質として、錐半連続性を持つベクトル値関数とその錐の上で非負の値をとる連続線形汎関数の合成写像が同様の半連続性を持つことも証明され (Tanaka, 1997)、集合値写像についても部分的に成り立つことが示された (Kobayashi, Saito, Tanaka, 2016)。この時、実数値関数の半連続性は実数の全順序性に基づく性質と考えられ、ベクトル値関数や集合値写像の錐半連続性はそれに対応する性質となっている。本論文では、それらの概念の一般化の (二項関係 \leq と錐 C に基づいた) (\leq, C)-連続性を考えることで、先行結果 (Ike, Liu, Ogata, Tanaka, 2019) で与えられた数学的性質の一般化に成功し、これまでに知られている、集合のスカラー化関数 (集合関数) の一般</p>		

化半連続性に関する性質を分かりやすく整理している。この時、錐 C が原点のみからなる場合、つまり、 $C := \{0\}$ の時は先行研究の内容をすべて含むように定理が述べられている。これらの証明を読み解くには、関数解析や凸解析、集合値解析の知識が必要である。

本論文は、次のように構成されている。第1章は序論である。第2章では準備として、線形位相空間における様々な概念、二項関係におけるいくつかの性質、ベクトル空間における錐と半順序の関係、集合同士を比較する6通りの集合関係、および集合値写像とスカラー化関数の一般化半連続性などの定義や性質が述べられている。第3章で、同じ二項関係・凸錐に関して集合値写像とスカラー化関数が一般化半連続性を持っている場合に、それらの合成写像がスカラー化関数の半連続性と同じ半連続性を持つことが2通り（上半連続性と下半連続性について）証明されている。第4章では、これらの基本結果を応用して、6通りの集合関係に対応した劣線形型スカラー化関数の一般化半連続性を詳しく調査し、それらの証明を与えている。しかし、すべてのパターンが証明されるわけではなく、明らかに成立しない例を第5章でいくつか反例として挙げて考察している。また最後に、第6章において4章と5章で明らかになった結果を一覧表にまとめて、集合値写像と（6通りの集合関係に対応した）劣線形型スカラー化関数との合成写像の一般化半連続性の遺伝性について体系的に整理して結論を述べている。

審査結果の要旨

本論文は、集合最適化や集合値解析で重要な集合値写像の錐半連続性の一般化とスカラー化関数による遺伝性についての結果をまとめたものである。この考え方は最適化の分野だけでなく、数学の解析分野においても大変斬新なものである。これらの発表内容から本論文が新規性に富んでいることが確認できた。このような取り組みは、数理科学的にも独創性、新規性、有効性の高いものと認められ、今後の多方面への発展に貢献が期待できる。また、本論文の内容の主結果は学術論文として、査読付国際雑誌に掲載が決定されている。このことから、本論文が当該分野において評価される研究であることが確認できた。

よって、上記の内容に基づき本論文が博士（理学）の博士論文として十分であると認定した。