

博士論文の要旨及び審査結果の要旨	
氏名	金井 和貴
学位	博士 (理学)
学位記番号	新大院博 (理) 第 475 号
学位授与の日付	令和 4 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
博士論文名	On the Hasse norm principle and the Davenport-Hasse lifting theorem (ハッセノルム原理とダベンポート・ハッセの持ち上げ定理について)
論文審査委員	主査 教授・星 明考 副査 教授・小島 秀雄 副査 教授・三浦 毅 副査 准教授・山崎 愛一
<p>博士論文の要旨</p> <p>本博士論文は、参考論文[1]と関連論文[1]の内容をまとめたものである。いずれも 1930 年代のドイツの数学者ヘルムート・ハッセによる研究を発端とし、今もなお、数論において重要な研究課題の 1 つとして研究が行われている主題に関するものである。</p> <p>第 1 章では、ハッセノルム原理に関する金井和貴君の結果が紹介されている。ハッセノルム原理は、大域体(特に代数体)の拡大 K/k に対して、局所的なノルムの束ね合わせと大域的なノルムの“ずれ”が存在しないことを表す原理であり、ハッセにより巡回拡大 K/k に対して成立することが示された。しかしながら、一般には不成立であり、成立となる必要十分条件を与えることが問題となる。拡大 K/k のハッセノルム原理はノルム 1 トーラス $R_{K/k}^{(1)}(\mathbf{G}_m)$ の有理性問題と深く関係している。代数多様体が有理的(安定有理的, レトラクト有理的)であるかを決定することは、代数幾何学において大変重要な問題である。1975 年の遠藤静男氏と宮田武彦氏, 1969 年の V. E. Voskresenskii の結果により、代数的トーラス T の安定有理性はその指標群 \hat{T} の flabby resolution による flabby class で決定されることが知られている。さらに、Voskresenskii は次の完全系列の存在を示している：</p> $0 \rightarrow A(T) \rightarrow H^1(k, \text{Pic } \bar{X})^\vee \rightarrow \text{III}(T) \rightarrow 0.$ <p>ここで、$A(T)$ は T の弱近似の核の群、$\text{III}(T)$ は T のシャファレヴィッチ・テイト群、X は T の滑らかなコンパクト化、$M^\vee = \text{Hom}(M, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ は M のポントリヤージン双対である。また、1963 年の小野孝氏の結果により、拡大 K/k のハッセノルム原理の成立の可否はノルム 1 トーラスのシャファレヴィッチ・テイト群 $\text{III}(R_{K/k}^{(1)}(\mathbf{G}_m))$ を調べることで分かる。したがって、$H^1(k, \text{Pic } \bar{X})$ を調べることは、拡大 K/k のハッセノルム原理を調べる上で大変重要である。第 1 章では、代数的トーラス T が以下の場合、$H^1(k, \text{Pic } \bar{X})$ が決定されている：</p> <ul style="list-style-type: none"> ● 4 次元および 5 次元の代数的トーラス、 ● 12 次を除く 15 次以下の体の拡大 K/k に対するノルム 1 トーラス $R_{K/k}^{(1)}(\mathbf{G}_m)$、 ● ガロア閉包のガロア群がマシュー群となる 11, 12, 22, 23, 24 次の体の拡大 K/k に対するノルム 1 トーラス $R_{K/k}^{(1)}(\mathbf{G}_m)$。 	

拡大 K/k の次数が素数の場合、ハッセノルム原理は成立する. 1984年に B. E. Kunyavskii は拡大 K/k の次数が $n = 4$ のとき, 1987年に Yu. A. Drakokhrust と V. P. Platonov は $n = 6$ のとき, 拡大 K/k のハッセノルム原理が成立するための必要十分条件を拡大 K/k に付随する分解群による条件で与えた. 本博士論文では, 第 1 章の主定理として, 12 次を除く 15 次以下の代数体の拡大 K/k に対して, ハッセノルム原理が成立するための必要十分条件を拡大 K/k に付随する分解群による条件で与えることに見事に成功している.

第 2 章では, ダベンポート・ハッセの持ち上げ定理に関する金井和貴君の結果が紹介されている. ガウス周期とガウス和はしかるべき関数とみなすことで互いの有限フーリエ変換となることが知られている. このことに着目し, まずダベンポート・ハッセの持ち上げ定理の双対版が示されている. この双対版と 2004 年に F. Thaine によって導入された行列の d 積を用いて, ガウス周期に対応する行列 C_r の持ち上げ C_{nr} が C_r の Thaine による (-1) 積の n 乗 $C_r^{(n)}$ で次のように与えられることが示されている:

$$C_{nr} = (-1)^{n-1} C_r^{(n)}.$$

さらに, 低次の場合の興味深い具体例および計算機代数システム GAP を用いた例の計算が与えられている.

審査結果の要旨

代数体の拡大 K/k に対して, 局所的なノルムの束ね合わせと大域的なノルムの“ずれ”が存在しないことを表すハッセノルム原理の研究は数論における主要な問題の 1 つとして多くの数学者によって研究されてきた. 拡大 K/k のハッセノルム原理はノルム 1 トーラス $R_{K/k}^{(1)}(\mathbf{G}_m)$ の有理性問題と深く関係している. 代数多様体が有理的(安定有理的, レトラクト有理的)であるかを決定することは, 代数幾何学において大変重要な問題である. 1975 年の遠藤静男氏と宮田武彦氏, 1969 年の V. E. Voskresenskii の結果により, 代数的トーラス T の安定有理性はその指標群 \hat{T} の flabby resolution による flabby class で決定されることが知られている. 金井和貴君の博士論文の第 1 章では, 1963 年の小野孝氏の結果により, 拡大 K/k のハッセノルム原理の成立の可否をノルム 1 トーラス $T = R_{K/k}^{(1)}(\mathbf{G}_m)$ のシャファレヴィッチ・テイト群 $\text{III}(T)$ に帰着させ, T の滑らかなコンパクト化 X に対して, 次の場合の $H^1(k, \text{Pic } \bar{X})$ を決定している:

- 4 次元および 5 次元の代数的トーラス,
- 12 次を除く 15 次以下の体の拡大 K/k に対するノルム 1 トーラス $R_{K/k}^{(1)}(\mathbf{G}_m)$,
- ガロア閉包のガロア群がマッシュレー群となる 11, 12, 22, 23, 24 次の体の拡大 K/k に対するノルム 1 トーラス $R_{K/k}^{(1)}(\mathbf{G}_m)$.

拡大 K/k の次数が素数の場合, ハッセノルム原理は成立する. 1984年に B. E. Kunyavskii は拡大 K/k の次数が $n = 4$ のとき, 1987年に Yu. A. Drakokhrust と V. P. Platonov は $n = 6$ のとき, 拡大 K/k のハッセノルム原理が成立するための必要十分条件を拡大 K/k に付随する分解群による条件で与えた. 本論文では, 12 次を除く 15 次以下の代数体の拡大 K/k に対して, ハッセノルム原理が成立するための必要十分条件を拡大 K/k に付随する分解群による条件で与えることに見事に成功している. さらに, 第 2 章では, ダベンポート・ハッセの持ち上げ定理に関する金井和貴君の結果が紹介されており, 高い独創性が認められる.

以上のように, 本論文は数論および代数幾何学における中心的かつ大変重要な問題であるハッセノルム原理の研究およびノルム 1 トーラスの安定双有理不変量の計算を実現し, 当該研究に本質的な進展をもたらしている. これらの成果は代数学, 特に数論および代数幾何学の発展に大きな寄与をなすものである. よって, 本論文は博士(理学)の博士論文として十分であると認定した.