

2021年度 博士論文

モジュラー対称性を持つ
レプトンフレーバー模型

Heo Yongtae

F19J0006E

新潟大学大学院自然科学研究科 博士後期課程
数理物質科学専攻 物理学コース

素粒子論研究室

目次

第 1 章 導入	2
第 2 章 標準模型とその問題	4
2.1 標準模型	4
2.1.1 ヒッグス機構によるフェルミオン質量	5
2.1.2 ヒッグス機構によるゲージボソンの質量	6
2.2 標準模型の課題: ニュートリノの質量	7
2.2.1 ニュートリノ振動	7
2.2.2 レプトンの混合行列	9
2.2.3 ニュートリノを放出しない二重ベータ崩壊	9
2.3 標準模型の拡張	10
2.3.1 右巻きニュートリノの導入によるシーソー機構	10
2.3.2 フレーバー対称性	12
第 3 章 モジュラー対称性	14
3.1 モジュラー群とその部分群	14
3.2 モジュラー対称性を持つ超対称性理論	16
3.2.1 離散的フレーバー対称性とモジュラー対称性	17
3.3 モジュラー不変な Kähler ポテンシャル	18
第 4 章 レプトンフレーバー模型	20
4.1 模型の構成	20
4.1.1 模型の超ポテンシャル	21
4.2 荷電レプトンとニュートリノの質量	22
4.2.1 Two-Zero 構造	27
第 5 章 模型の数値解析	31
5.1 振動実験結果との比較	31
5.2 模型の予言	35
5.2.1 ニュートリノの質量和	35
5.2.2 CP 位相	36
5.2.3 ニュートリノを放出しない二重ベータ崩壊	40
第 6 章 結論	42
付録 A A_4 群の計算則	44
付録 B モジュラー形式の導出	45

第1章 導入

素粒子物理学の標準模型はクォーク3世代、レプトン3世代、 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ相互作用を媒介するゲージボソン、ヒッグスボソンの17個の基本粒子で構成され、非常に高い精度で物理現象を予言し、数々の実験により模型の予言値が観測値と整合することが検証され大きな成功を収めた [1–3]。標準模型においてフェルミオンは、ヒッグス場が自己相互作用によって真空期待値を持つことで湯川相互作用を通じて質量を獲得する。このヒッグス機構では、例外的に左巻きカイラリティのみ存在するニュートリノは質量を持たない。しかし、3種のニュートリノの異なるフレーバー間に伝搬中に遷移する振動現象が観測されたことより、ニュートリノ質量の存在が確認され [4–12]、標準模型に修正が要求された。更に、同じ量子数を持つフェルミオン3世代間の質量が大きく異なること、世代間混合の理由、その混合のパターンがクォークとレプトンの間に大きく異なるなど、標準模型にはフレーバー構造に対する疑問も未解決問題として残っていた。

上記の問題を含めて標準模型が持つ諸問題を打破するため、標準模型を超えた新模型の探索が重要な課題になってきた。まず、ニュートリノの微小質量を説明する方法として、新たな右巻きカイラリティを持つマヨラナ型の非常に重いニュートリノを加えて標準模型を拡張する機構が提案された。標準模型のニュートリノ ν と追加のニュートリノ N は質量項 $m\nu N + MNN$ (m と M は質量パラメータ) を構成し、 $M \gg m$ の場合に質量項を対角するとニュートリノの質量値は m^2/M なることから、この値は M が大きくなるほど小さくなることになぞって「シーソー機構」と呼ばれる [13–17]。次に、フレーバー構造の問題を説明するために、フレーバーの間の入れ替えの対称性であるフレーバー対称性が考えられた。クォークとレプトンの混合パターンが違うので、各セクター別々にフレーバー対称性を考える必要があると考えた。特に、フレーバー対称性の一例として、 S_3, A_4, S_4, A_5 など、幾何学と結びつけた離散的フレーバー対称性は、ニュートリノ振動実験結果が示すニュートリノ混合パターンを非常によく説明した [18–22]。

レプトンセクターの離散的対称性の起源として、10次元超弦理論による余剰次元のトラスコンパクト化に伴い生じるモジュラー対称性が、その起源となり得ることが示された [23]。モジュラー対称性は、モジュラー形式を含む超ポテンシャルの中の湯川結合定数の形を制限し、ニュートリノの質量及び混合角の観測値はモジュラス τ と限られたパラメーターで記述することが可能となる。このような魅力的な特徴をもつため、モジュラー対称性を持つ模型が活発に研究された [24–58]。しかし、近年、モジュラー形式を含むモジュラー不変な Kähler ポテンシャルの追加項によって模型の予言力が失われる可能性が指摘された [48]。モジュラー対称性は Kähler ポテンシャルを完全に制限することができないため、モジュラー形式を使ってモジュラー不変な Kähler ポテンシャルの追加項が無限に許される。その追加項の係数など、追加項に伴い生じる新たなパラメーターによって、本来少ないパラメーターでニュートリノ物理量を説明できた模型の利点が失い、追加項による補正も無視できない程度であることが示された。この追加項の効果を抑えるため、 $\text{Im } \tau \rightarrow \infty$ の極大体積極限 (large volume limit) と呼ばれる処方法が上げられた。例としてモジュラー A_4 対称性を考えると、この極限をとると、 \mathbb{Z}_3 対称性が残る。この残った対称性のために、Kähler ポテンシャルの追加項を考慮しても、 τ Kähler 計量は世代に対して対角的になり付加的な混合は現れない。

ただし、今までの研究ではニュートリノ振動実験結果を満たすパラメーター領域は $\text{Im } \tau = \mathcal{O}(1)$ であった。

本研究では、このような背景の下で、極大体積極限においてニュートリノ振動実験結果を再現できるモジュラー対称性を持つレプトンフレーバー模型を構築した。まず、モジュラー群の部分群の内 A_4 の同型の部分群を採用し、シーソー機構のため 3 つの右巻きニュートリノと A_4 三重項かつゲージ重項 S を新たに導入した。 S の真空期待値を与えて残存する \mathbb{Z}_3 対称性を破り、ニュートリノ振動実験結果を再現するとともに、右巻きニュートリノのマヨラナ質量項、およびヒッグス場の μ 項を説明した。構築した模型の特徴として、ニュートリノ質量行列の逆に独立な 2 成分がゼロとなる。このような質量行列の構造は、Two-Zero 構造と呼ばれる [59–61]。Two-Zero 構造を持つ質量行列には 15 パターンがあり、構築した模型はその中の 3 つのパターンを预言する。さらに、最新のニュートリノ振動実験結果 [62]、T2K 実験 [63]、KamLAND-Zen 実験 [64]、および宇宙マイクロ波背景輻射 (CMB) 観測から宇宙論によるニュートリノ質量和の制限 [65] を用いて模型が観測値を再現できるか評価し、可能なパターンを選別すると共に、今後の実験・観測での検証可能性を検討した。

本博士論文の構成は以下の通りである。第 2 章では、標準模型におけるヒッグス機構と右巻きニュートリノによるシーソー機構について述べる。第 3 章では、モジュラー対称性について述べる。第 4 章において、我々が構築した模型を紹介する。第 5 章では、模型の预言について述べる。最後に第 6 章では、本研究の結論について述べる。また、本研究において必要な計算式を付録にまとめた。付録 A では、 A_4 群の計算則をまとめた。付録 B では、モジュラー形式を導出した。

第2章 標準模型とその問題

この章では、まず素粒子物理学における標準模型と、そのヒッグス機構による質量獲得機構について説明する。次に、標準模型の枠組みでは説明できないニュートリノ振動実験結果をあげて、ニュートリノの微小質量とその世代間混合について説明する。続いて、ニュートリノの微小質量の起源を解明するために、右巻きニュートリノの導入によるシーソー機構について説明し、ニュートリノの世代間混合を説明するためにフレーバー対称性の必要性について説明する。

2.1 標準模型

標準模型 [1-3] は $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ対称性に基づき、素粒子間の相互作用を記述する。標準模型の予言は、多くの実験で検証され、その観測結果は非常に高い精度で整合した。この節では、素粒子物理学を議論する際に必要不可欠であるその標準模型について説明する。

標準模型のラグランジアン \mathcal{L}_{SM} は、ゲージ固定項は無視して

$$\mathcal{L}_{\text{SM}} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_\Phi + \mathcal{L}_Y \quad (2.1)$$

と記述され、右辺の各項は

$$\text{ゲージ場: } \mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}F_{G\mu\nu}^A F_G^{A\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{A\mu\nu}^a F_A^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{B\mu\nu} F_B^{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

$$\text{フェルミオン場: } \mathcal{L}_F = \sum_{\psi} \bar{\psi} i \not{D} \psi, \quad (2.3)$$

$$\text{ヒッグス場: } \mathcal{L}_H = |D_\mu H|^2 - V(H), \quad (2.4)$$

$$\text{湯川相互作用: } \mathcal{L}_Y = \left[-y_{\alpha\beta}^{(e)} \bar{L}_\alpha H (e_R)_\beta - y_{\alpha\beta}^{(u)} (\bar{Q}_L)_\alpha \tilde{H} (u_R)_\beta - y_{\alpha\beta}^{(d)} (\bar{Q}_L)_\alpha H (d_R)_\beta \right] + h.c. \quad (2.5)$$

である。ここで、 $\tilde{H} = i\tau_2 H^*$ を表す。 $y_{\alpha\beta}^{(i)}$, ($i = e, u, d$) は湯川結合定数、 ψ は標準模型における全てのフェルミオンを表す。また、場の強さは

$$F_{G\mu\nu}^A = \partial_\mu G_\nu^A - \partial_\nu G_\mu^A + g_S f^{ABC} G_\mu^B G_\nu^C, \quad (2.6)$$

$$F_{A\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g \epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (2.7)$$

$$F_{B\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (2.8)$$

である。添字 $A = 1, 2, \dots, 8$ は $SU(3)_C$ に対して、添字 $a = 1, 2, 3$ は $SU(2)_L$ に対して、添字 $\mu = 0, 1, 2, 3$ はローレンツ対称性に対して、添字 α, β はレプトン (e, μ, τ)、アップ型クォーク (u, c, t)、ダウン型クォーク (d, s, b) フェルミオンのそれぞれ3世代に対して、添字 L, R はカイラ

場	表記	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$	スピン
クォーク (L)	$(Q_L)_\alpha = \begin{pmatrix} (u_L)_\alpha \\ (d_L)_\alpha \end{pmatrix}$	3	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
アップ型クォーク (R)	$(u_R)_\alpha$	$\bar{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	
ダウン型クォーク (R)	$(d_R)_\alpha$	$\bar{3}$	1	$\frac{2}{3}$	
レプトン (L)	$L_\alpha = \begin{pmatrix} (\nu_L)_\alpha \\ (e_L)_\alpha \end{pmatrix}$	1	2	-1	
レプトン (R)	$(e_R)_\alpha$	1	1	-2	
$SU(3)_C$ ゲージ場	G_μ	8	1	0	1
$SU(2)_L$ ゲージ場	W_μ	1	3	0	
$U(1)_Y$ ゲージ場	B_μ	1	1	0	
ヒッグス場	$H = \begin{pmatrix} h_+ \\ h_0 \end{pmatrix}$	1	2	0	0

表 2.1: 標準模型における各場とその電荷、およびスピン

リティに対する添字である。共変微分、およびヒッグスポテンシャルは次のようになる。

$$D_\mu \psi = \left[\partial_\mu - ig_3 G_\mu^A \hat{T}_3^A - ig_2 A_\mu^a \hat{T}_2^a - \frac{i}{2} g_1 B_\mu Y \right] \psi, \quad (2.9)$$

$$D_\mu H = \left[\partial_\mu - ig_2 A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} - i \frac{g_1}{2} B_\mu \right] H, \quad (2.10)$$

$$V(H) = -\mu^2 |H|^2 + \lambda |H|^4. \quad (2.11)$$

標準模型における各場のゲージ対称性の表現と電荷、およびスピンは、表 2.1 にまとめた。

2.1.1 ヒッグス機構によるフェルミオン質量

次に、標準模型におけるフェルミオンの質量項を説明する。ヒッグス場が真空期待値を持つと $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ対称性は自発的に破れる。

$$\langle H \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \langle \tilde{H} \rangle = \begin{pmatrix} \frac{v}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

ここで、 v はヒッグス場の真空期待値を表し、 $v = \mu/\sqrt{\lambda} = 246$ GeV である。このとき、湯川相互作用ラグランジアン $\mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_{\text{mass}}^{(e)} + \mathcal{L}_{\text{mass}}^{(u)} + \mathcal{L}_{\text{mass}}^{(d)}$ にフェルミオンの質量項が生じる。例として荷電レプトンの質量項を下記に示す。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{mass}}^{(e)} &= -y_{\alpha\beta}^{(e)} \bar{L}_\alpha \langle H \rangle (e_R)_\beta + h.c. = -y_{\alpha\beta}^{(e)} \begin{pmatrix} \overline{(\nu_L)_\alpha} & \overline{(e_L)_\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} (e_R)_\beta + h.c. \\ &= -\frac{v}{\sqrt{2}} y_{\alpha\beta}^{(e)} \overline{(e_L)_\alpha} (e_R)_\beta + h.c. \\ &= -M_{ii}^{(e)} \overline{(e'_L)_i} (e'_R)_i + h.c. = -M_{ii}^{(e)} \bar{e}'_i e'_i. \end{aligned} \quad (2.13)$$

ここで、 $y_{\alpha\beta}^{(e)}$ の対角化を行って、ゲージ固有状態から質量固有状態へ移行し、添字 i はレプトンの質量固有状態を表す。アップ型クォーク、ダウン型クォークも同様に質量固有状態で表記すると

$$M_{\text{diag}}^{(e)} = \text{diag}(m_e, m_\mu, m_\tau) = U_L^{(e)\dagger} M^{(e)} U_R^{(e)}, \quad (2.14)$$

$$M_{\text{diag}}^{(u)} = \text{diag}(m_u, m_c, m_t) = U_L^{(u)\dagger} M^{(u)} U_R^{(u)}, \quad (2.15)$$

$$M_{\text{diag}}^{(d)} = \text{diag}(m_d, m_s, m_b) = U_L^{(d)\dagger} M^{(d)} U_R^{(d)}. \quad (2.16)$$

このように左巻きと右巻きを組み合わせて作った質量項をディラック質量と呼ぶ。ディラック質量項は、そのフェルミオンが持っているチャージ (たとえば、レプトン数) を保存する。標準模型において右巻きカイラリティを持たないニュートリノがディラック質量項を持たないことは注目すべきことである。一方、カイラリティが同じものを組み合わせて出来た質量項をマヨラナ質量と呼ぶ。マヨラナ質量項があるとチャージ保存が破れる。従って、標準理論の中性のニュートリノのみ、マヨラナ質量を持ち得るフェルミオンである。

ここでフェルミオン質量行列 (2.14, 2.15, 2.16) を対角化するユニタリ行列はそれぞれ

$$e'_L \equiv U_L^{(e)} e_L, \quad u'_L \equiv U_L^{(u)} u_L, \quad d'_L \equiv U_L^{(d)} d_L, \quad (2.17)$$

$$e'_R \equiv U_R^{(e)} e_R, \quad u'_R \equiv U_R^{(u)} u_R, \quad d'_R \equiv U_R^{(d)} d_R \quad (2.18)$$

の関係を持ち、フェルミオンのゲージ固有状態を質量固有状態へ変える。特に、クォークに対するユニタリ行列はクォークの荷電カレント

$$J_q^\mu = \bar{u}_L \gamma^\mu d_L = \bar{u}'_L \gamma^\mu \left(U_L^{(u)} U_L^{(d)\dagger} \right) d'_L \quad (2.19)$$

との弱い相互作用におけるクォークのフレーバー混合を表す Cabibbo–Kobayashi–Maskawa (CKM) 行列 [66, 67] を以下のように構成する。

$$\begin{aligned} V_{\text{CKM}} &\equiv U_L^{(u)} U_L^{(d)\dagger} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{23}^q & \sin \theta_{23}^q \\ 0 & -\sin \theta_{23}^q & \cos \theta_{23}^q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_{13}^q & 0 & \sin \theta_{13}^q e^{-i\delta_{\text{CP}}^q} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_{13}^q e^{i\delta_{\text{CP}}^q} & 0 & \cos \theta_{13}^q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_{12}^q & \sin \theta_{12}^q & 0 \\ -\sin \theta_{12}^q & \cos \theta_{12}^q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$(2.21)$$

ここで θ_{ij}^q , ($i, j = 1, 2, 3; i < j$) はクォークセクターの混合角を表し ($0 < \theta_{ij} \leq \pi/2$) である。 δ_{CP}^q , ($-\pi \leq \delta_{\text{CP}}^q < \pi$) はクォークの混合行列が持つ CP 対称性を破る位相パラメータである。

2.1.2 ヒッグス機構によるゲージボソンの質量

ヒッグス機構によってゲージ対称性は $SU(2)_L \times U(1)_Y$ から電磁相互作用の $U(1)_{\text{EM}}$ へ自発的に破れ、ウィークボソンは質量を獲得する。 $SU(2)_L$ と $U(1)_Y$ のゲージ場の混合状態から、弱い相互作用と電磁相互作用を媒介するゲージボソンが得られる。 A_μ^1 と A_μ^2 の混合状態からは荷電 W ボソン W_μ^\pm 、 A_μ^3 と B_μ の混合状態からは中性 Z ボソン Z_μ^0 と光子 A_μ が現れる。 W, Z ボソンは弱い相互作用を、光子は電磁相互作用を媒介する。

$$W_\mu^\pm = \frac{A_\mu^1 \mp iA_\mu^2}{\sqrt{2}}, \quad Z_\mu^0 = \frac{g_2 A_\mu^3 - g_1 B_\mu}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}}, \quad A_\mu = \frac{g_1 A_\mu^3 + g_2 B_\mu}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}}. \quad (2.22)$$

2.2 標準模型の課題: ニュートリノの質量

本博士論文では、標準模型の課題としてニュートリノの質量について注目する。そこで、まず素粒子ニュートリノの性質について説明する。CERN(Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire)のLEP(Large Electron Positron collider)を用いて行われた Z ボソン崩壊の観測より、ニュートリノの世代数が検証された。

Z^0 とフェルミオン対の中性カレント J_0^μ との相互作用は、

$$\mathcal{L} = -\sqrt{g_2^2 + g_1^2} Z_0^\mu J_0^\mu \quad (2.23)$$

与えられる。この相互作用に通して、 Z^0 はフェルミオンと反フェルミオンに崩壊する:

$$Z^0 \rightarrow f + \bar{f}. \quad (2.24)$$

Z^0 の質量が $m_Z \simeq 91\text{GeV}$ なので、生成されるフェルミオンの質量は $m_Z/2$ を超えられない。従って、トップクォークを除くクォーク 5 種類、荷電レプトン 3 世代、ニュートリノが生成できる。但し、ニュートリノは電荷を持たず、相互作用が極めて小さいため、実験装置で直接検出できない。ニュートリノは Z^0 の全崩壊幅と、観測された部分崩壊幅を足し合わせたものの差より、間接的に部分崩壊幅を求められる。 Z^0 の全崩壊幅 Γ_Z 、観測された部分崩壊幅 Γ_{obs} 、そして、ニュートリノ世代数を N_G 、ニュートリノ 1 世代分の部分崩壊幅を Γ_ν とすると

$$\Gamma_Z - \Gamma_{\text{obs}} = N_G \Gamma_\nu \quad (2.25)$$

と表される。観測から

$$\frac{\Gamma_Z - \Gamma_{\text{obs}}}{\Gamma_\nu} = N_G = 2.994 \pm 0.012 \quad (2.26)$$

という実験値 [68] が得られ、ニュートリノの世代数は 3 であることが示唆された。

標準模型はニュートリノの質量を予言しないが、ニュートリノが質量ゼロになることを要請することではない。更に、3 世代あるニュートリノが縮退してない質量を持つと、クォークと同様に世代間混合が起こりうる。このような現象をニュートリノ振動という。そして、自然系からの大気・太陽ニュートリノと、人工的に原子炉・加速器で生成されたニュートリノよりニュートリノ振動は実際に観測されてきたので、ニュートリノがゼロでない質量を持つという決定的な証拠を与えた。

2.2.1 ニュートリノ振動

ニュートリノ質量の存在を示したフレーバー間の振動現象について説明する。簡単のため、真空中のニュートリノ振動の確率を議論する。ニュートリノが質量を持つと、ゲージ固有状態 $|\nu_\alpha\rangle$ は質量固有状態 $|\nu_i\rangle$ の線形結合で表される。

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i (U_L^\nu)_{\alpha i} |\nu_i\rangle. \quad (2.27)$$

$(U_L^\nu)_{\alpha i}$ は世代間混合を表すユニタリ行列である。ゲージ固有状態の時間発展

$$\begin{aligned} |\nu_\alpha(t)\rangle &= \sum_i (U_L^\nu)_{\alpha i} |\nu_i(t)\rangle = \sum_i (U_L^\nu)_{\alpha i} e^{-iE_i t} |\nu_i(0)\rangle \\ &= \sum_i (U_L^\nu)_{\alpha i} e^{-iE_i t} \sum_\beta (U_L^\nu)_{\beta i}^* |\nu_\beta(0)\rangle \\ &= \sum_{i,\beta} (U_L^\nu)_{\alpha i} (U_L^\nu)_{\beta i}^* e^{-iE_i t} |\nu_\beta(0)\rangle \end{aligned} \quad (2.28)$$

を用いて、異なる世代間の遷移振幅を求めると

$$\begin{aligned}
\langle \nu_\beta(0) | \nu_\alpha(t) \rangle &= \langle \nu_\beta(0) | \sum_{i,\gamma} (U_L^\nu)_{\alpha i} (U_L^\nu)_{\gamma i}^* e^{-iE_i t} | \nu_\gamma(0) \rangle \\
&= \sum_{i,\gamma} (U_L^\nu)_{\alpha i} (U_L^\nu)_{\gamma i}^* e^{-iE_i t} \delta_{\beta\gamma} \\
&= \sum_i (U_L^\nu)_{\alpha i} (U_L^\nu)_{\beta i}^* e^{-iE_i t}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

が得られる。ここで、相対論的に伝搬するニュートリノ ν_i のエネルギー E_i を、異なる質量のニュートリノが等しい運動量を持つことを仮定の上、運動量 \mathbf{p} と質量 m_i で用いて

$$E_i = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_i^2} \simeq |\mathbf{p}| + \frac{m_i^2}{2|\mathbf{p}|} \tag{2.30}$$

と書き換える。式 (2.29, 2.30) を用いて遷移確率を求めると

$$\begin{aligned}
P_{\alpha \rightarrow \beta} &= |\langle \nu_\beta(0) | \nu_\alpha(t) \rangle|^2 = \sum_{i,j} (U_L^\nu)_{\alpha i} (U_L^\nu)_{\beta i}^* (U_L^\nu)_{\alpha j}^* (U_L^\nu)_{\beta j} \exp[-i(E_i - E_j)t] \\
&= \sum_{i,j} (U_L^\nu)_{\alpha i} (U_L^\nu)_{\beta i}^* (U_L^\nu)_{\alpha j}^* (U_L^\nu)_{\beta j} \exp\left[-i \frac{\Delta m_{ij}^2}{2|\mathbf{p}|} t\right], \quad (\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2) \\
&= \delta_{\alpha\beta} + \sum_{i,j} (U_L^\nu)_{\alpha i} (U_L^\nu)_{\beta i}^* (U_L^\nu)_{\alpha j}^* (U_L^\nu)_{\beta j} \left(\exp\left[-i \frac{\Delta m_{ij}^2}{2|\mathbf{p}|} t\right] - 1 \right).
\end{aligned} \tag{2.31}$$

が得られる。ここで、

$$\sum_{i,j} (U_L^\nu)_{\alpha i} (U_L^\nu)_{\beta i}^* (U_L^\nu)_{\alpha j}^* (U_L^\nu)_{\beta j} = \sum_i (U_L^\nu)_{\alpha i} (U_L^\nu)_{\beta i}^* \sum_j (U_L^\nu)_{\alpha j}^* (U_L^\nu)_{\beta j} = \delta_{\alpha\beta} \cdot \delta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \tag{2.32}$$

を用いた。ニュートリノの質量がゼロの場合、または、ノンゼロであっても縮退している場合、 $\Delta m_{ij}^2 = 0$ になり、ニュートリノ振動は起こらず、 $\Delta m_{ij}^2 \neq 0$ の場合のみ、 $\alpha \neq \beta$ に対してニュートリノ振動確率

$$P_{\alpha \rightarrow \beta} = \sum_{i,j} (U_L^\nu)_{\alpha i} (U_L^\nu)_{\beta i}^* (U_L^\nu)_{\alpha j}^* (U_L^\nu)_{\beta j} \left(\exp\left[-i \frac{\Delta m_{ij}^2}{2|\mathbf{p}|} t\right] - 1 \right) \tag{2.33}$$

が得られる。2次宇宙線の π 中間子がミュオンに崩壊して生成される ν_μ (大気ニュートリノ) と、太陽の核融合より生成される ν_e (太陽ニュートリノ) からのニュートリノ振動実験より、2つの質量二乗差 $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$ が観測された。但し、質量 m_3 の ν_3 が一番重いのか一番軽いのかはまだ実験からは分かっていない。従って二つの質量階層性が考えられる:

$$\text{順階層性} \begin{cases} m_1 < m_2 \ll m_3 & (\text{Normal Hierarchy, (NH)}) \\ \Delta m_{\text{sol}}^2 = m_2^2 - m_1^2, & \Delta m_{\text{atm}}^{2(\text{NH})} = m_3^2 - m_1^2 \end{cases}, \tag{2.34}$$

$$\text{逆階層性} \begin{cases} m_3 \ll m_1 < m_2 & (\text{Inverted Hierarchy, (IH)}) \\ \Delta m_{\text{sol}}^2 = m_2^2 - m_1^2, & \Delta m_{\text{atm}}^{2(\text{IH})} = m_3^2 - m_2^2 \end{cases}. \tag{2.35}$$

従って、ニュートリノ 3 世代の内、少なくとも 2 世代がゼロでない起源不明の質量を持たなければならない。このニュートリノの微小質量を説明するために、標準模型を超える新物理の探索が重要な課題となった。

2.2.2 レプトンの混合行列

上の議論から、ニュートリノ振動実験結果よりニュートリノにも世代間混合が生じることがわかった。レプトンに対するユニタリ行列は、式 (2.19) と同様にレプトンの荷電カレント

$$J_e^\mu = \bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L = \bar{\nu}'_L \left(U_L^{(e)\dagger} U_L^{(\nu)} \right)^\dagger \gamma^\mu e'_L \quad (2.36)$$

との弱い相互作用におけるレプトンのフレーバー混合を表す Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS) 行列 [69, 70] を以下のように構成する。

$$U_{\text{PMNS}} \equiv U_L^{(e)\dagger} U_L^{(\nu)} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{\text{CP}}} \\ -c_{23}s_{12} - s_{23}c_{12}s_{13}e^{i\delta_{\text{CP}}} & c_{23}c_{12} - s_{23}s_{12}s_{13}e^{i\delta_{\text{CP}}} & s_{23}c_{13} \\ s_{23}s_{12} - c_{23}c_{12}s_{13}e^{i\delta_{\text{CP}}} & -s_{23}c_{12} - c_{23}s_{12}s_{13}e^{i\delta_{\text{CP}}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \times \text{diag}(1, e^{\frac{i}{2}\alpha_{21}}, e^{\frac{i}{2}\alpha_{31}}). \quad (2.37)$$

$\cos \theta_{ij}, \sin \theta_{ij} (0 < \theta_{ij} \leq \pi/2, i, j = 1, 2, 3; i < j)$ を c_{ij}, s_{ij} と簡略に表記した。 $\delta_{\text{CP}} (-\pi \leq \delta_{\text{CP}} < \pi)$ はレプトンセクターのディラック位相、 $\alpha_{21}, \alpha_{31} (0 \leq \alpha_{i1} < 2\pi)$ はマヨラナ位相であり、ニュートリノの混合行列が持つ CP 対称性を破る位相パラメータである。このレプトンのフレーバーの混合の様相は、クォークと大きく異なり、ニュートリノ振動の精密測定による 3 つの混合角と 2 つの質量二乗差の測定値を表 2.2 に示した [62]。

observable	3σ CI for NH	3σ for IH
$\sin^2 \theta_{12}$	0.269 → 0.343	0.269 → 0.343
$\sin^2 \theta_{23}$	0.415 → 0.616	0.419 → 0.617
$\sin^2 \theta_{13}$	0.02032 → 0.02410	0.02052 → 0.02428
Δm_{21}^2	$(6.82 \rightarrow 8.04) \times 10^{-5} \text{ eV}^2$	$(6.82 \rightarrow 8.04) \times 10^{-5} \text{ eV}^2$
$\Delta m_{3\ell}^2$	$+(2.435 \rightarrow 2.598) \times 10^{-3} \text{ eV}^2$	$-(2.581 \rightarrow 2.414) \times 10^{-3} \text{ eV}^2$

表 2.2: NuFIT5.0 [62] 3σ 範囲のニュートリノ振動実験の値

PMNS 行列の成分 $U_{\alpha i}$ を用いてレプトン混合角、およびディラック CP 位相の表し方を下記に示す。

$$\sin^2 \theta_{12} = \frac{|U_{e2}|^2}{1 - |U_{e3}|^2}, \quad \sin^2 \theta_{23} = \frac{|U_{\mu 3}|^2}{1 - |U_{e3}|^2}, \quad \sin^2 \theta_{13} = |U_{e3}|^2, \quad (2.38)$$

$$J_{\text{CP}} = \text{Im} [U_{e1} U_{\mu 2} U_{\mu 1}^* U_{e2}^*], \quad \sin \delta_{\text{CP}} = \frac{J_{\text{CP}}}{s_{23} c_{23} s_{12} c_{12} s_{13} c_{13}^2}. \quad (2.39)$$

2.2.3 ニュートリノを放出しない二重ベータ崩壊

ニュートリノの性質を示すもう一つ重要な実験として、ニュートリノを放出しない二重ベータ崩壊が上げられる。二重ベータ崩壊は原子核中の 2 つの中性子のほぼ同時に崩壊する、まれに起こるベータ崩壊である。

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e. \quad (2.40)$$

一方、ニュートリノがマヨラナ粒子ならば、終状態においてニュートリノを放出しない二重ベータ崩壊 (neutrinoless double beta decay,) が起こりうる。片方で放出されたニュートリノがそれ自身の反粒子であるため、もう一方の核子に吸収される現象である。

$$2n \longrightarrow 2p + 2e^-. \quad (2.41)$$

この場合、放出された電子の運動エネルギーの合計は初期状態と最終状態の原子核の結合エネルギーの差に等しい。ニュートリノ振動実験より、ニュートリノの質量がゼロでないことが示唆されたが、 $0\nu\beta\beta$ 崩壊はニュートリノがディラック粒子、マヨラナ粒子どちらなのかを示す重要な実験である。更に、2つの電弱荷電カレント $e^- \rightarrow W^- \bar{\nu}_L$ の間の相互作用より得られる確率振幅は、ニュートリノ ν_e の有効質量 m_{eff} に比例する。つまり、

$$\mathcal{A} \propto m_{\text{eff}}, \quad m_{\text{eff}} \equiv \left| \sum_i^3 m_i U_{ei}^2 \right| \quad (2.42)$$

と表される。 $0\nu\beta\beta$ 崩壊が観測されれば、ニュートリノが本当にマヨラナ粒子であることが明らかになり、ニュートリノの質量がわかるので、この現象を観測するため実験が実施され、提案されている。近年、KamLAND-Zen collaboration [64] 実験において m_{eff} の上限が報告された。

$$m_{\text{eff}} < (61 - 165) \text{ meV} \quad (2.43)$$

2.3 標準模型の拡張

標準模型の枠組みでニュートリノの質量の起源を解明するため、ワインバーグ演算子 [71]

$$\mathcal{L} = \frac{y^{(\nu)}}{\Lambda} \bar{L}^c L H H, \quad (2.44)$$

が提案された。ニュートリノの微小質量を実現するために、カットオフスケール Λ は GUT スケール ($M_{\text{GUT}} \sim 10^{15} \text{ GeV}$) に近く、これよりワインバーグ演算子の起源が高いエネルギーにおける現象にある可能性が示唆された。しかし、質量次元 5 を持つためくりこみ不可能であるできない問題があった。

問題を打破するために、右巻きマヨラナニュートリノ ν_R の導入による標準模型を超える物理が考えられた。 ν_R よりニュートリノはディラック質量とマヨラナ質量が持てるようになる。更に、 ν_R のマヨラナ質量がディラック質量より遥かに大きくなると、標準模型のニュートリノの質量が微小になることが示される、シーソー機構が提案された [13–17]。

2.3.1 右巻きニュートリノの導入によるシーソー機構

3世代の右巻きニュートリノ $(\nu_R)_i, (i = 1, 2, 3)$ を導入して標準模型を拡張すると、そのラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{\text{BSM}} = \mathcal{L}_{\text{SM}} + i\bar{\nu}_{Ri}\not{\partial}\nu_{Ri} + \left[-y_{\alpha i}^{(\nu)} \bar{L}_\alpha \tilde{H} \nu_{Ri} - \frac{(M_M)_{ij}}{2} \bar{\nu}_{Ri}^c \nu_{Rj} \right]_{\text{mass}} + h.c.. \quad (2.45)$$

と表される。ここで、 $y_{\alpha i}^{(\nu)}$ は左巻きレプトン、右巻きニュートリノ、ヒッグス場の湯川結合定数、 M_M は右巻きニュートリノのマヨラナ質量を表す。ヒッグス場が真空期待値を持ち、電弱対称性が自発的に破れると、ニュートリノはディラック質量 M_D を以下のように持つ。

$$M_D \equiv y^{(\nu)} \langle H \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} y^{(\nu)}. \quad (2.46)$$

従って、ニュートリノの質量項は

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_{\text{mass}}^{(\nu)} &= (M_D)_{\alpha i} \overline{\nu_{L\alpha}} \nu_{Ri} + \frac{(M_M)_{ij}}{2} \overline{\nu_{Ri}^c} \nu_{Rj} + h.c. \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \overline{\nu_L} & \overline{\nu_R^c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & M_D \\ M_D^T & M_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R \end{pmatrix} + h.c., \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\widehat{M} = \begin{pmatrix} 0 & M_D \\ M_D^T & M_M \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

と表すことができる。ここで重要な仮定として、 $M_D \ll M_M$ を考え、この仮定より 6×6 対称行列の質量行列 \widehat{M} を、ユニタリ行列 \widehat{U}_1 を用いて近似的にブロック対角化する。但し、ユニタリ行列 \widehat{U}_1 は、 3×3 複素行列 $|\Theta| \ll 1$ を用いた近似的なユニタリ行列で、

$$\widehat{U}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \Theta \\ -\Theta^\dagger & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \widehat{U}_1^\dagger \widehat{U}_1 = \widehat{U}_1 \widehat{U}_1^\dagger = \begin{pmatrix} \mathbf{1} + \Theta \Theta^\dagger & 0 \\ 0 & \mathbf{1} + \Theta^\dagger \Theta \end{pmatrix} = \mathbf{1} + \mathcal{O}(\Theta^2). \quad (2.49)$$

と定義する。従って、 \widehat{U}_1 を使って \widehat{M} をブロック対角化すると

$$\begin{aligned} \widehat{M}^{BD} &= \widehat{U}_1^\dagger \widehat{M} \widehat{U}_1^* \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\Theta \\ \Theta^\dagger & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & M_D \\ M_D^T & M_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \Theta^* \\ -\Theta^T & \mathbf{1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\Theta M_D^T - M_D \Theta^T + \Theta M_M \Theta^T & M_D - \Theta M_M - \Theta M_D^T \Theta^* \\ M_D^T - M_M \Theta^T - \Theta^\dagger M_D \Theta^T & M_M + M_D^T \Theta^* + \Theta^\dagger M_D + \mathcal{O}(\Theta^2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

$\mathcal{O}(\Theta^2)$ を無視し、仮定 $M_D \ll M_M$ よりブロック対角化の条件 $\Theta \simeq M_D M_M^{-1}$ ($|\Theta| \ll 1$) を用いて

$$\widehat{M}^{BD} = \begin{pmatrix} M_\nu & 0 \\ 0 & M_N \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

$$M_N \simeq M_M \quad (2.52)$$

$$M_\nu \simeq -M_D M_M^{-1} M_D^T \quad (2.53)$$

が得られる。 $M_N = \text{diag}(M_1, M_2, M_3)$ は対角化された右巻きニュートリノの質量行列である。対称行列であるシーソー行列 M_ν は M_M が大きくなるにつれて小さくなり、即ち自然にニュートリノの微小質量が説明できる。更に、 M_ν も対角化すると

$$U_{\text{PMNS}}^\dagger M_\nu U_{\text{PMNS}}^* = D_\nu = \text{diag}(m_1, m_2, m_3) \quad (2.54)$$

が得られる。 \widehat{M} のブロック対角化に用いられた \widehat{U}_1 と M_ν の対角化に用いられたユニタリ行列 U を取り入れ \widehat{M}^{BD} を完全に対角化させる

$$\widehat{U}_2 = \begin{pmatrix} U_{\text{PMNS}} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

を組み合わせた

$$\widehat{U} = \widehat{U}_1 \widehat{U}_2 = \begin{pmatrix} U_{\text{PMNS}} & \Theta \\ -\Theta^\dagger U_{\text{PMNS}} & \mathbf{1} \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

は、ニュートリノのゲージ固有状態から質量固有状態への変換の役割を担う:

$$\begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^c \end{pmatrix} = \widehat{U} \begin{pmatrix} \nu \\ N^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{\text{PMNS}} & \Theta \\ -\Theta^\dagger U_{\text{PMNS}} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ N^c \end{pmatrix}, \quad (2.57)$$

$$(\nu_L)_\alpha = U_{\text{PMNS}\alpha i} \nu_i + \Theta_{\alpha I} (N^c)_I, \quad (2.58)$$

$$(\nu_R^c)_I = (N^c)_I - (\Theta^\dagger U_{\text{PMNS}})_{Ii} \nu_i. \quad (2.59)$$

従って、シーソー機構の仮定 ($|\Theta| \ll 1$) より、式 (2.54) の U が PMNS 行列そのものになることがわかり、右巻きニュートリノと重いニュートリノはほぼ同じ状態であることが導かれる。また、 \widehat{U} を用いて、次のように \widehat{M} を完全に対角化する。

$$\begin{aligned} \widehat{U}^\dagger \widehat{M} \widehat{U}^* &= \widehat{U}_2^\dagger \widehat{U}_1^\dagger \widehat{M} \widehat{U}_1^* \widehat{U}_2^* = \widehat{U}_2^\dagger \begin{pmatrix} M_\nu & 0 \\ 0 & M_N \end{pmatrix} \widehat{U}_2^* = \begin{pmatrix} D_\nu & 0 \\ 0 & M_N \end{pmatrix} \\ &= \text{diag}(m_1, m_2, m_3, M_1, M_2, M_3). \end{aligned} \quad (2.60)$$

ここで、 $m_i (i = 1, 2, 3)$ は軽いニュートリノ (Active neutrino) ν の質量、 $M_I (I = 1, 2, 3)$ は重いニュートリノ (Sterile neutrino) N の質量になる。

2.3.2 フレーバー対称性

ニュートリノの質量起源の以外にも標準模型の枠組みで説明できない問題がある。

例えば、まず、標準模型には同じゲージチャージを持つフェルミオンが 3 世代存在するが、世代が 3 世代になる理由、また、その世代ごと質量が大きく異なる理由について説明ができない。次に、クォーク混合の測定値 [72]

$$V_{\text{CKM}} \sim \begin{pmatrix} 0.9737 & 0.2245 & 0.0038 \\ 0.221 & 0.987 & 0.041 \\ 0.008 & 0.039 & 1.013 \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

は、 $\lambda \simeq 0.2$ とすると

$$V_{\text{CKM}} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^3 \\ \lambda & 1 & \lambda^2 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

のような階層性が示唆される。しかし、なぜクォークの混合にこのような階層性が存在するか説明できない。一方、レプトン混合の測定値

$$U_{\text{PMNS}} \sim \begin{pmatrix} 0.825 & 0.545 & 0.149 \\ 0.242 & 0.608 & 0.756 \\ 0.495 & 0.578 & 0.649 \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

は、クォーク混合のような階層性がなく、大きい値を持つことがニュートリノ振動実験結果 [62] より分かった。従って、レプトンの混合が大きい理由およびクォークとレプトンの混合の様相がことなる理由についても説明ができない。このように、フレーバーの構造に関するフレーバー問題が、標準模型の未解決問題として残っている。

2011 年、 θ_{13} がゼロでないことが確認される [73, 74] 以前、ニュートリノ振動実験結果を説明する U_{PMNS} の構造として、以下のような Tri-bimaximal mixing (TBM) が提案されてきた [75, 76]。

$$U_{\text{TBM}} \sim \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} & \sqrt{1/3} & 0 \\ -\sqrt{1/6} & \sqrt{1/3} & -\sqrt{1/2} \\ -\sqrt{1/6} & \sqrt{1/3} & \sqrt{1/2} \end{pmatrix}. \quad (2.64)$$

式 (2.64) の右で示している TBM 混合は現在の結果とは 5σ レベルで排除されるが、フレーバー構造に関する問題を解くため、フェルミオンの世代間の入れ替え対称性であるフレーバー対称性を標準模型に新たに導入しそのフレーバー対称性が破れた結果として、フレーバー構造を説明する大きな動機となった。

例えば、TBM 構造が非可換離散対称性 A_4 より得られることが知られた [77, 78]。また、ゼロでない θ_{13} を予言するフレーバー模型 [79]、更に S_3, A_4, S_4, A_5 のように様々の対称性を起源とするフレーバー模型 [18–22] が提案され、フレーバー対称性の導入の有効性が示された。

このようなレプトンセクターの離散的対称性の起源として、2017 年、F. Feruglio によって、10 次元超弦理論における余剰次元のトーラスコンパクト化に伴い生じるモジュラー対称性が、その起源となり得ることが示された [23]。モジュラー対称性を離散的フレーバー対称性として考えると、湯川相互作用のポテンシャルは、離散的フレーバー対称性の非自明な表現を持つモジュラス τ の正則関数として記述される。湯川相互作用がこれらの特徴を持ち、より少ないパラメーターで標準模型のパラメーターを説明できるので魅力的な候補であることが指摘された [27]。

第3章 モジュラー対称性

通常の4次元時空の場の理論に比べて、重力を含む素粒子すべての相互作用を記述すると期待されている超弦理論は10次元時空に構築されている。そのため、4次元有効理論を考えるためには余剰6次元を十分小さい空間にコンパクト化する必要がある。コンパクト化された超弦理論は非可換離散対称性を持つこと [80–84] と、トーラスやオービフォールドコンパクト化を持つ超弦理論におけるモジュラー対称性がクォークやレプトンセクターのフレーバーにかかわること [85–90] が知られている。

本章ではまず、モジュラー対称性をレプトンセクターの離散的フレーバー対称性として持つ模型の構築の準備として、最も簡単なコンパクト化の一つであるトーラスコンパクト化を考え、トーラス上のモジュラー変換とその対称性について説明する。次に、モジュラー対称性を持つ超対称性理論の Kähler とモジュラー変換の関係について説明し、湯川相互作用の超ポテンシャルにどのような制限をするか説明する。

3.1 モジュラー群とその部分群

ここでは、モジュラー変換とモジュラー群、およびその部分群について説明する。まず、2次元トーラス空間 T^2 を2次元複素平面 \mathbb{C} 上で表す。この複素平面上の2次元格子 Λ の基底 (α_1, α_2) を考える ($T^2 = \mathbb{C}/\Lambda$)。基底 (α_1, α_2) は、実数 R と複素平面の上半平面の値をとるモジュラス $\tau \in \mathbb{C}$, ($\text{Im } \tau > 0$) を用いて $\alpha_1 = 2\pi R$, $\alpha_2 = 2\pi R\tau$ とする。トーラスを変えないで理論を保つ変換がある。つまり、格子 Λ 上に基底の取り方には任意性があり、

$$\begin{pmatrix} \alpha'_2 \\ \alpha'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}), \quad (3.1)$$

この変換を実行しても、トーラスは変わらない。ここで

$$SL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1 \right\} \equiv \Gamma \quad (3.2)$$

である。この変換をモジュラス $\tau \equiv \alpha_2/\alpha_1$ を用いて次のように表す。

$$\tau \rightarrow \tau' = \gamma\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad (3.3)$$

格子 Λ を保ったままモジュラスに作用する変換群をモジュラー群と呼び、 γ はその要素とする。式 (3.3) より、 γ と $-\gamma$ は τ に作用し同じ点に移すので、モジュラー群は $SL(2, \mathbb{Z})/\{\mathbb{I}, -\mathbb{I}\} \equiv \bar{\Gamma}$ と準同型になる。ここで $\mathbb{I} = \text{diag}(1, 1)$ は単位行列である。モジュラー群は2つの生成子 S と T を持ち、それぞれ

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

であり、モジュラス τ に対して

$$S : \tau \rightarrow -1/\tau, \quad (3.5)$$

$$T : \tau \rightarrow \tau + 1 \quad (3.6)$$

になる。 S と T は次のような代数的関係を満たす。

$$S^2 = \mathbb{I}, \quad (ST)^3 = \mathbb{I}. \quad (3.7)$$

更に、 Γ に \mathbb{I} を課して

$$\Gamma(N) = \{S, T | S^2 = \mathbb{I}, (ST)^3 = \mathbb{I}, T^N = \mathbb{I}\} \quad (3.8)$$

を得る。 $N = 1, 2$ に対して $\bar{\Gamma}(N) = \Gamma(N)/\{\mathbb{I}, -\mathbb{I}\}$ 、 $N > 2$ に対して $\bar{\Gamma}(N) = \Gamma(N)$ と定義する。群 $\bar{\Gamma}(N)$ はモジュラー群の無限部分群である。商群 $\Gamma_N \equiv \bar{\Gamma}/\bar{\Gamma}(N)$ がモジュラー群の有限部分群になり、有限モジュラー群と呼ばれる。群 Γ_N は $N = 2, 3, 4, 5$ に対して、それぞれ S_3, A_4, S_4, A_5 と同型である [91]。

モジュラーウェイト k , ($k \geq 0$ の偶数)、レベル N のモジュラー形式 $f(\tau)$ は、 $\Gamma(N)$ の下で

$$f(\gamma\tau) = (c\tau + d)^k f(\tau), \quad \gamma \in \Gamma(N), \quad (3.9)$$

と変換する τ の正則関数である。ここで、 $\Gamma_3 \simeq A_4$ の場合、モジュラーウェイト 2 の A_4 三重項である重要なモジュラー形式

$$Y^{A_4}(\tau) = \begin{pmatrix} Y_1(\tau) \\ Y_2(\tau) \\ Y_3(\tau) \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

を導入する。 $Y^{A_4}(\tau)$ の各成分の具体形は、デデキントのイータ関数 $\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$ を用いて

$$\begin{aligned} Y_1(\tau) &= \frac{i}{2\pi} \left(\frac{\eta'(\tau/3)}{\eta(\tau/3)} + \frac{\eta'((\tau+1)/3)}{\eta((\tau+1)/3)} + \frac{\eta'((\tau+2)/3)}{\eta((\tau+2)/3)} - \frac{27\eta'(3\tau)}{\eta(3\tau)} \right), \\ Y_2(\tau) &= \frac{-i}{\pi} \left(\frac{\eta'(\tau/3)}{\eta(\tau/3)} + \omega^2 \frac{\eta'((\tau+1)/3)}{\eta((\tau+1)/3)} + \omega \frac{\eta'((\tau+2)/3)}{\eta((\tau+2)/3)} \right), \\ Y_3(\tau) &= \frac{-i}{\pi} \left(\frac{\eta'(\tau/3)}{\eta(\tau/3)} + \omega \frac{\eta'((\tau+1)/3)}{\eta((\tau+1)/3)} + \omega^2 \frac{\eta'((\tau+2)/3)}{\eta((\tau+2)/3)} \right), \end{aligned} \quad (3.11)$$

と表現される [23]。ここで $\omega = e^{i2\pi/3}$ である。また、 $Y_1(\tau), Y_2(\tau), Y_3(\tau)$ は関係式 $Y_2^2 + 2Y_1Y_3 = 0$ を満たす。 $\eta(\tau)$ 関数は S, T 変換の下で

$$\eta(-1/\tau) = \sqrt{-i\tau} \eta(\tau), \quad \eta(\tau+1) = e^{i\pi/12} \eta(\tau), \quad (3.12)$$

と変換されるので、 $\eta(\tau)^{24}$ はモジュラーウェイト 12 のモジュラー形式になる。 $q = e^{2\pi i\tau}$ を使って、 $Y^{A_4}(\tau)$ を q -展開すると

$$\begin{aligned} Y_1(\tau) &= 1 + 12q + 36q^2 + 12q^3 + \dots, \\ Y_2(\tau) &= -6q^{1/3}(1 + 7q + 8q^2 + \dots), \\ Y_3(\tau) &= -18q^{2/3}(1 + 2q + 5q^2 + \dots) \end{aligned} \quad (3.13)$$

と与えられる。

3.2 モジュラー対称性を持つ超対称性理論

まず、 $\mathcal{N} = 1$ 大域的超対称性理論における湯川相互作用項を表す作用は、一般に

$$\mathcal{S} = \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} \mathcal{K}(\Phi, \bar{\Phi}) + \int d^4x d^2\theta \mathcal{W}(\Phi) + h.c. \quad (3.14)$$

で与えられる [87,92]。ここで、モジュラス τ と全ての「物質」カイラル超場 ϕ の集まり $\Phi(\tau, \phi^{(1)}, \dots, \phi^{(F)})$ を用いて、カイラル超場とその共役 $(\Phi, \bar{\Phi})$ で出来たゲージ不変な実関数である Kähler ポテンシャル $\mathcal{K}(\Phi, \bar{\Phi})$ と、カイラル超場 Φ で出来たゲージ不変な正則関数である超ポテンシャル $\mathcal{W}(\Phi)$ が与えられる。

モジュラー群 $\bar{\Gamma}$ の変換に対して不変な理論を要請するので、モジュラー変換 (3.3) の下で、モジュラーウェイト $-k_I$ を持つカイラル超場 $\phi^{(I)}$ の変換は

$$\begin{cases} \tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \\ \phi^{(I)} \rightarrow (c\tau + d)^{-k_I} \rho^{(I)}(\gamma) \phi^{(I)} \end{cases}, \quad (3.15)$$

で与えられる。ここで、 $\rho^{(I)}(\gamma)$ は $\gamma \in \Gamma_N$ のユニタリ表現を表す [92]。変換 (3.15) の下で作用 \mathcal{S} が不変になるために、超ポテンシャル \mathcal{W} のモジュラー不変性、および次のような Kähler 変換

$$\begin{cases} \mathcal{W}(\Phi) \rightarrow \mathcal{W}(\Phi) \\ \mathcal{K}(\Phi, \bar{\Phi}) \rightarrow \mathcal{K}(\Phi, \bar{\Phi}) + f(\Phi) + \bar{f}(\bar{\Phi}) \end{cases}, \quad (3.16)$$

の場合以外に Kähler ポテンシャルのモジュラー不変性を要請する。ここで、

$$\int d^2\theta d^2\bar{\theta} f(\Phi) = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \bar{f}(\bar{\Phi}) = 0 \quad (3.17)$$

になることから、Kähler 変換 (3.16) はラグランジアンを変えずに大域的超対称性における Kähler ポテンシャルの正則関数の実部だけシフトすることがわかる。Kähler 変換の場合以外に、モジュラス τ に対するモジュラー不変な Kähler ポテンシャルの典型的な例として

$$\mathcal{K}(\Phi, \bar{\Phi}) = -\log(-i\tau + i\bar{\tau}) \quad (3.18)$$

が考えられる。モジュラー変換の下で

$$\mathcal{K}(\Phi, \bar{\Phi}) \rightarrow \mathcal{K}(\Phi, \bar{\Phi}) + \log(c\tau + d) + \log(c\bar{\tau} + d) \quad (3.19)$$

になり、式 (3.18, 3.19) と整合することがわかる。 τ の真空期待値が与えられると、そのスカラー成分の運動項

$$\frac{\partial_\mu \bar{\tau} \partial^\mu \tau}{\langle -i\tau + i\bar{\tau} \rangle^{-2}} \quad (3.20)$$

はモジュラー変換の下で不変になる。一方、超ポテンシャル $\mathcal{W}(\Phi)$ に対してモジュラー不変の要請は厳しい制限を与える。超ポテンシャル $\mathcal{W}(\Phi)$ のカイラル超場 $\phi^{(I)}$ に対するベキ展開は

$$\mathcal{W}(\Phi) = \sum_n Y_{I_1, I_2, \dots, I_n}(\tau) \phi^{(I_1)} \phi^{(I_2)} \dots \phi^{(I_n)} \quad (3.21)$$

で与えられる。 $\phi^{(I_1)} \dots \phi^{(I_n)}$ の n 次項に対する結合定数 $Y_{I_1, I_2, \dots, I_n}(\tau)$ はモジュラー変換の下で

$$Y_{I_1, I_2, \dots, I_n}(\gamma\tau) = (c\tau + d)^{k_Y(n)} \rho(\gamma) Y_{I_1, I_2, \dots, I_n}(\tau), \quad (3.22)$$

のように変換するモジュラー形式である。従って、超ポテンシャルがモジュラー不変になるために、 $Y_{I_1, I_2, \dots, I_n}(\tau)$ のモジュラーウェイトとユニタリ表現は

$$k_Y(n) = \sum_n k_{I_n}, \quad \rho(\gamma) \prod_n \rho^{I_n} = \mathbb{I} \quad (3.23)$$

を要請し、超ポテンシャルのモジュラーウェイトは 0 にならなければならない。

次に、以上の議論を $\mathcal{N} = 1$ 局所的超対称性理論へ拡張する。局所的超対称性理論は重力場 (スピン 2) と物質場 (スピン < 2) を張り合わせる唯一の対称原理であり、超対称性理論のゲージ理論である超重力理論を考える。モジュラー不変な超重力理論 $\mathcal{G}(\Phi, \bar{\Phi})$ [92–97] は Kähler ポテンシャルと超ポテンシャルが独立でなく、

$$\mathcal{G}(\Phi, \bar{\Phi}) = \mathcal{K}(\Phi, \bar{\Phi}) + \log \mathcal{W}(\Phi) + \log \bar{\mathcal{W}}(\bar{\Phi}) \quad (3.24)$$

で記述される [45]。局所的超対称性理論における Kähler 変換は

$$\begin{cases} \mathcal{W}(\Phi) \rightarrow e^{-f(\Phi)} \mathcal{W}(\Phi) \\ \mathcal{K}(\Phi, \bar{\Phi}) \rightarrow \mathcal{K}(\Phi, \bar{\Phi}) + f(\Phi) + \bar{f}(\bar{\Phi}) \end{cases}, \quad (3.25)$$

になり [98]、 $\mathcal{G}(\Phi, \bar{\Phi})$ (3.24) は Kähler 変換 (3.25) の下で $\mathcal{K}(\Phi, \bar{\Phi})$ を $\mathcal{W}(\Phi)$ が補正して不変になる。

これより、Kähler ポテンシャル (3.18) に対して $f(\Phi) = \log(c\tau + d)$ を考えると、モジュラー変換を Kähler 変換として考えることができる。この場合、超ポテンシャルは

$$\mathcal{W}(\Phi) \rightarrow e^{-f(\Phi)} \mathcal{W}(\Phi) = e^{-\log(c\tau + d)} \mathcal{W}(\Phi) = (c\tau + d)^{-1} \mathcal{W}(\Phi), \quad (3.26)$$

になり、従って超ポテンシャルはモジュラーウェイト -1 のゲージ不変なモジュラー形式にならなければならない。

3.2.1 離散的フレーバー対称性とモジュラー対称性

これまで議論されてきた A_4 対称性を持つレプトンフレーバー模型はフラボンの導入を必要とした [18, 19, 21, 99, 100]。2017 年、モジュラー対称性を起源とするフレーバー対称性はモジュラス τ の真空期待値だけでその対称性が破れることより、フラボンを導入しないフレーバー模型が F. Feruglio によって提唱された [23]。

一方、小林らのモジュラー A_4 対称性を持つレプトンフレーバー模型 [27] はフラボンを導入せず、ワインバーグ演算子または 3 つの右巻きニュートリノによるシーソー機構を通じてニュートリノの微小質量とその大きい混合パターンを説明できることを示した。この模型 [27] は、最小超対称標準模型 (Minimal Supersymmetric Standard Model, MSSM) を基にしているため、式 (3.16) によって超ポテンシャルはモジュラーウェイト 0 を持つ。また、モジュラー対称性はコンパクト化スケールでモジュラス τ の真空期待値で破れ、超対称性 (Supersymmetry, SUSY) は $M_N \ll M_{\text{SUSY}} < M_{\text{compact}} < M_P$ のスケールで破れているというセットアップを仮定した。更に、模型のモジュラス τ がニュートリノ振動実験結果を再現できる領域は $\text{Re } \tau = \pm(0.25 - 0.31), \pm(0.46 - 0.54), \pm(0.66 - 0.75), \pm(1.25 - 1.31), \pm(1.46 - 1.50)$ の値に対して $\text{Im } \tau = (0.66 - 0.73), (1.17 - 1.32)$ となり、即ち $\text{Im } \tau \sim \mathcal{O}(1)$ の領域で実験と整合することを示した。

3.3 モジュラー不変な Kähler ポテンシャル

前節ではモジュラス τ に限ってモジュラー不変な Kähler ポテンシャル (3.18) を考えたが、一般にカイラル超場に対するモジュラー不変な Kähler ポテンシャルは、

$$\mathcal{K}(\Phi, \bar{\Phi}) = \sum_I (-i\tau + i\bar{\tau})^{-k_I} |\phi^{(I)}|^2 \quad (3.27)$$

があり、運動項を与える [23, 26]。この項は、 $(-i\tau + i\bar{\tau})^{-k} \rightarrow \{(c\tau + d)(c\bar{\tau} + d)\}^k (-i\tau + i\bar{\tau})^{-k}$ の関係式よりモジュラー不変を保ち、物質超場の運動項 (3.20) は

$$\sum_I \frac{|\partial_\mu \phi^{(I)}|^2}{\langle -i\tau + i\bar{\tau} \rangle^{k_I}} \quad (3.28)$$

になる。この項はカイラル超場の適切なリスケール、または、超ポテンシャルの結合定数を再定義することで正準化することができる。

proper rescaling of the chiral supermultiplets, or alternatively redefinition of superpotential parameters in a given model, realizes a canonical form of the kinetic term under the modular transformation, which will be discussed later.

しかし、適切なモジュラー形式を使ってモジュラー不変な Kähler ポテンシャルの追加項を作ることができる。例えば $\Gamma_3 \simeq A_4$ において、式 (3.27) は Y^{A_4} (3.10) まで考えると

$$\Delta\mathcal{K}(\Phi, \bar{\Phi}) = \alpha_0 \sum_I (-i\tau + i\bar{\tau})^{-k_I} |\phi^{(I)}|^2 + \sum_{I,k=1}^7 \alpha_k (-\tau + i\bar{\tau})^{k_I} (Y\phi^{(I)}\bar{Y}\bar{\phi}^{(I)})_{1,k} + \dots \quad (3.29)$$

のような追加項が無限に許される。ここで、予め明記した α_0 は場の再定義で吸収できる定数である。また、添え字 k について A_4 $\mathbf{1}$ の一重項を構成する全ての項について和をとるの縮約をしている。例えば、ウェイト -2 の A_4 三重項の場 F について式 (3.29) の右辺第 2 項を考えると $(YF)_{1,1',1'',3_S,3_A}$ から

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^7 \alpha_k (\bar{Y}F Y F)_{1,k} &= \alpha_1 (\bar{Y}F)_1^T (YF)_1 + \alpha_2 (\bar{Y}F)_{1'}^T (YF)_{1'} + \alpha_3 (\bar{Y}F)_{1''}^T (YF)_{1''} \\ &+ \alpha_4 \{(\bar{Y}F)_{3_S}^T (YF)_{3_S}\}_1 + \alpha_5 \{(\bar{Y}F)_{3_A}^T (YF)_{3_A}\}_1 \\ &+ \alpha_6 \{(\bar{Y}F)_{3_S}^T (YF)_{3_A} + (\bar{Y}F)_{3_A}^T (YF)_{3_S}\}_1 \end{aligned} \quad (3.30)$$

になる。各項について優劣はなく、従って式 (3.29) の右辺第 1 項を先頭項、右辺第 2 項を補正項とする原理はそもそもない。例として、Kähler ポテンシャル (3.30) の追加項の係数 α_6 による混合角の予言の変動の様子を図 3.1 に図示した¹。更に、余分の場を導入すると追加項はさらに増える。このような追加項による補正は、Kähler ポテンシャルが摂動論的くりこみを受けることとして理解される。

例として、標準模型のレプトン L について考える。その Kähler 計量

$$K_L^{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial L_i \partial \bar{L}_j} \quad (3.31)$$

をユニタリ行列 U_K で対角化すると

$$K_L = U_K^\dagger D_K^2 U_K \quad (3.32)$$

¹文献 [48] の表記では、 α_3 に対応する。

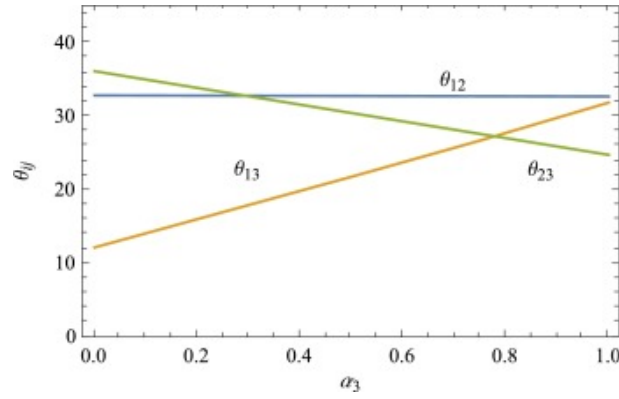


図 3.1: Kähler ポテンシャル (3.30) の追加項の係数 α_6 による混合角の予言の変動の様子。図は文献 [48] より転載した。

となる。式 (3.32) を用いて、 L を正準規格化する行列とすると

$$\hat{L} = D_K U_K L \quad (3.33)$$

となる。従って、通常の $U_{\text{PMNS}}^\dagger m_\nu U_{\text{PMNS}} = D_\nu$ ではなく

$$U_{\text{PMNS}}^\dagger D_K^{-1} U_K^* m_\nu U_K^\dagger D_K^{-1} U'_{\text{PMNS}} = D_\nu \quad (3.34)$$

を考えなければならない。従って、ニュートリノ振動実験を再現する模型の構築の際、Kähler ポテンシャルの追加項を取り入れると模型の予言値が変わる可能性が指摘された [48]。

このような Kähler ポテンシャルの追加項を制御するために、余剰 6 次元をコンパクト化したトーラス空間の体積と解釈される $\text{Im } \tau$ が大きくなる極限 ($\text{Im } \tau \gg 1$) が考えられた [48]。一般に、物質場の Kähler ポテンシャルの先頭項は

$$\mathcal{K} \supset \sum_{\ell} F_{i\ell}^*(\bar{\tau}) F_{\ell j}(\tau) (-i\tau + i\bar{\tau})^{n_j} \bar{\Phi}^{(i)} \Phi^{(j)} \quad (3.35)$$

と表される [101]。モジュラーウェイト n_j は Φ の Twist 量子数より導かれ、一般に負の値を持つ。任意の正則関数 $F_{\ell j}$ は、場の基底を固定する役割の縮退のない行列を構成する。通常、 $F_{\ell j}$ は $\delta_{\ell j}$ と選ばれ、式 (3.27) を実現する。一方、 $F_{\ell j}$ が非自明なモジュラーウェイト $n_{F_{\ell j}}$ を持つモジュラー形式となる可能性がある。この場合、式 (3.35) の Kähler ポテンシャルのモジュラーウェイトは $n_j + n_{F_{\ell j}}$ になって、式 (3.29) を実現する。

しかし、($\text{Im } \tau \gg 1$) の極限において、 $F_{\ell i} = \delta_{\ell j} Y(\tau)$ とした上、場の再定義によって $F_{\ell j}$ を吸収させる処置を行うと、式 (3.29) の右辺第 2 項の追加項を効果を抑制することができ、即ち、Kähler ポテンシャルを式 (3.27) の形に再現する。但し、これまでの研究ではニュートリノ振動実験結果を満たすパラメーター領域は $\text{Im } \tau \sim \mathcal{O}(1)$ であった。このような諸事情より $\text{Im } \tau \gg 1$ においても振動実験結果を再現できるモジュラーフレーバー模型の構築は重要な課題である。

第4章 レプトンフレーバー模型

本章では、節 3.3 で指摘された Kähler ポテンシャルの追加項の効果を抑えるため、 $\text{Im } \tau \gg 1$ の極限においてニュートリノ振動実験結果と整合する我々のモジュラー A_4 レプトンフレーバー模型 [47] を説明する。まず、本模型 [47] のセットアップと、極大体積極限を取ったときの難点及びその処方について説明する。次に、モジュラー対称性を持つ超重力理論を基にするゲージ不変な超ポテンシャルよりニュートリノの質量行列を導く。更に、その質量行列が持つ特徴について説明する。

4.1 模型の構成

最初に、我々が構築したレプトンフレーバー模型 [47] のセットアップについて説明する。我々は、超重力理論の下で、3 つの右巻きニュートリノ場とモジュラー A_4 フレーバー対称性をを導入した模型を考える。注意すべき点は、式 (3.26) より超ポテンシャルのモジュラーウェイトは -1 にならなければならない。超対称性の破れのスケール M_{SUSY} はコンパクト化スケール M_{compact} と同程度、またはそれより高いがプランクスケールよりは低いエネルギースケールで破れていると仮定した。つまり、 $M_N \ll M_{\text{compact}} \lesssim M_{\text{SUSY}} < M_P$ となる。また、モジュラー対称性はコンパクト化スケールで破れるとする。模型に導入する場合は、標準模型の三代左巻きレプトン二重項 L は A_4 の $\mathbf{3}$ 表現とする。また、三代の右巻き荷電レプトン (E_1^c, E_2^c, E_3^c) は A_4 対称性の異なる 3 つの一重項 ($\mathbf{1}, \mathbf{1}'', \mathbf{1}'$) 表現にそれぞれ対応させた。ヒッグス二重項 H_u と H_d は両方とも A_4 一重項 $\mathbf{1}$ とする。また、この模型では、ニュートリノ質量の起源として、節 2.3.1 で説明したシーソー機構を考えて、三代の右巻きニュートリノ N^c を新たに導入し、 A_4 対称性の三重項 $\mathbf{3}$ とした。

更に、我々は標準模型のゲージ一重項 S を導入する。この場合は、 A_4 三重項とし、以下のように書く。

$$S = (S_1, S_2, S_3)^T. \quad (4.1)$$

表 4.1 に以上の内容をまとめた。この表には、各場の $SU(2)_L$ と A_4 の表現、モジュラーウェイト

	L	E_1^c, E_2^c, E_3^c	N^c	H_u	H_d	S	Y^{A_4}
$SU(2)_L$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$
A_4	$\mathbf{3}$	$\mathbf{1}, \mathbf{1}'', \mathbf{1}'$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{3}$
$-k_I$	-1	-1	-1	-1	-1	-1	$+2$
R	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$

表 4.1: 我々の模型における各場の $SU(2)_L, A_4$, モジュラーウェイトと R パリティの割り当て

ト、および R パリティを示した。この表にあるように、導入した場合は、全てモジュラーウェイト -1 としている。

次に、模型を構築する際に、我々は A_4 三重項、モジュラーウェイト +2 のモジュラー形式 Y^{A_4} を導入する。このモジュラー形式は、湯川相互作用を構築する際に、重要な役割を果たす。モジュラー形式の詳細については、節 3.1 で述べた。

本論文では、極大体積極限 $\text{Im } \tau \gg 1$ で実現される模型を構築することが目標である。この極限下において、 A_4 三重項のモジュラー形式は、簡単な形になる：

$$Y^{A_4}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 + 12q + 36q^2 + 12q^3 + \dots \\ -6q^{\frac{1}{3}}(1 + 7q + 8q^2 + \dots) \\ -18q^{\frac{2}{3}}(1 + 2q + 5q^2 + \dots) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Im } \tau \gg 1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

ここで、 $q = e^{2\pi i \tau}$ である。この簡単な形を得るために、 $\text{Im } \tau \sim \mathcal{O}(5)$ 以上の程度が必要である。この極限の下で、モジュラー形式 (4.2) の形には \mathbb{Z}_3 対称性が残っていることになる。このようなモジュラー形式 (4.2) は A_4 の $\mathbf{1}$ 表現を作る A_4 の $\mathbf{3} \times \mathbf{3}$ の掛け算の際、 $Y_1(\tau)$ 成分を除く $Y_2(\tau), Y_3(\tau)$ 成分と関係する A_4 の $\mathbf{3}$ 表現の場を表すことが出来なくなる。

この問題を解決するために、我々はゲージ重項かつ A_4 三重項の場 S を新たに導入した。 S の真空期待値を与えると残存する \mathbb{Z}_3 が完全に破れる。更に、 S の真空期待値は右巻きニュートリノのマヨラナ質量項を構築する必要条件となり、模型に多数のパターンをもたらす。このことにより、振動実験で観測されているニュートリノの質量、混合を説明する。

4.1.1 模型の超ポテンシャル

導入したカイラル超場に対する超ポテンシャルはいずれも $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ不変かつ質量次元 4 を持ちくりこみ可能であり、 A_4 の $\mathbf{1}$ 表現となる。但し、式 (3.26) で記述したようにモジュラーウェイト -1 にならなければならない。モジュラーウェイト -1 の超ポテンシャルを記述する。

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_\mu + \mathcal{W}_E + \mathcal{W}_D + \mathcal{W}_M, \quad (4.3)$$

$$\mathcal{W}_\mu = k (SY^{A_4} H_u H_d)_\mathbf{1}, \quad (4.4)$$

$$\mathcal{W}_E = f_1 (LY^{A_4})_\mathbf{1} E_1^c H_d + f_2 (LY^{A_4})_{\mathbf{1}'} E_2^c H_d + f_3 (LY^{A_4})_{\mathbf{1}''} E_3^c H_d, \quad (4.5)$$

$$\mathcal{W}_D = g_1 ((LY^{A_4})_{\mathbf{3}_S} N^c H_u)_\mathbf{1} + g_2 ((LY^{A_4})_{\mathbf{3}_A} N^c H_u)_\mathbf{1}, \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_M = & h_1 ((SY^{A_4})_\mathbf{1} N^c N^c)_\mathbf{1} + h_2 ((SY^{A_4})_{\mathbf{1}'} N^c N^c)_\mathbf{1} + h_3 ((SY^{A_4})_{\mathbf{1}''} N^c N^c)_\mathbf{1} \\ & + h_4 ((SY^{A_4})_{\mathbf{3}_S} N^c N^c)_\mathbf{1} + h_5 ((SY^{A_4})_{\mathbf{3}_A} N^c N^c)_\mathbf{1}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

但し、係数 $k, f_{1,2,3}, g_{1,2}, h_{1,2,3,4,5}$ は結合定数を表し、丸括弧の下添字は A_4 の既約表現を表す。ここで、注目したい点は、超ポテンシャルのモジュラーウェイトから、ヒッグス場の μ 項が許されないことである。この模型では、 μ 項は新たに導入した S が真空期待値を持つ事により導出される。ヒッグス場の μ 項は \mathcal{W}_μ (4.4) を通じ S の真空期待値で決まる：

$$\mu = k s_1, \quad (4.8)$$

ここで $s_i = \langle S_i \rangle$, ($i = 1, 2, 3$) であり、極大体積極限下のモジュラー形式が簡単な形になることに注意する。

更に、極大体積極限の上、モジュラー形式 (4.2) を考えているため、超ポテンシャルの内、 S^3 のような自己相互作用項は省略した。また、本研究において、場 S の起源とその真空期待値が決まる機構は解明せず、その形だけを想定することにする。まず、 $s_1 \neq 0, s_2 = s_3 = 0$ は振動実験

結果と整合しないため、この可能性は考えない。次に、 S の2成分だけが真空期待値を持つ場合を考える：

$$\langle S \rangle = (s_1, s_2, 0)^T, \text{ または } \langle S \rangle = (s_1, 0, s_3)^T \quad (4.9)$$

$\mu \neq 0$ のために $s_1 \neq 0$ が要請されるので、 $s_2 = 0$ か $s_3 = 0$ とする自由度がある。まずは $s_3 = 0$ と考える。

4.2 荷電レプトンとニュートリノの質量

この模型における荷電レプトンの質量行列を考える。 $\mathcal{W}_E(4.5)$ から質量行列が与えられる。ここで、注意したい点は、導入した3つの A_4 一重項の場 ($\hat{E}_1^c, \hat{E}_2^c, \hat{E}_3^c$) を標準模型の右巻き荷電レプトン (e^c, μ^c, τ^c) と対応させる組み合わせが6通りあることである。両者の関係を以下に示す。

$$\begin{aligned} P_{123}(E_1^c, E_2^c, E_3^c)^T &= (e, \mu, \tau)^T, & P_{132}(E_1^c, E_2^c, E_3^c)^T &= (e, \tau, \mu)^T, \\ P_{213}(E_1^c, E_2^c, E_3^c)^T &= (\mu, e, \tau)^T, & P_{231}(E_1^c, E_2^c, E_3^c)^T &= (\mu, \tau, e)^T, \\ P_{312}(E_1^c, E_2^c, E_3^c)^T &= (\tau, e, \mu)^T, & P_{321}(E_1^c, E_2^c, E_3^c)^T &= (\tau, \mu, e)^T. \end{aligned} \quad (4.10)$$

ここで、順列 P_{ijk} を表す行列は以下のようなものである。

$$P_{123} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{132} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{213} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

$$P_{231} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{312} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{321} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

順列 P_{ijk} を新たに取り入れて、荷電レプトンの質量行列は、 (e, μ, τ) の基底で書くことにし、右巻き場が左から、左巻き場が右からかかる規約をとる事にする。

$$M_E = \langle H_d \rangle P_{ijk} \begin{pmatrix} f_1 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 \end{pmatrix}_{RL}. \quad (4.13)$$

ここで、 $\langle H_d \rangle$ はヒッグス場 H_d の真空期待値を示す。 P_{ijk} に従って6つのパターンが考えられる。まずは、簡単のため、 $P_{ijk} = \text{diag}(1, 1, 1)$, $E_1^c = e^c$, $E_2^c = \mu^c$, $E_3^c = \tau^c$ の場合について議論する。

次に、この模型でのニュートリノ質量について議論する。ニュートリノのディラック質量は、 $\mathcal{W}_D(4.6)$ から導出され、以下のように与えられる。

$$M_D = \langle H_u \rangle P_{ijk}^T \begin{pmatrix} 2g_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g_1 + g_2 \\ 0 & -g_1 - g_2 & 0 \end{pmatrix}_{RL}. \quad (4.14)$$

ここで、 $\langle H_u \rangle$ はヒッグス場 H_u の真空期待値を示す。ここで、注意することは、右巻き荷電レプトンの定義 (4.10) から、ディラック質量行列にも P_{ijk} が含まれる事である。一方、右巻きニュー

トリノのマヨラナ質量行列は、 $\mathcal{W}_M(4.7)$ から導出される。モジュラーウェイトの議論から、超ポテンシャルに質量項は許されず、 S の真空期待値を通じて導出される。マヨラナ質量行列の形は、

$$M_M = \begin{pmatrix} (h_1 + 4h_4)s_1 & (h_2 + h_4 + h_5)s_3 & (h_2 + h_4 + h_5)s_2 \\ (h_2 + h_4 + h_5)s_3 & (h_2 - 2h_4 - 2h_5)s_2 & (h_1 - 2h_4)s_1 \\ (h_2 + h_4 + h_5)s_2 & (h_1 - 2h_4)s_1 & (h_2 - 2h_4 - 2h_5)s_3 \end{pmatrix}_{RR}. \quad (4.15)$$

本論文では、簡単のため、 $s_2 = 0$ と $s_3 = 0$ の場合を考える。それぞれの場合において、マヨラナ質量行列の形は、以下ようになる。

$$M_M = \begin{pmatrix} (h_1 + 4h_4)s_1 & (h_2 + h_4 + h_5)s_3 & 0 \\ (h_2 + h_4 + h_5)s_3 & 0 & (h_1 - 2h_4)s_1 \\ 0 & (h_1 - 2h_4)s_1 & (h_2 - 2h_4 - 2h_5)s_3 \end{pmatrix}_{RR}, \quad (s_2 = 0), \quad (4.16)$$

$$M_M = \begin{pmatrix} (h_1 + 4h_4)s_1 & 0 & (h_2 + h_4 + h_5)s_2 \\ 0 & (h_2 - 2h_4 - 2h_5)s_2 & (h_1 - 2h_4)s_1 \\ (h_2 + h_4 + h_5)s_2 & (h_1 - 2h_4)s_1 & 0 \end{pmatrix}_{RR}, \quad (s_3 = 0). \quad (4.17)$$

上記に示したニュートリノディラック質量とマヨラナ質量の間に $M_M \gg M_D$ の階層性を課す事にして、シーソー機構を考える。この場合、軽いニュートリノ (振動実験で観測されている 3 つのアクティブニュートリノ) の質量行列は、以下のように与えられる。

$$M_\nu = -M_D^T M_M^{-1} M_D = \Lambda \begin{pmatrix} 1 & b_2 b_3 & b_3 \\ b_2 b_3 & b_1 b_2 & b_1 \\ b_3 & b_1 & b_3^2 \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

ここでは、 P_{ijk} を P_{123} とし、 $s_3 = 0$ とした。結果的に、シーソー行列は 1 つの実パラメーター Λ と 3 つの複素パラメーター b_1, b_2, b_3 で決まる。但し、各パラメーターは

$$\Lambda = -\frac{4g_1^2(h_1 - 2h_4)^2 v_u^2 s_1^2}{(h_1 - 2h_4)^2 (h_1 + 4h_4) s_1^3 + (h_2 + h_4 + h_5)^2 (h_2 - 2h_4 - 2h_5) s_2^3}, \quad (4.19)$$

$$b_1 = \frac{(g_1^2 - g_2^2)(h_1 + 4h_4)}{4g_1^2(h_1 - 2h_4)}, \quad (4.20)$$

$$b_2 = -\frac{(g_1 + g_2)(h_2 - 2h_4 - 2h_5) s_2}{(g_1 - g_2)(h_1 - 2h_4) s_1}, \quad (4.21)$$

$$b_3 = \frac{(g_1 - g_2)(h_2 + h_4 + h_5) s_2}{2g_1(h_1 - 2h_4) s_1}. \quad (4.22)$$

と定義される。このシーソー行列とパラメーター $\Lambda, b_{1,2,3}$ は順列 P_{ijk} によって変わる。順列 $P_{132}, s_3 =$

0 に対しては

$$M_\nu = \Lambda \begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_3 \\ b_1 & b_1^2 & b_1 b_2 \\ b_3 & b_1 b_2 & b_3 b_2 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

$$\Lambda = -\frac{4g_1^2(h_1 - 2h_4)^2 v_u^2 s_1^2}{(h_1 - 2h_4)^2(h_1 + 4h_4) s_1^3 + (h_2 + h_4 + h_5)^2(h_2 - 2h_4 - 2h_5) s_2^3} \quad (4.24)$$

$$b_1 = \frac{(g_1 - g_2)(h_2 + h_4 + h_5) s_2}{2g_1(h_1 - 2h_4) s_1}, \quad (4.25)$$

$$b_2 = \frac{(g_1 + g_2)(h_1 + 4h_2) s_1}{2g_1(h_2 + h_4 + h_5) s_2}, \quad (4.26)$$

$$b_3 = -\frac{(g_1 + g_2)(h_2 - 2h_4 - 2h_5)(h_2 + h_4 + h_5) s_2^2}{2g_1(h_1 - 2h_4)^2 s_1^2} \quad (4.27)$$

となる。次に、順列 $P_{213}, s_3 = 0$ に対しては

$$M_\nu = \Lambda \begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_3 \\ b_1 & b_1 b_3 b_2 & b_1 b_3 \\ b_3 & b_1 b_3 & b_1 b_3 / b_2 \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

$$\Lambda = -\frac{(g_1 + g_2)^2(h_1 + 4h_2)(h_2 - 2h_4 - 2h_5) v_u^2 s_1 s_2}{(h_1 - 2h_4)^2(h_1 + 4h_2) s_1^3 + (h_2 + h_4 + h_5)^2(h_2 - 2h_4 - 2h_5) s_2^3}, \quad (4.29)$$

$$b_1 = \frac{2g_1(h_2 + h_4 + h_5) s_2}{(g_1 + g_2)(h_1 + 4h_4) s_1}, \quad (4.30)$$

$$b_2 = \frac{2g_1(h_1 - 2h_4) s_1}{(g_1 - g_2)(h_2 + h_4 + h_5) s_2}, \quad (4.31)$$

$$b_3 = -\frac{(g_1 - g_2)(h_1 - 2h_4) s_1}{(g_1 + g_2)(h_2 - 2h_4 - 2h_5) s_2} \quad (4.32)$$

となる。次に、順列 $P_{231}, s_3 = 0$ に対しては

$$M_\nu = \Lambda \begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_3 \\ b_1 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ b_3 & b_1 b_3 & b_1 b_3^2 / b_2 \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

$$\Lambda = -\frac{(g_1 + g_2)^2(h_1 + 4h_2)(h_2 - 2h_4 - 2h_5) v_u^2 s_1 s_2}{(h_1 - 2h_4)^2(h_1 + 4h_2) s_1^3 + (h_2 + h_4 + h_5)^2(h_2 - 2h_4 - 2h_5) s_2^3}, \quad (4.34)$$

$$b_1 = -\frac{(g_1 - g_2)(h_1 - 2h_4) s_1}{(g_1 + g_2)(h_2 - 2h_4 - 2h_5) s_2}, \quad (4.35)$$

$$b_2 = -\frac{(g_1 - g_2)(h_2 + h_4 + h_5)^2 s_1}{(g_1 + g_2)(h_1 + 4h_2)(h_1 - 2h_2) s_2}, \quad (4.36)$$

$$b_3 = \frac{2g_1(h_2 + h_4 + h_5) s_2}{(g_1 + g_2)(h_1 + 4h_4) s_1} \quad (4.37)$$

となる。次に、順列 $P_{312}, s_3 = 0$ に対しては

$$M_\nu = \Lambda \begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_3 \\ b_1 & b_1^2 & b_1 b_3 b_2 \\ b_3 & b_1 b_3 b_2 & b_3^2 b_2 \end{pmatrix}, \quad (4.38)$$

$$\Lambda = -\frac{(g_1 - g_2)^2 (h_2 + h_4 + h_5)^2 v_u^2 s_2^2}{(h_1 - 2h_4)^2 (h_1 + 4h_2) s_1^3 + (h_2 + h_4 + h_5)^2 (h_2 - 2h_4 - 2h_5) s_2^3}, \quad (4.39)$$

$$b_1 = \frac{2g_1 (h_1 - 2h_4) s_1}{(g_1 - g_2) (h_2 + h_4 + h_5) s_2}, \quad (4.40)$$

$$b_2 = \frac{(h_2 - 2h_4 - 2h_5) (h_2 + h_4 + h_5)^2 s_2^3}{(h_1 + 4h_2) (h_1 - 2h_4)^2 s_1^3}, \quad (4.41)$$

$$b_3 = \frac{(g_1 + g_2) (h_1 + 4h_2) (h_1 - 2h_4) s_1^2}{(g_1 - g_2) (h_2 + h_4 + h_5)^2 s_2^2} \quad (4.42)$$

となる。次に、順列 $P_{321}, s_3 = 0$ に対しては

$$M_\nu = \Lambda \begin{pmatrix} 1 & b_1 b_3 b_2 & b_3 \\ b_1 b_3 b_2 & b_1^2 b_2 & b_1 \\ b_3 & b_1 & b_3^2 \end{pmatrix}, \quad (4.43)$$

$$\Lambda = -\frac{(g_1 - g_2)^2 (h_2 + h_4 + h_5)^2 v_u^2 s_2^2}{(h_1 - 2h_4)^2 (h_1 + 4h_2) s_1^3 + (h_2 - 2h_4 - 2h_5) s_2^3}, \quad (4.44)$$

$$b_1 = -\frac{2g_1 (g_1 + g_2) (h_2 - 2h_4 - 2h_5)}{(g_1 - g_2)^2 (h_2 + h_4 + h_5)}, \quad (4.45)$$

$$b_2 = -\frac{4g_1^2 (h_2 - 2h_4 - 2h_5) s_2}{(g_1 - g_2)^2 (h_1 + 4h_2) s_1}, \quad (4.46)$$

$$b_3 = \frac{2g_1 (h_1 - 2h_4) s_1}{(g_1 - g_2) (h_2 + h_4 + h_5) s_2} \quad (4.47)$$

となる。

また、順列 $P_{123}, s_2 = 0$ に対しては

$$M_\nu = \Lambda \begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_1 b_2 \\ b_1 & b_1^2 & b_3 \\ b_1 b_2 & b_3 & b_2 b_3 \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

$$\Lambda = \frac{-4g_1^2 (h_1 - 2h_4)^2 s_1^2 v_u^2}{(h_1 + 4h_2) (h_1 - 2h_4)^2 s_1^3 - (h_2 - 2h_4 - 2h_5) (h_2 + h_4 + h_5)^2 s_3^3}, \quad (4.49)$$

$$b_1 = \frac{(g_1 + g_2) (h_2 + h_4 + h_5) s_3}{2g_1 (h_1 - 2h_4) s_1}, \quad (4.50)$$

$$b_2 = \frac{-(g_1 - g_2) (h_2 - 2h_4 - 2h_5) s_3}{(g_1 + g_2) (h_1 - 2h_4) s_1}, \quad (4.51)$$

$$b_3 = \frac{(g_1 + g_2) (g_1 - g_2) (h_1 + 4h_2)}{4g_1^2 (h_1 - 2h_4)} \quad (4.52)$$

となる。次に、順列 $P_{132}, s_2 = 0$ に対しては

$$M_\nu = \Lambda \begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_3 \\ b_1 & b_1 b_2 & b_2 b_3 \\ b_3 & b_2 b_3 & b_3^2 \end{pmatrix}, \quad (4.53)$$

$$\Lambda = \frac{4g_1^2(h_1 - 2h_4)^2 s_1^2 v_u^2}{-(h_1 + 4h_2)(h_1 - 2h_4)^2 s_1^3 - (h_2 - 2h_4 - 2h_5)(h_2 + h_4 + h_5)^2 s_3^3}, \quad (4.54)$$

$$b_1 = \frac{-(g_1 - g_2)(h_2 - 2h_4 - 2h_5)(h_2 + h_4 + h_5) s_3^2}{2g_1(h_1 - 2h_4)^2 s_1^2}, \quad (4.55)$$

$$b_2 = \frac{(g_1 - g_2)(h_1 + 4h_2) s_1}{2g_1(h_2 + h_4 + h_5) s_3}, \quad (4.56)$$

$$b_3 = \frac{(g_1 + g_2)(h_2 + h_4 + h_5) s_3}{2g_1(h_1 - 2h_4) s_1} \quad (4.57)$$

となる。次に、順列 $P_{213}, s_2 = 0$ に対しては

$$M_\nu = \Lambda \begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_3 \\ b_1 & b_1^2 & b_2 \\ b_3 & b_2 & b_2 b_3 / b_1 \end{pmatrix}, \quad (4.58)$$

$$\Lambda = \frac{(g_1 + g_2)^2 (h_2 + h_4 + h_5)^2 s_3^2 v_u^2}{-(h_1 + 4h_2)(h_1 - 2h_4)^2 s_1^3 - (h_2 - 2h_4 - 2h_5)(h_2 + h_4 + h_5)^2 s_3^3}, \quad (4.59)$$

$$b_1 = \frac{2g_1(h_1 - 2h_4) s_1}{(g_1 + g_2)(h_2 + h_4 + h_5) s_3}, \quad (4.60)$$

$$b_2 = \frac{-2g_1(g_1 - g_2)(h_2 - 2h_4 - 2h_5)}{(g_1 + g_2)^2 (h_2 + h_4 + h_5)}, \quad (4.61)$$

$$b_3 = \frac{(g_1 - g_2)(h_1 + 4h_2)(h_1 - 2h_4) s_1^2}{(g_1 + g_2)(h_2 + h_4 + h_5)^2 s_3^2} \quad (4.62)$$

となる。次に、順列 $P_{231}, s_2 = 0$ に対しては

$$M_\nu = \Lambda \begin{pmatrix} 1 & b_1 b_2 & b_1 \\ b_1 b_2 & b_1 b_2 b_3 & b_1 b_3 \\ b_1 & b_1 b_3 & b_1^2 \end{pmatrix}, \quad (4.63)$$

$$\Lambda = \frac{(g_1 + g_2)^2 (h_2 + h_4 + h_5)^2 s_3^2 v_u^2}{-(h_1 + 4h_2)(h_1 - 2h_4)^2 s_1^3 - (h_2 - 2h_4 - 2h_5)(h_2 + h_4 + h_5)^2 s_3^3}, \quad (4.64)$$

$$b_1 = \frac{(2g_1(h_1 - 2h_4) s_1)}{(g_1 + g_2)(h_2 + h_4 + h_5) s_3}, \quad (4.65)$$

$$b_2 = \frac{(g_1 - g_2)(h_1 + 4h_2) s_1}{2g_1(h_2 + h_4 + h_5) s_3}, \quad (4.66)$$

$$b_3 = \frac{-(g_1 - g_2)(h_2 - 2h_4 - 2h_5) s_3}{(g_1 + g_2)(h_1 - 2h_4) s_1} \quad (4.67)$$

となる。次に、順列 $P_{312}, s_2 = 0$ に対しては

$$M_\nu = \Lambda \begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_1 b_3 \\ b_3 & b_1 b_3 & b_1^2 b_3^2 / b_2 \end{pmatrix}, \quad (4.68)$$

$$\Lambda = \frac{-(g_1 - g_2)^2 (h_1 + 4h_2)(h_2 - 2h_4 - 2h_5) s_1 s_3 v_u^2}{-(h_1 + 4h_2)(h_1 - 2h_4)^2 s_1^3 - (h_2 - 2h_4 - 2h_5)(h_2 + h_4 + h_5)^2 s_3^3}, \quad (4.69)$$

$$b_1 = \frac{2g_1(h_2 + h_4 + h_5) s_3}{(g_1 - g_2)(h_1 + 4h_2) s_1}, \quad (4.70)$$

$$b_2 = \frac{-4g_1^2 (h_1 - 2h_4)^2 s_1}{(g_1 - g_2)^2 (h_1 + 4h_2)(h_2 - 2h_4 - 2h_5) s_3}, \quad (4.71)$$

$$b_3 = \frac{-(g_1 + g_2)(h_1 - 2h_4) s_1}{(g_1 - g_2)(h_2 - 2h_4 - 2h_5) s_3} \quad (4.72)$$

となる。次に、順列 $P_{321}, s_2 = 0$ に対しては

$$M_\nu = \Lambda \begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_2 \\ b_1 & b_1 b_2 / b_3 & b_1 b_2 \\ b_2 & b_1 b_2 & b_1 b_2 b_3 \end{pmatrix}, \quad (4.73)$$

$$\Lambda = \frac{(g_1 - g_2)^2 (h_1 + 4h_2)(h_2 - 2h_4 - 2h_5) s_1 s_3 v_u^2}{-(h_1 + 4h_2)(h_1 - 2h_4)^2 s_1^3 - (h_2 - 2h_4 - 2h_5)(h_2 + h_4 + h_5)^2 s_3^3}, \quad (4.74)$$

$$b_1 = \frac{(g_1 + g_2)(h_1 - 2h_4) s_1}{(g_1 - g_2)(h_2 - 2h_4 - 2h_5) s_3}, \quad (4.75)$$

$$b_2 = \frac{2g_1(h_2 + h_4 + h_5) s_3}{(g_1 - g_2)(h_1 + 4h_2) s_1}, \quad (4.76)$$

$$b_3 = \frac{2g_1(h_1 - 2h_4) s_1}{(g_1 + g_2)(h_2 + h_4 + h_5) s_3} \quad (4.77)$$

となる。

節 4.1 では極大体積極限において \mathbb{Z}_3 対称性が残っていると説明した。この残存対称性より全てのレプトン場の Kähler 計量は対角化されている。よって、運動項の規格化において新たな混合は生じない。一方、各世代の場は、それぞれ違った因子によって規格化し、場を再定義する必要がある。ここで、重要な点は、この場の再定義の効果は、複素パラメーターは $b_{1,2,3}$ の再定義で吸収できることが判った。更に、 S の真空期待値による Kähler ポテンシャルの補正は、その真空期待値をカットオフスケール Λ より十分小さいとすることで抑制できる。従って、ニュートリノの性質に対する我々の模型の予言は、例えば ($P_{123}, s_3 = 0$) 場合には式 (4.19, 4.20, 4.21, 4.22) で示された Λ と $b_{1,2,3}$ で決まる。

4.2.1 Two-Zero 構造

我々の模型は、シーソー行列の逆行列に、独立な 2 成分がゼロとなる特徴があり、通称、Two-Zero 構造 (Two-Zero Structure, TZS) と呼ばれる¹シーソー行列は対称行列なので、独立 2 成分がゼロになる 15 パターンがある [59–61]。

$$\begin{aligned}
&\text{パターン } A_1: \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & 0 \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{パターン } A_2: \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & * \end{pmatrix}, & \text{パターン } B_3: \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & * \\ 0 & * & 0 \end{pmatrix}, \\
&\text{パターン } B_4: \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ * & * & * \end{pmatrix}, & \text{パターン } B_5: \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 0 & * & * \\ * & * & 0 \end{pmatrix}, & \text{パターン } B_6: \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & 0 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}, \\
&\text{パターン } D: \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & 0 \end{pmatrix}, & \text{パターン } F_1: \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & 0 \end{pmatrix}, & \text{パターン } F_2: \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & * \end{pmatrix}, & (4.78) \\
&\text{パターン } F_3: \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & * & 0 \\ * & 0 & * \end{pmatrix}, & \text{パターン } F_4: \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}, & \text{パターン } F_5: \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 0 & * & 0 \\ * & 0 & * \end{pmatrix}, \\
&\text{パターン } s_1: \begin{pmatrix} 0 & * & 0 \\ * & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}, & \text{パターン } s_2: \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}, & \text{パターン } s_3: \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

この構造の起因は、右巻きニュートリノのマヨラナ質量行列の要素にゼロを含むためであり、それはゲージ重項 S の真空期待値の 1 成分をゼロとしたためである。ここでは、参考文献 [59–61] に従い、パターンを B_5, B_6, F_3 と書くことにする。

前節で説明した我々の模型では、右巻き荷電レプトンの対応関係 P_{ijk} に 6 通りの可能性、およびゲージ重項のゼロ真空期待値の選び方に $s_2 = 0, s_3 = 0$ の 2 通りの可能性、つまり合計で 12 の場合が考えられる。これらの 12 の場合について、シーソー行列とその逆行列の構造、および Two-Zero Minor 構造のパターンの対応を表 4.3 と 4.4 に示した。また、まとめの表を 4.2 に示した。

表に示した通り、我々の模型では、TZM の中で、 B_5, B_6, F_3 の 3 つのパターンを予言することがわかった。これら 3 つのパターンについて、次章では、ニュートリノ振動実験結果の再現と模型の予言を議論することにする。その際、ひとつ着目すべき点がある。パターン B_5 とパターン B_6 の間には、以下のような関係がある。

$$M_{\nu}^{(B_5)-1} = P_{132} M_{\nu}^{(B_6)-1} P_{132}^T \quad (4.79)$$

	P_{123}	P_{132}	P_{213}	P_{231}	P_{312}	P_{321}
$\langle s_3 \rangle = 0$	B_6	B_5	F_3	F_3	B_5	B_6
$\langle s_2 \rangle = 0$	B_5	B_6	F_3	F_3	B_6	B_5

表 4.2: ニュートリノ質量行列の逆行列のパターン

¹ニュートリノ質量行列に現れる TZS は Two-Zero Texture (TZT) と呼ばれる。我々の模型のように TZS が逆行列に現れる場合は Two-Zero Minor (TZM) と呼ばれる。

順列	M_ν/Λ ($s_3 = 0$)	M_ν^{-1}	パターン
$P_{123} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & b_3 b_2 & b_3 \\ b_3 b_2 & b_1 b_2 & b_1 \\ b_3 & b_1 & b_3^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \times & \times & 0 \\ \times & 0 & \times \\ 0 & \times & \times \end{pmatrix}$	B_6
$P_{132} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_3 \\ b_1 & b_1^2 & b_1 b_2 \\ b_3 & b_1 b_2 & b_3 b_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \times & 0 & \times \\ 0 & \times & \times \\ \times & \times & 0 \end{pmatrix}$	B_5
$P_{213} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_3 \\ b_1 & b_1 b_3 b_2 & b_1 b_3 \\ b_3 & b_1 b_3 & b_1 b_3/b_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \times & \times \\ \times & \times & 0 \\ \times & 0 & \times \end{pmatrix}$	F_3
$P_{231} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_3 \\ b_1 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ b_3 & b_1 b_3 & b_1 b_3^2/b_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \times & \times \\ \times & \times & 0 \\ \times & 0 & \times \end{pmatrix}$	F_3
$P_{312} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_3 \\ b_1 & b_1^2 & b_1 b_3 b_2 \\ b_3 & b_1 b_3 b_2 & b_3^2 b_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \times & 0 & \times \\ 0 & \times & \times \\ \times & \times & 0 \end{pmatrix}$	B_5
$P_{321} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & b_1 b_3 b_2 & b_3 \\ b_1 b_3 b_2 & b_1^2 b_2 & b_1 \\ b_3 & b_1 & b_3^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \times & \times & 0 \\ \times & 0 & \times \\ 0 & \times & \times \end{pmatrix}$	B_6

 表 4.3: ($s_3 = 0$) の場合、順列 P_{ijk} によるニュートリノ質量行列の概形と Two-Zero 構造

順列	M_ν/Λ ($s_2 = 0$)	M_ν^{-1}	パターン
$P_{123} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_1 b_2 \\ b_1 & b_1^2 & b_3 \\ b_1 b_2 & b_3 & b_2 b_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \times & 0 & \times \\ 0 & \times & \times \\ \times & \times & 0 \end{pmatrix}$	B_5
$P_{132} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_3 \\ b_1 & b_1 b_2 & b_2 b_3 \\ b_3 & b_2 b_3 & b_3^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \times & \times & 0 \\ \times & 0 & \times \\ 0 & \times & \times \end{pmatrix}$	B_6
$P_{213} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_3 \\ b_1 & b_1^2 & b_2 \\ b_3 & b_2 & b_2 b_3/b_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \times & \times \\ \times & \times & 0 \\ \times & 0 & \times \end{pmatrix}$	F_3
$P_{231} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & b_1 b_2 & b_1 \\ b_1 b_2 & b_1 b_2 b_3 & b_1 b_3 \\ b_1 & b_1 b_3 & b_1^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \times & \times \\ \times & \times & 0 \\ \times & 0 & \times \end{pmatrix}$	F_3
$P_{312} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_1 b_3 \\ b_3 & b_1 b_3 & b_1^2 b_3^2/b_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \times & \times & 0 \\ \times & 0 & \times \\ 0 & \times & \times \end{pmatrix}$	B_6
$P_{321} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_2 \\ b_1 & b_1 b_2/b_3 & b_1 b_2 \\ b_2 & b_1 b_2 & b_1 b_2 b_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \times & 0 & \times \\ 0 & \times & \times \\ \times & \times & 0 \end{pmatrix}$	B_5

 表 4.4: ($s_2 = 0$) の場合、順列 P_{ijk} によるニュートリノ質量行列の概形と Two-Zero 構造

このシーソー質量行列の関係は、ニュートリノ混合行列の間に以下の変換 \mathcal{T} を行うと吸収することができる [50]。

$$U_{\text{PMNS}}^{(B_5)} = P_{132} U_{\text{PMNS}}^{(B_6)} = \mathcal{T} U_{\text{PMNS}}, \quad (4.80)$$

$$\mathcal{T} : \begin{cases} \theta_{23}^{(B_5)} = \frac{\pi}{2} - \theta_{23}^{(B_6)}, & \delta_{\text{CP}}^{(B_5)} = \delta_{\text{CP}}^{(B_6)} - \pi, \\ \alpha_{21}^{(B_5)} = 2\pi - \alpha_{21}^{(B_6)}, & \alpha_{31}^{(B_5)} = -2\pi - \alpha_{31}^{(B_6)}. \end{cases} \quad (4.81)$$

この関係式が意味することは、同じ $b_{1,2,3}$ の値に対して、パターン B_5 の予言と B_6 の予言の間には、(4.81) の関係があることである。

第5章 模型の数値解析

本章では、本模型における質量行列が持つ3つのパターンがニュートリノ振動実験を再現できるか検証する。選別されたパターンに対して、ニュートリノの3つの混合角と2つの質量二乗差から軽いニュートリノ3世代の質量和 $\sum m_i$ 、3つの CP 位相 $\delta_{\text{CP}}, \alpha_{21}, \alpha_{31}$ 、ニュートリノを放出しない二重ベータ崩壊の有効質量 m_{eff} を 95%信頼区間で評価する。

5.1 振動実験結果との比較

observable	平均値 $\pm 1\sigma$ (順階層性)	平均値 $\pm 1\sigma$ (逆階層性)
$\sin^2 \theta_{12}$	$0.304^{+0.012}_{-0.012}$	$0.304^{+0.013}_{-0.012}$
$\sin^2 \theta_{23}$	$0.573^{+0.016}_{-0.020}$	$0.575^{+0.016}_{-0.019}$
$\sin^2 \theta_{13}$	$0.02219^{+0.00062}_{-0.00063}$	$0.02238^{+0.00063}_{-0.00062}$
Δm_{sol}^2	$7.42^{+0.21}_{-0.20} \times 10^{-5} \text{eV}^2$	$7.42^{+0.21}_{-0.20} \times 10^{-5} \text{eV}^2$
Δm_{atm}^2	$2.517^{+0.026}_{-0.028} \times 10^{-3} \text{eV}^2$	$-2.498^{+0.028}_{-0.028} \times 10^{-3} \text{eV}^2$

表 5.1: NuFIT 5.0 [62] における中心値 $\pm 1\sigma$ のニュートリノの混合角と質量二乗差

まず、本模型のニュートリノ質量行列が持つ3つのパターンが

$$M_\nu = U_{\text{PMNS}} D_\nu^{-1} U_{\text{PMNS}}^T \quad (5.1)$$

の右辺を NuFIT 5.0 [62] の 3σ 範囲で再現できるか選別を行った。そのため、まず軽いニュートリノは全て質量を持つと考える。つまり、最軽量ニュートリノの質量 ($m_0 = m_1$ (順階層性), $m_0 = m_3$ (逆階層性)) はゼロでない ($m_0 \neq 0$)。次に、式 (5.1) の左辺から、質量比 R_2, R_3 を以下のように定義する [60, 102]。

$$R_2(\delta_{\text{CP}}) \equiv \frac{m_1}{m_2} e^{i\alpha_{21}}, \quad R_3(\delta_{\text{CP}}) \equiv \frac{m_1}{m_3} e^{i\alpha_{31}} \quad (5.2)$$

$U_{\text{PMNS}} = V \cdot \text{diag}(1, e^{i\alpha_{21}/2}, e^{i\alpha_{31}/2})$ とすると各パターンごと、 R_2, R_3 は以下のとおりである。

$$R_2^{(B_5)} = -\frac{V_{e1}V_{\mu1}V_{\tau2}^2 - V_{e2}V_{\mu2}V_{\tau1}^2}{V_{e3}V_{\mu3}V_{\tau2}^2 - V_{e2}V_{\mu2}V_{\tau3}^2} = \frac{V_{e2}^*(V_{e1}V_{\tau3} + V_{e3}V_{\tau1}) - (V_{\tau1}V_{\mu3} + V_{\tau3}V_{\mu1})V_{\mu2}^*}{V_{e1}^*(V_{e3}V_{\tau2} + V_{e2}V_{\tau3}) - (V_{\tau2}V_{\mu3} + V_{\tau3}V_{\mu2})V_{\mu1}^*} \quad (5.3)$$

$$R_3^{(B_5)} = -\frac{V_{e1}V_{\mu1}V_{\tau2}^2 - V_{e2}V_{\mu2}V_{\tau1}^2}{V_{e3}V_{\mu3}V_{\tau2}^2 - V_{e2}V_{\mu2}V_{\tau3}^2} = \frac{V_{e3}^*(V_{e1}V_{\tau2} + V_{e2}V_{\tau1}) - (V_{\tau1}V_{\mu2} + V_{\tau2}V_{\mu1})V_{\mu3}^*}{V_{e1}^*(V_{e2}V_{\tau3} + V_{e3}V_{\tau2}) - (V_{\tau3}V_{\mu2} + V_{\tau2}V_{\mu3})V_{\mu1}^*} \quad (5.4)$$

$$R_2^{(B_6)} = -\frac{V_{e1}V_{\tau1}V_{\mu3}^2 - V_{e3}V_{\tau3}V_{\mu1}^2}{V_{e2}V_{\tau2}V_{\mu3}^2 - V_{e3}V_{\tau3}V_{\mu2}^2} = \frac{V_{\mu1}^*(V_{e1}V_{\mu3} + V_{e3}V_{\mu1}) - (V_{\mu1}V_{\tau3} + V_{\mu3}V_{\tau1})V_{\tau2}^*}{V_{e1}^*(V_{e3}V_{\mu2} + V_{e2}V_{\mu3}) + (V_{\mu2}V_{\tau3} + V_{\mu3}V_{\tau3})V_{\tau1}^*} \quad (5.5)$$

$$R_3^{(B_6)} = -\frac{V_{e1}V_{\tau1}V_{\mu2}^2 - V_{e2}V_{\tau2}V_{\mu1}^2}{V_{e3}V_{\tau3}V_{\mu2}^2 - V_{e2}V_{\tau2}V_{\mu3}^2} = \frac{(V_{\mu1}V_{\tau2} + V_{\mu2}V_{\tau1})V_{\tau3}^* - V_{e3}^*(V_{e1}V_{\mu2} + V_{e2}V_{\mu1})}{V_{e1}^*(V_{e2}V_{\mu3} + V_{e3}V_{\mu2}) + (V_{\mu3}V_{\tau2} + V_{\mu2}V_{\tau3})V_{e1}^*} \quad (5.6)$$

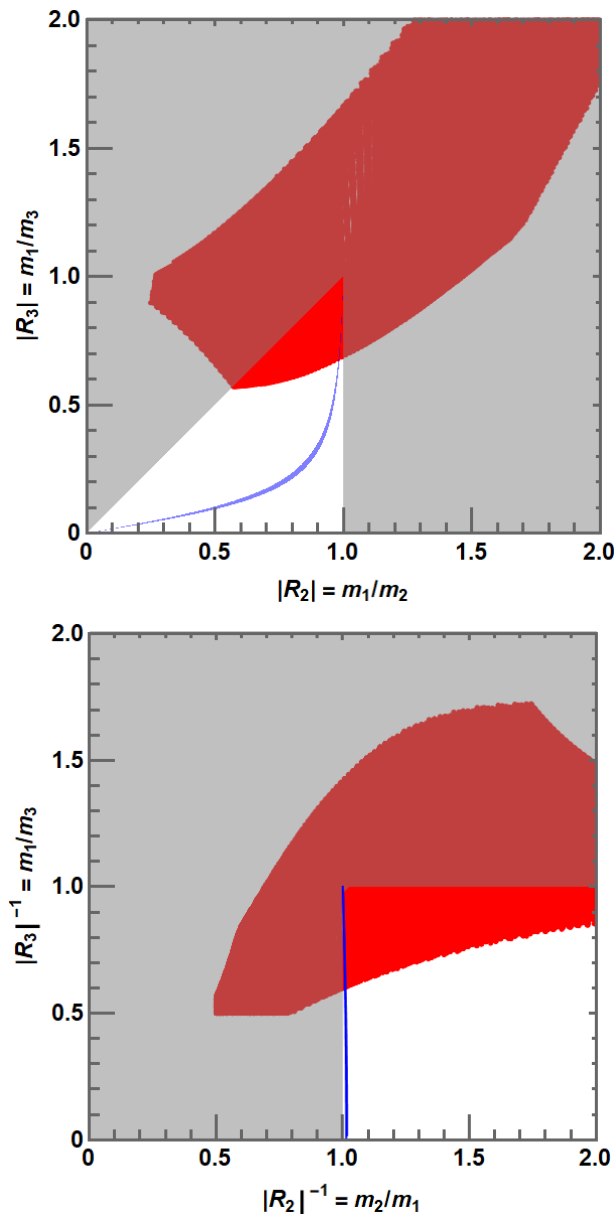


図 5.1: パターン B_5 に対する質量比 $|R_2|, |R_3|$ の予言値。(上:順階層性、下:逆階層性)

$$R_2^{(F_3)} = -\frac{V_{\mu 3} V_{\tau 3} V_{e 1}^2 - V_{\mu 1} V_{\tau 1} V_{e 3}^2}{V_{\mu 3} V_{\tau 3} V_{e 2}^2 - V_{\mu 2} V_{\tau 2} V_{e 3}^2} = \frac{V_{\mu 2}^* (V_{\mu 3} V_{e 1} + V_{\mu 1} V_{e 3}) - (V_{e 3} V_{\tau 1} + V_{e 1} V_{\tau 3}) V_{\tau 2}^*}{V_{\mu 1}^* (V_{\mu 2} V_{e 3} + V_{\mu 3} V_{e 2}) - (V_{e 3} V_{\tau 2} + V_{e 2} V_{\tau 3}) V_{\tau 1}^*} \quad (5.7)$$

$$R_3^{(F_3)} = -\frac{V_{\mu 2} V_{\tau 2} V_{e 1}^2 - V_{\mu 1} V_{\tau 1} V_{e 2}^2}{V_{\mu 2} V_{\tau 2} V_{e 3}^2 - V_{\mu 3} V_{\tau 3} V_{e 2}^2} = \frac{V_{\mu 3}^* (V_{\mu 1} V_{e 2} + V_{\mu 2} V_{e 1}) - (V_{e 1} V_{\tau 2} + V_{e 2} V_{\tau 1}) V_{\tau 3}^*}{V_{\mu 1}^* (V_{\mu 3} V_{e 2} + V_{\mu 2} V_{e 3}) - (V_{e 2} V_{\tau 3} + V_{e 3} V_{\tau 2}) V_{\tau 1}^*} \quad (5.8)$$

$|R_2|, |R_3|$ は δ_{CP} の偶関数として表される。次に、混合角 $(\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13})$ に対する NuFIT 5.0 の 3σ の範囲と、ディラック CP 位相 δ を $[0, \pi]$ までプロットして質量比 $|R_2|, |R_3|$ を計算した。但し、質量比 $|R_2|, |R_3|$ は次の関係を満たさなければならない。

$$\begin{cases} \text{順階層性 (NH)} & : |R_2| < 1 \quad , \quad |R_3| < 1 \\ \text{逆階層性 (IH)} & : |R_2|^{-1} > 1 \quad , \quad |R_3|^{-1} < 1 \end{cases} \quad (5.9)$$

まず、パターン B_5 に場合、質量比 $|R_2|, |R_3|$ の予言値を図 5.1 に図示した。模型の質量比の予言値を赤色、質量比の条件 (5.9) より排除される領域は灰色、質量二乗差の観測値と合致する質量

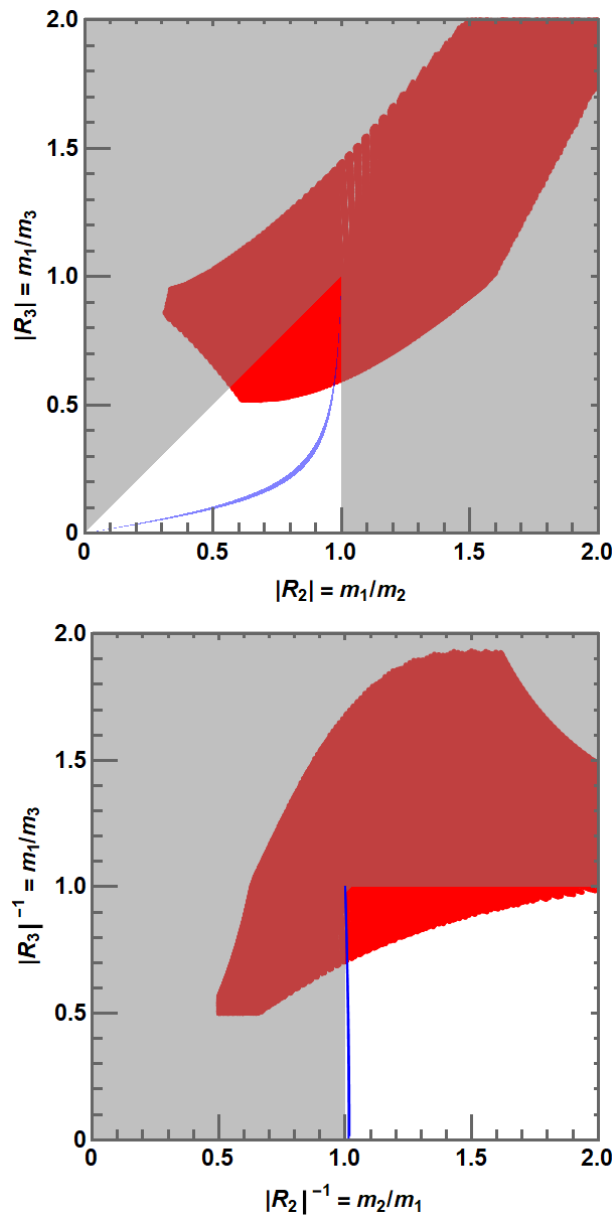


図 5.2: パターン B_6 に対する質量比 $|R_2|, |R_3|$ の予言値。(上:順階層性、下:逆階層性)

比の領域は青色で表した。パターン B_5 は、質量二乗差の観測値と合致する質量比の領域 (青) 上に質量比の予言値 (赤) が重なる部分が NH, IH 両方ともあり、よってニュートリノ振動実験結果を再現できるパラメーター領域を持っていることが分かった。

同じく、パターン B_6 における質量比 $|R_2|, |R_3|$ の値を図 5.2 に図示した。パターン B_6 も、質量二乗差の観測値と合致する質量比の領域 (青) 上に質量比の予言値 (赤) が重なる部分が NH, IH 両方ともあり、よってニュートリノ振動実験結果を再現できるパラメーター領域を持っていることが分かり、更に、式 (4.81) の関係が確かめられた。

同じく、パターン F_3 における質量比 $|R_2|, |R_3|$ の値を図 5.3 に図示した。一方、パターン F_3 は、質量比の予言値 (赤) の全てが、質量比の条件 (5.9) より排除される灰色の領域に存在するので、ニュートリノ振動実験結果を再現できるパラメーター領域を持たないことがわかった。

従って、表 4.2 おける全パターンに対して、パターン F_3 を作る順列 P_{213}, P_{231} の場合は、振動実験結果を再現するパラメーター領域がなく排除され、パターン B_5, B_6 を構成する組み合わせが、ニュートリノ振動実験結果を再現するパラメーター領域を持つことがわかった。

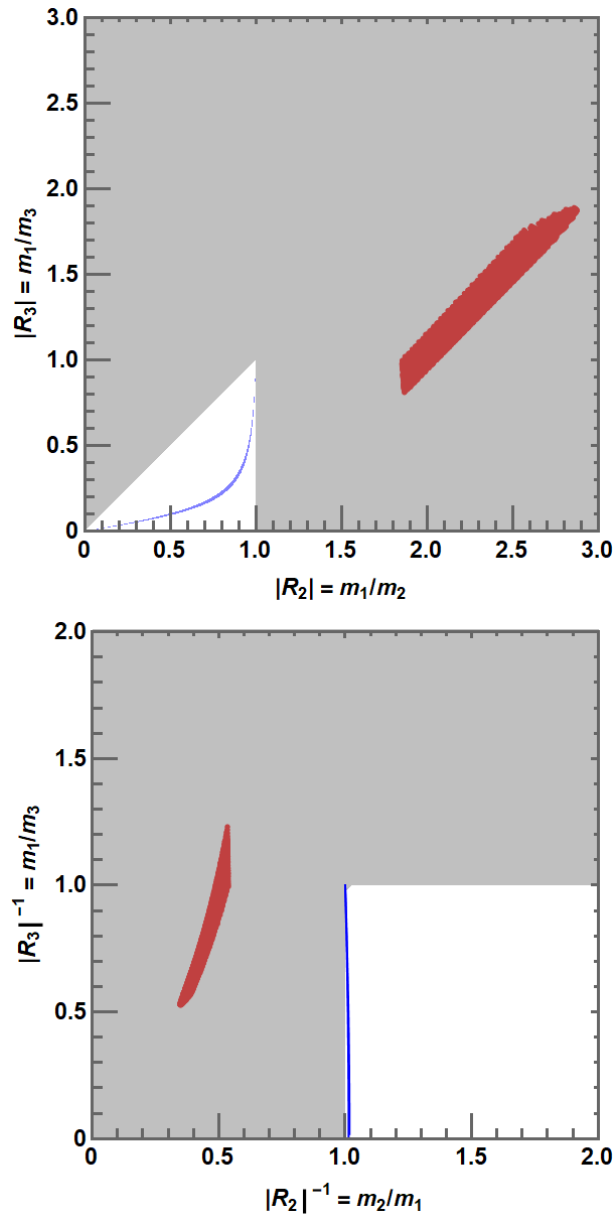


図 5.3: パターン F_3 に対する質量比 $|R_2|, |R_3|$ の予言値。(上:順階層性、下:逆階層性)

5.2 模型の予言

節 5.1 では、パターン B_5, B_6 が NH, IH 両方の場合において、ニュートリノ振動実験結果を再現するパラメーター領域を持つことが判明した。

次に、このパターンに対して、ニュートリノ振動実験結果の $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}, \Delta m_{\text{sol}}^2, \Delta m_{\text{atm}}^2$ の観測値 (χ^2 分布) を用いて、軽いニュートリノ 3 世代の質量和 $\sum m_i$ と 3 つの CP 位相 $\delta_{\text{CP}}, \alpha_{21}, \alpha_{31}$ およびニュートリノを放出しない二重ベータ崩壊 ($0\nu\beta\beta$) の有効質量 m_{eff} のに対する予言を示す。但し、模型の予言値を、カイ二乗検定を行い、68%, 95% 信頼区間 (Confidence interval, CI) で評価する。ここで考えるカイ二乗検定は、5 つの変数 $x_i = (\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}, \Delta m_{\text{sol}}^2, \Delta m_{\text{atm}}^2)$ に対して、その分散の和が 5.89 以下の場合が 68% 信頼区間、11.07 以下の場合が 95% 信頼区間 95% を持つことが次のように知られている。

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^5 \left(\frac{x_i - \bar{x}_i}{\sigma(x_i)} \right)^2 \begin{cases} \leq 5.89 \text{ (68CI)} \\ \leq 11.07 \text{ (95CI)} \end{cases} . \quad (5.10)$$

これから模型の予言を図示する際、68% CI の範囲を緑、95% CI の範囲を赤として表示する。

5.2.1 ニュートリノの質量和

軽いニュートリノ 3 世代の質量和に対する予言値を評価する際、もう一つの考慮事項として、宇宙背景輻射 (Cosmic Microwave Background Radiation, CMB) 観測からの宇宙論的制限よりニュートリノの質量和の上限がある。本研究において、質量和の上限を以下のように考慮した [65]。

$$\sum_{i=3}^3 m_i < 0.16 \text{ eV} \quad (95\% \text{CI, Planck TT + lowE + BAO}) . \quad (5.11)$$

数値解析の結果を 68% CI (緑), 95% CI (赤) に区分して図 5.4 に図示した。また、質量和の上限によって排除される領域を灰色で表示した。パターン B_6 (NH) に対し、95% CI で $\sum m_i > 0.12 \text{ eV}$ を予言し、質量和の上限を適用することで混合角 $\sin^2 \theta_{23} = (0.58-0.62)$ と予言した。パターン B_5 (NH) に対しは、95% CI で $\sum m_i \geq 0.16 \text{ eV}$ を予言し、質量和の上限を適用すると混合角 $\sin^2 \theta_{23} \approx 0.41$ を限界的に予言した。パターン B_6 (IH) に対しは、95% CI で $\sum m_i \geq 0.18 \text{ eV}$ を予言するので、質量和の上限より混合角 $\sin^2 \theta_{23}$ に対して許される領域がなかった。パターン B_5 (IH) に対しは、95% CI で $\sum m_i \geq 0.16 \text{ eV}$ を予言し、質量和の上限を適用すると混合角 $\sin^2 \theta_{23} \approx 0.62$ を限界的に予言した。従って、パターン B_6 (NH) が相対的に最も軽い $\sum m_i$ を予言することが分かった。以上のことを表 5.2 にまとめた。

observable	B_6 (NH)	B_5 (NH)	B_6 (IH)	B_5 (IH)
$\sin^2 \theta_{23}$	(0.58–0.62)	≈ 0.41	≈ 0.415	≈ 0.62
$\sum m_i$	$> 0.12 \text{ eV}$	$> 0.16 \text{ eV}$	$> 0.18 \text{ eV}$	$> 0.16 \text{ eV}$

表 5.2: 各パターンごとの混合角 $\sin^2 \theta_{23}$ とニュートリノ質量和 $\sum m_i$ の予言値。

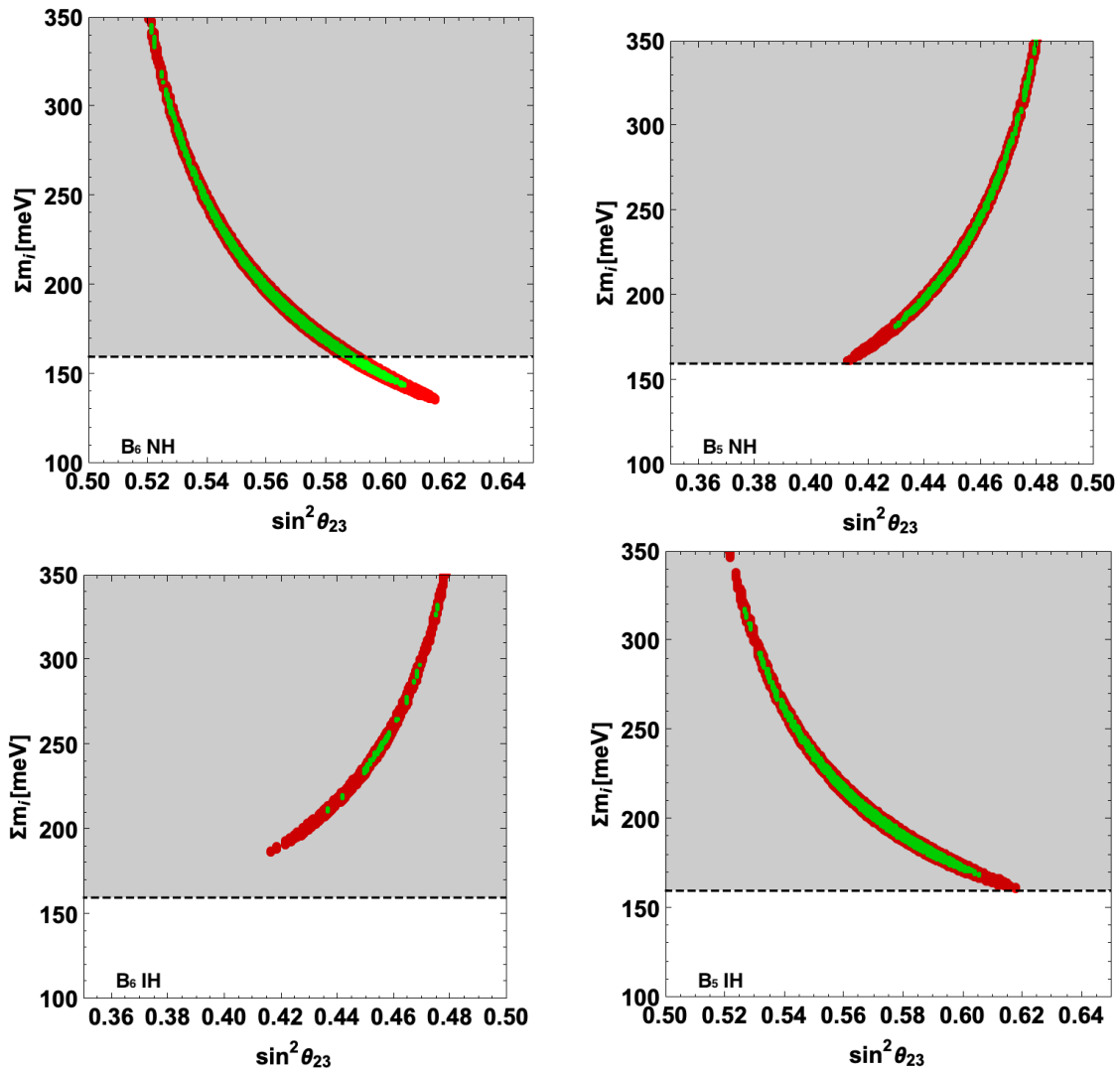


図 5.4: 混合角 $\sin^2 \theta_{23}$ とニュートリノ質量和 $\sum m_i$ に対する模型の予言。

左上: $B_6(\text{NH})$ 、右上: $B_5(\text{NH})$ 、左下: $B_6(\text{IH})$ 、右下: $B_5(\text{IH})$

5.2.2 CP 位相

混合角 θ_{23} とディラック CP 位相 δ_{CP} に対する模型の予言を図 5.5 に図示した。我々の模型はパターン $B_6(\text{NH})$ に対し、95%CI で混合角 $\sin^2 \theta_{23} = (0.58-0.62)$ 、 $\delta_{\text{CP}} \approx \pm(0.417-0.499)\pi$ を予言した。パターン $B_5(\text{NH})$ に対しは、95%CI で混合角 $\sin^2 \theta_{23} = (0.41-0.51)$ 、 $\delta_{\text{CP}} \approx \pm(0.5-0.52)\pi$ を予言した。パターン $B_6(\text{IH})$ に対しは、95%CI で混合角 $\sin^2 \theta_{23} = (0.42-0.5)$ 、 $\delta_{\text{CP}} \approx \pm(0.5-0.509)\pi$ を予言した。パターン $B_5(\text{IH})$ に対しは、95%CI で混合角 $\sin^2 \theta_{23} = (0.5-0.62)$ 、 $\delta_{\text{CP}} \approx \pm(0.49-0.5)\pi$ を予言した。以上の模型の予言を T2K 実験 [63] の結果と比べると、 $\delta_{\text{CP}} \simeq 0.5\pi$ が支持されることがわかる。以上のことを表 5.3 にまとめた。

マヨラナ CP 位相 α_{21} とディラック CP 位相 δ_{CP} に対する模型の予言を図 5.6 に図示した。我々

observable	$B_6(\text{NH})$	$B_5(\text{NH})$	$B_6(\text{IH})$	$B_5(\text{IH})$
δ_{CP}	$\pm(0.417-0.499)\pi$	$\pm(0.5-0.52)\pi$	$\pm(0.5-0.509)\pi$	$\pm(0.49-0.5)\pi$
$\sin^2 \theta_{23}$	$(0.52-0.62)$	$(0.41-0.51)$	$(0.42-0.5)$	$(0.5-0.62)$

表 5.3: 各パターンごとのディラック CP 位相 δ_{CP} と混合角 $\sin^2 \theta_{23}$ の予言値。

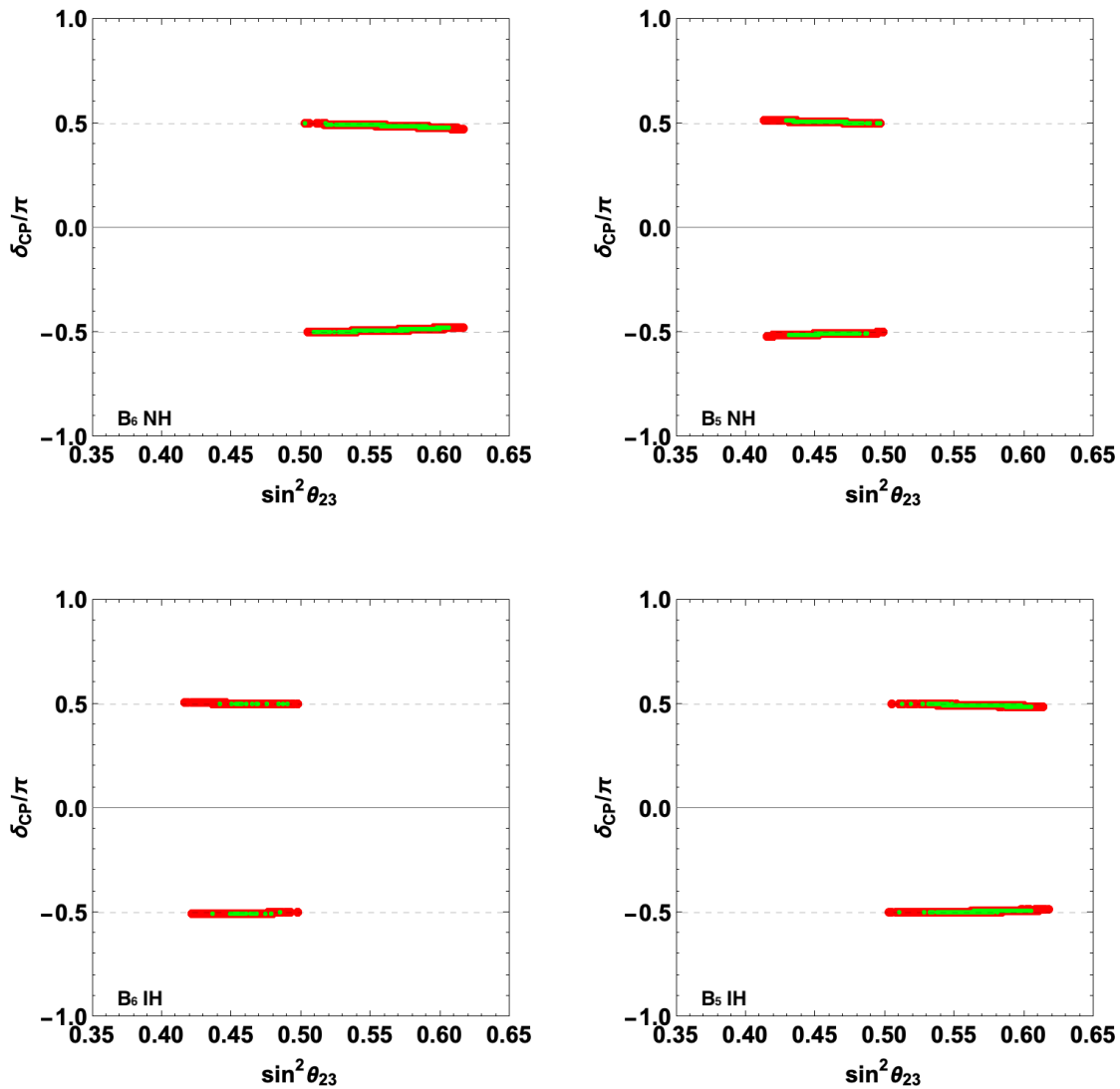


図 5.5: 混合角 $\sin^2 \theta_{23}$ とディラック CP 位相 δ_{CP} に対する模型の予言。

左上: $B_6(\text{NH})$ 、右上: $B_5(\text{NH})$ 、左下: $B_6(\text{IH})$ 、右下: $B_5(\text{IH})$

の模型はパターン $B_6(\text{NH})$ に対し、95%CI で $\delta_{\text{CP}} \approx 0.5\pi$ に対して $\alpha_{21} \approx 2\pi - \epsilon$ 、 $\delta_{\text{CP}} \approx -0.5\pi$ に対して $\alpha_{21} \approx 0 + \epsilon$ を予言した。パターン $B_5(\text{NH})$ に対しは、95%CI で $\delta_{\text{CP}} \approx 0.5\pi$ に対して $\alpha_{21} \approx 0 + \epsilon$ 、 $\delta_{\text{CP}} \approx -0.5\pi$ に対して $\alpha_{21} \approx 2\pi - \epsilon$ を予言した。パターン $B_6(\text{IH})$ に対しは、95%CI で $\delta_{\text{CP}} \approx 0.5\pi$ に対して $\alpha_{21} \approx 0 + \epsilon$ 、 $\delta_{\text{CP}} \approx -0.5\pi$ に対して $\alpha_{21} \approx 2\pi - \epsilon$ を予言した。パターン $B_5(\text{IH})$ に対しは、95%CI で $\delta_{\text{CP}} \approx 0.5\pi$ に対して $\alpha_{21} \approx 2\pi - \epsilon$ 、 $\delta_{\text{CP}} \approx -0.5\pi$ に対して $\alpha_{21} \approx 0 + \epsilon$ を予言した。以上のことを表 5.4 にまとめた。

マヨラナ CP 位相 α_{31} とディラック CP 位相 δ_{CP} に対する模型の予言を図 5.7 に図示した。我々の模型はパターン $B_6(\text{NH})$ に対し、95%CI で $\delta_{\text{CP}} \approx \pm 0.5\pi$ に対して $\alpha_{31} \approx 0.5\pi \mp \epsilon$ を予言した。パターン $B_5(\text{NH})$ に対しは、95%CI で $\delta_{\text{CP}} \approx \pm 0.5\pi$ に対して $\alpha_{31} \approx 0.5\pi \pm \epsilon$ を予言した。パターン $B_6(\text{IH})$ に対しは、95%CI で $\delta_{\text{CP}} \approx \pm 0.5\pi$ に対して $\alpha_{31} \approx 0.5\pi \pm \epsilon$ を予言した。パターン $B_5(\text{IH})$ に対しは、95%CI で $\delta_{\text{CP}} \approx \pm 0.5\pi$ に対して $\alpha_{31} \approx 0.5\pi \mp \epsilon$ を予言した。以上のことを表 5.5 にまとめた。

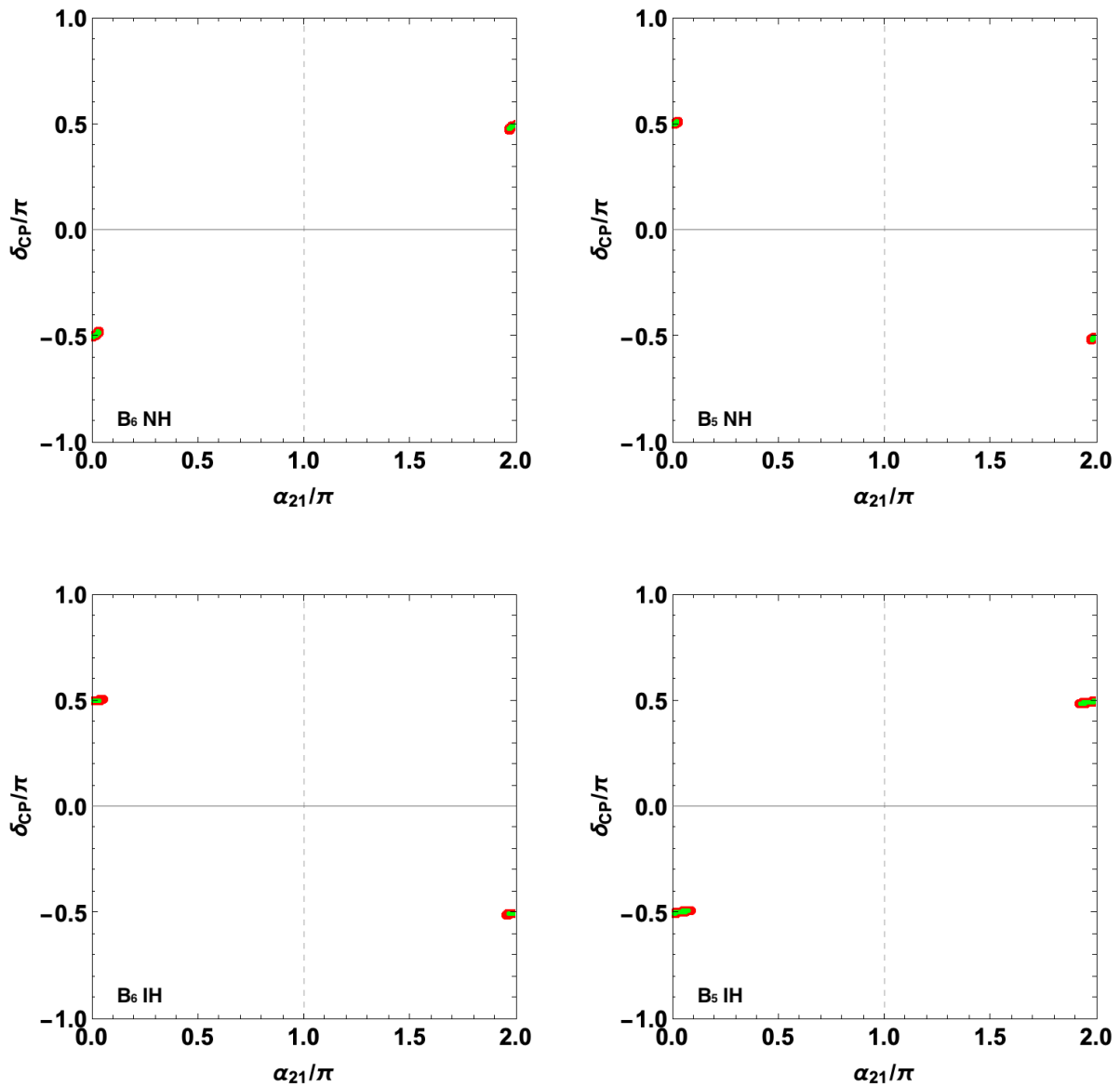


図 5.6: マヨラナ CP 位相 α_{21} とディラック CP 位相 δ_{CP} に対する模型の予言。
 左上: $B_6(\text{NH})$ 、右上: $B_5(\text{NH})$ 、左下: $B_6(\text{IH})$ 、右下: $B_5(\text{IH})$

observable	$B_6(\text{NH})$	$B_5(\text{NH})$	$B_6(\text{IH})$	$B_5(\text{IH})$
δ_{CP}	$(+0.5\pi, -0.5\pi)$	$(+0.5\pi, -0.5\pi)$	$(+0.5\pi, -0.5\pi)$	$(+0.5\pi, -0.5\pi)$
α_{21}	$(2\pi - \epsilon, 0 + \epsilon)$	$(0 + \epsilon, 2\pi - \epsilon)$	$(0 + \epsilon, 2\pi - \epsilon)$	$(2\pi - \epsilon, 0 + \epsilon)$

表 5.4: 各パターンごとのディラック CP 位相 δ_{CP} とマヨラナ CP 位相 α_{21} の予言値。

observable	$B_6(\text{NH})$	$B_5(\text{NH})$	$B_6(\text{IH})$	$B_5(\text{IH})$
δ_{CP}	$\pm 0.5\pi$	$\pm 0.5\pi$	$\pm 0.5\pi$	$\pm 0.5\pi$
α_{31}	$0.5\pi \mp \epsilon$	$0.5\pi \pm \epsilon$	$0.5\pi \pm \epsilon$	$0.5\pi \mp \epsilon$

表 5.5: 各パターンごとのディラック CP 位相 δ_{CP} とマヨラナ CP 位相 α_{31} の予言値。

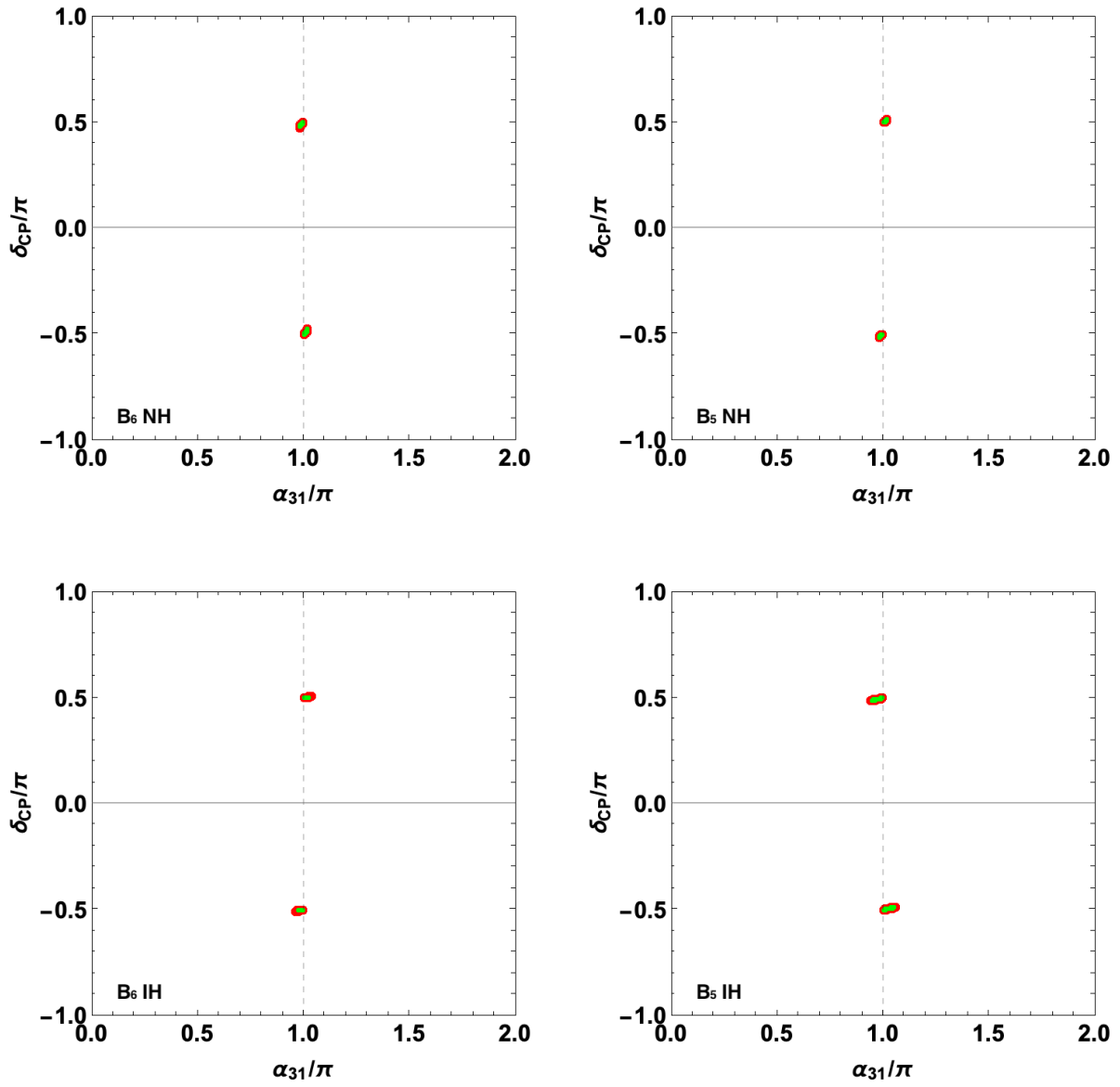


図 5.7: マヨラナ CP 位相 α_{31} とディラック CP 位相 δ_{CP} に対する模型の予言。
 左上: B_6 (NH)、右上: B_5 (NH)、左下: B_6 (IH)、右下: B_5 (IH)

5.2.3 ニュートリノを放出しない二重ベータ崩壊

ニュートリノを放出しない二重ベータ崩壊における有効質量 m_{eff} とニュートリノの質量和 $\sum m_i$ に対する模型の予言を宇宙論的制限よりニュートリノの質量和の上限を灰色にして図 5.8 に図示した。また、質量和の上限によって排除される領域を灰色で表示した。

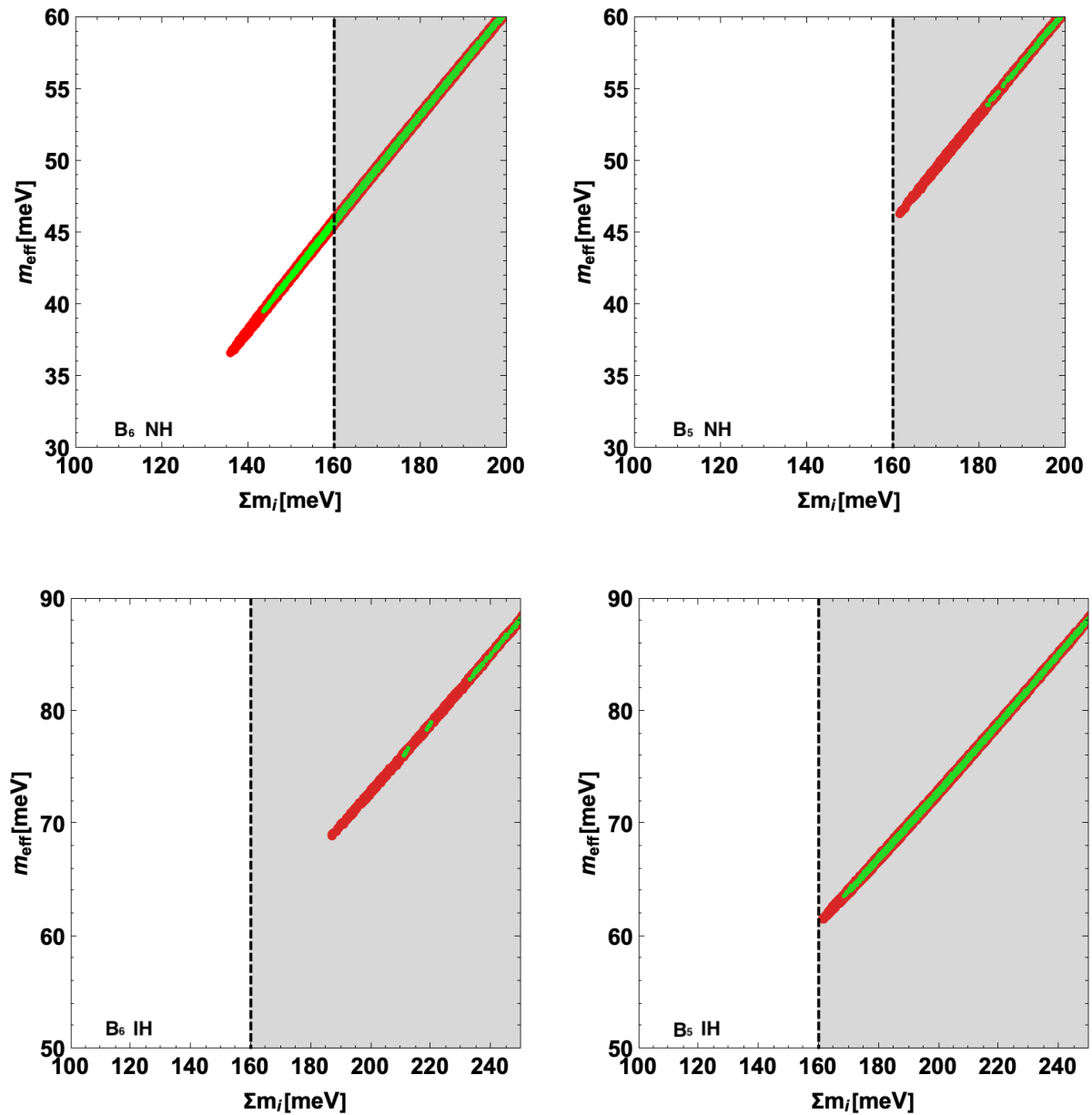


図 5.8: ニュートリノ質量和 $\sum m_i$ と $0\nu\beta\beta$ 崩壊における有効質量 m_{eff} に対する模型の予言。
 左上: $B_6(\text{NH})$ 、右上: $B_5(\text{NH})$ 、左下: $B_6(\text{IH})$ 、右下: $B_5(\text{IH})$

我々の模型はパターン $B_6(\text{NH})$ に対し、95%CI で $m_{\text{eff}} > 0.12\text{eV}$ を予言し、質量和の上限を適用することで混合角 $\sin^2 \theta_{23} = (0.58-0.62)$ と予言した。パターン $B_5(\text{NH})$ に対しは、95%CI で $\sum m_i \geq 0.16\text{eV}$ を予言し、質量和の上限を適用すると混合角 $\sin^2 \theta_{23} \approx 0.41$ を限界的に予言した。パターン $B_6(\text{IH})$ に対しは、95%CI で $\sum m_i \geq 0.18\text{eV}$ を予言するので、質量和の上限より混合角 $\sin^2 \theta_{23}$ に対して許される領域がなかった。パターン $B_5(\text{IH})$ に対しは、95%CI で $\sum m_i \geq 0.16\text{eV}$

observable	$B_6(\text{NH})$	$B_5(\text{NH})$	$B_6(\text{IH})$	$B_5(\text{IH})$
m_{eff}	$(0.037 - 0.047) \text{ eV}$	$\approx 0.045 \text{ eV}$	$(> 0.068 \text{ eV})$	$\approx 0.060 \text{ eV}$

表 5.6: 各パターンごとのディラック CP 位相 δ_{CP} とマヨラナ CP 位相 α_{21} の予言値。

を予言し、質量和の上限を適用すると混合角 $\sin^2 \theta_{23} \approx 0.62$ を限界的に予言した。従って、パターン $B_6(\text{NH})$ が相対的に最も軽い $\sum m_i$ を予言することが分かった。以上のことを表 5.2 にまとめた。CMB 観測からの宇宙論的制限よりニュートリノの質量和の上限 $\sum m_i < 0.16 \text{ eV}$ を考えると、パターン $B_6(\text{NH})$ は許され、 $B_5(\text{NH}, \text{IH})$ はかろうじて許される。 $B_6(\text{IH})$ は許される領域がない。これらの結果は KamLAND-Zen 実験 [64] で報告された有効質量の上限 $m_{\text{eff}} \leq (0.061 - 0.165) \text{ eV}$ に近い。更に、将来の KamLAND-Zen 800 実験の探索領域に含まれるため、検証に期待がかかる。

第6章 結論

本博士論文では、標準模型では説明できない観測事実であるニュートリノの微小質量、およびそのフレーバー構造に関する問題を解決するための拡張模型を探究した。前者に対しては、ニュートリノの微小質量を自然に説明できるシーソー機構を実現するために、新たに3つの右巻きニュートリノを導入した。また、後者のレプトンのフレーバー構造を記述するために10次元超弦理論によける余剰次元のトラスコンパクト化に伴い生じるモジュラー対称性を起源とする離散的対称性を導入した。しかし、モジュラー不変なKählerポテンシャルの追加項により付加的な世代間混合が生じ、この効果は対称性で制御することができないため、モジュラー対称性を持つ模型の利点であった予言力が失われる可能性が指摘された。

本研究目的は、モジュラー不変なKählerポテンシャルの追加項の効果を抑制し、ニュートリノ振動実験結果を再現できる模型の構築である。モジュラー不変なKählerポテンシャルの追加項の効果を抑制するため、極大体積極限と呼ばれる $\text{Im } \tau \gg 1$ を考えた。この極限においてモジュラー形式には \mathbb{Z}_3 対称性が残り、Kähler計量は、世代に対して対角的になる。よって、世代間混合は、超ポテンシャル中の湯川相互作用から導かれ、モジュラー対称性により制御される。この \mathbb{Z}_3 対称性が残ると、ニュートリノ質量行列が単純になりすぎ、振動実験から判明した混合角や質量二乗差が説明できない。そのため、本研究では、新たに導入したゲージ重項 A_4 三重項の場 S を導入した。場 S の真空期待値を与えると、残存する \mathbb{Z}_3 対称性が完全に破り、実験と合致する混合と質量を説明することができた。さらに、このゲージ重項により、ヒッグス場の μ 項と右巻きニュートリノのマヨラナ質量の起源を説明した。

その結果、模型が持つニュートリノ質量行列の特徴として、その逆行列の独立2成分がゼロになる3つパターン (B_5, B_6, F_3) が現れた。次に、ニュートリノ振動実験結果の質量二乗差 $\Delta m_{\text{atm}}^2, \Delta m_{\text{sol}}^2$ と合致するかの検証した結果、パターン (B_5, B_6) が選別された。この二つのパターンに対して、ニュートリノ混合角 $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ と質量二乗差 $\Delta m_{\text{atm}}^2, \Delta m_{\text{sol}}^2$ を振動実験結果の 3σ 範囲の値を用いて、68%, 95%信頼区間でCP位相 $\delta_{\text{CP}}, \alpha_{21}, \alpha_{31}$ 、および軽いニュートリノの質量 $\sum m_i$ と $0\nu\beta\beta$ 崩壊における有効質量 m_{eff} を予言した。更に、宇宙論的制限と合致するかを検証した。

最後に、模型の予言をまとめる。全パターンについて、ディラックCP位相は $\delta_{\text{CP}} \approx \pm 1/2\pi$ 付近を、マヨラナCP位相は $\alpha_{21} \approx (0 \pm \epsilon), \alpha_{31} \approx (\pi \pm \epsilon)$ 付近が予言され、T2K実験との比較を行って、 $\delta_{\text{CP}} \approx -1/2\pi$ の予言が支持された。また、ニュートリノ振動実験結果を再現するパターン B_5 は、ニュートリノの質量階層性が順・逆階層性の両方の場合に対して、CMB観測からの宇宙論的制限よりニュートリノの質量和の上限 ($\sum m_i < 0.160\text{eV}$) を限界的に満たす範囲で、 $\sum m_i$ を予言した。一方、パターン B_6 は順階層性の場合に相対的に最も軽い $\sum m_i, m_{\text{eff}}$ を予言し、逆階層性の場合には ($\sum m_i > 0.180\text{eV}$) を予言して、観測と不整合になった。更に、模型が予言する $0\nu\beta\beta$ 崩壊におけるニュートリノの有効質量 m_{eff} は KamLAND-Zen の実験結果と報告された有効質量の上限 $m_{\text{eff}} \leq (61 - 165) \text{ meV}$ に近く、KamLAND-Zen の今後の探索領域 (30 - 80) meV に含まれるため、検証に期待がかかる。また、これからの T2K 実験 [103] および、RENO [104]、ハイパーカミオカンデ [105]、国際リニアコライダー [106] などの将来実験によって、模型のパターンの選別と予言の検証が期待される。

謝辞 本博士論文の作成に当たって、大変なご指導を頂きまして、浅賀武彦教授に心から感謝致します。また、本論文の内容に関して活発な議論、数値計算の検討、研究全般をサポートして頂いた共同研究者の吉田貴裕さんに心からお礼申し上げます。更に、沢山のアドバイスを頂きました谷本盛光教授、中野博章准教授、江尻信司准教授、日常の議論を通して協力して頂いた研究室の皆様に心から感謝致します。

付録A A_4 群の計算則

ここでは A_4 群の計算則を示す。 A_4 群は $\mathbf{1}, \mathbf{1}', \mathbf{1}'', \mathbf{3}$ の既約表現を持ち、 S, T 変換の下で各表現ごと

$$\begin{aligned}
 \mathbf{1} : S(\mathbf{1}) &= \mathbf{1}, & T(\mathbf{1}) &= \mathbf{1}, \\
 \mathbf{1}' : S(\mathbf{1}') &= \mathbf{1}, & T(\mathbf{1}') &= \omega, \quad (\omega = e^{i2\pi/3}) \\
 \mathbf{1}'' : S(\mathbf{1}'') &= \mathbf{1}, & T(\mathbf{1}'') &= \omega^2, \\
 \mathbf{3} : S(\mathbf{3}) &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, & T(\mathbf{3}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

のように変換され。また、変換に対して

$$S(\mathbf{r})^2 = T(\mathbf{r})^3 = (S(\mathbf{r})T(\mathbf{r}))^3 = \mathbf{1}, \quad (\mathbf{r} = \mathbf{1}, \mathbf{1}', \mathbf{1}'', \mathbf{3}), \tag{A.2}$$

の条件を満たす。二つの A_4 表現の掛け算は

$$\begin{aligned}
 \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} &= \mathbf{1}' \otimes \mathbf{1}'' = \mathbf{1}'' \otimes \mathbf{1}' = \mathbf{1}, \\
 \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}' &= \mathbf{1}' \otimes \mathbf{1} = \mathbf{1}'' \otimes \mathbf{1}'' = \mathbf{1}', \\
 \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}'' &= \mathbf{1}'' \otimes \mathbf{1} = \mathbf{1}' \otimes \mathbf{1}' = \mathbf{1}'', \\
 \mathbf{1} \otimes \mathbf{3} &= \mathbf{3} \otimes \mathbf{1} = \mathbf{1}' \otimes \mathbf{3} = \mathbf{3} \otimes \mathbf{1}' = \mathbf{1}'' \otimes \mathbf{3} = \mathbf{3} \otimes \mathbf{1}'' = \mathbf{3}, \\
 \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} &= \mathbf{1} \oplus \mathbf{1}' \oplus \mathbf{1}'' \oplus \mathbf{3}_S \oplus \mathbf{3}_A
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

に従う。 $\mathbf{3}_S, \mathbf{3}_A$ それぞれは掛け算則における対称 (交換)、反対称 (反交換) な成分である。

$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ 掛け算の具体的な計算を以下に示す：

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_{\mathbf{3}} \otimes \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}_{\mathbf{3}} &= (a_1 b_2 + a_2 b_3 + a_3 b_1)_{\mathbf{1}} \oplus (a_3 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1)_{\mathbf{1}'} \oplus (a_2 b_2 + a_1 b_3 + a_3 b_1)_{\mathbf{1}''} \\
 &\oplus \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2a_1 b_1 - a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ 2a_3 b_3 - a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ 2a_2 b_2 - a_1 b_3 - a_3 b_1 \end{pmatrix}_{\mathbf{3}_S} \oplus \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \end{pmatrix}_{\mathbf{3}_A}.
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

付録B モジュラー形式の導出

ここでは $\Gamma_3 \simeq A_4$ におけるウェイト 2 のモジュラー形式の導出について説明する。まず、一般的なモジュラー形式のモジュラー変換 $\tau \rightarrow \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ を考えると定義より

$$f_i(\tau) \rightarrow (c\tau + d)^{k_i} f_i(\tau) \quad (\text{B.1})$$

に変換される。次に、以下のようなモジュラー変換を考える：

$$Y(\tau) = \frac{d}{d\tau} \sum_i \log f_i^{p_i}(\tau) \rightarrow (c\tau + d)^2 \frac{d}{d\tau} \sum_i \log f_i^{p_i}(\tau) + c(c\tau + d) \sum_i p_i k_i. \quad (\text{B.2})$$

$Y(\tau)$ は $\sum p_i k_i = 0$ の時、ウェイト 2 のモジュラー形式になる。このようなモジュラー形式を得るために 3.1 節で導入したデデキントのイータ関数：

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad q = e^{2\pi i \tau}, \quad (\text{Im } \tau > 0), \quad (\text{B.3})$$

$$\eta(-1/\tau) = \sqrt{-i\tau} \eta(\tau), \quad \eta(\tau + 1) = e^{i\pi/12} \eta(\tau), \quad (\text{B.4})$$

を活用する。 η 関数の特定のセットはモジュラー変換の下で閉じていて、 η^{24} はウェイト 12 を持つ性質がある。 $\Gamma_3 \simeq A_4$ における η 関数の閉性 (closure) は、 T 変換 ($\tau \rightarrow \tau + 1$) に対して

$$\begin{aligned} \eta(3\tau) &\rightarrow e^{i\pi/4} \eta(3\tau), \\ \eta\left(\frac{\tau}{3}\right) &\rightarrow \eta\left(\frac{\tau+1}{3}\right), \quad \eta\left(\frac{\tau+1}{3}\right) \rightarrow \eta\left(\frac{\tau+2}{3}\right), \quad \eta\left(\frac{\tau+2}{3}\right) \rightarrow e^{i\pi/12} \eta\left(\frac{\tau}{3}\right), \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

S 変換 ($\tau \rightarrow -1/\tau$) に対して

$$\begin{aligned} \eta(3\tau) &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{-i\tau} \eta\left(\frac{\tau}{3}\right), \quad \eta\left(\frac{\tau}{3}\right) \rightarrow \sqrt{-3i\tau} \eta(3\tau), \\ \eta\left(\frac{\tau+1}{3}\right) &\rightarrow e^{i\pi/12} \sqrt{-i\tau} \eta\left(\frac{\tau+2}{3}\right), \quad \eta\left(\frac{\tau+2}{3}\right) \rightarrow e^{i\pi/12} \sqrt{-i\tau} \eta\left(\frac{\tau}{3}\right), \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

と表される。このような η 関数の置き換えはモジュラー変換と共に、 A_4 変換を実現する。閉性の η 関数を揃えてウェイト 2 のモジュラー関数が以下のように得られる：

$$Y(\alpha, \beta, \gamma, \delta | \tau) = \frac{d}{d\tau} \left[\alpha \log \eta\left(\frac{\tau}{3}\right) + \beta \log \eta\left(\frac{\tau+1}{3}\right) + \gamma \log \eta\left(\frac{\tau+2}{3}\right) + \delta \log \eta(3\tau) \right], \quad (\text{B.7})$$

($\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$).

S, T 変換によって関数 $Y(\alpha, \beta, \gamma, \delta | \tau)$ の中の係数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は

$$Y(\alpha, \beta, \gamma, \delta | \tau) \longrightarrow \begin{cases} \tau^2 Y(\delta, \gamma, \beta, \alpha | \tau) & : S \\ Y(\gamma, \alpha, \beta, \delta | \tau) & : T \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

のような置き換えの関係を持つ。

最後に、適切に $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の選んで、同時に A_4 変換性を持つ三重項 (3.10) $Y^{A_4}(\tau) = (Y_1(\tau), Y_2(\tau), Y_3(\tau))^T$,

$$\begin{aligned} Y_1(\tau) &= \frac{i}{2\pi} \left(\frac{\eta'(\tau/3)}{\eta(\tau/3)} + \frac{\eta'((\tau+1)/3)}{\eta((\tau+1)/3)} + \frac{\eta'((\tau+2)/3)}{\eta((\tau+2)/3)} - \frac{27\eta'(3\tau)}{\eta(3\tau)} \right), \\ Y_2(\tau) &= \frac{-i}{\pi} \left(\frac{\eta'(\tau/3)}{\eta(\tau/3)} + \omega^2 \frac{\eta'((\tau+1)/3)}{\eta((\tau+1)/3)} + \omega \frac{\eta'((\tau+2)/3)}{\eta((\tau+2)/3)} \right), \quad (\omega = e^{i2\pi/3}), \\ Y_3(\tau) &= \frac{-i}{\pi} \left(\frac{\eta'(\tau/3)}{\eta(\tau/3)} + \omega \frac{\eta'((\tau+1)/3)}{\eta((\tau+1)/3)} + \omega^2 \frac{\eta'((\tau+2)/3)}{\eta((\tau+2)/3)} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

を構成する。 A_4 変換性は A_4 群の特定の基底を選んだ上、ユニタリ表現を用いて次式で表される：

$$Y^{A_4}(\tau) \longrightarrow \begin{cases} \tau^2 \rho(S) Y^{A_4}(\tau) & : S \\ \rho(T) Y^{A_4}(\tau) & : T \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

$$\rho(S) : \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \rho(T) : \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

参考文献

- [1] S. L. Glashow. Partial Symmetries of Weak Interactions. *Nucl. Phys.*, 22:579–588, 1961.
- [2] Steven Weinberg. A Model of Leptons. *Phys. Rev. Lett.*, 19:1264–1266, 1967.
- [3] Abdus Salam. Weak and Electromagnetic Interactions. *Conf. Proc. C*, 680519:367–377, 1968.
- [4] B. Pontecorvo. Inverse beta processes and nonconservation of lepton charge. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 34:247, 1957.
- [5] Y. Fukuda et al. Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos. *Phys. Rev. Lett.*, 81:1562–1567, 1998.
- [6] W. W. M. Allison et al. Neutrino oscillation effects in Soudan-2 upward-stopping muons. *Phys. Rev. D*, 72:052005, 2005.
- [7] M Ambrosio et al. Atmospheric neutrino oscillations from upward through going muon multiple scattering in MACRO. *Phys. Lett. B*, 566:35–44, 2003.
- [8] Q. R. Ahmad et al. Measurement of the rate of $\nu_e + d \rightarrow p + p + e^-$ interactions produced by ^8B solar neutrinos at the Sudbury Neutrino Observatory. *Phys. Rev. Lett.*, 87:071301, 2001.
- [9] L. Hsu. Review of experimental data: KamLAND. *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, 155:158–159, 2006.
- [10] M. H. Ahn et al. Indications of neutrino oscillation in a 250 km long baseline experiment. *Phys. Rev. Lett.*, 90:041801, 2003.
- [11] D. G. Michael et al. Observation of muon neutrino disappearance with the MINOS detectors and the NuMI neutrino beam. *Phys. Rev. Lett.*, 97:191801, 2006.
- [12] M. G. Catanesi. T2K Results and Perspectives. *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, 237-238:129–134, 2013.
- [13] Peter Minkowski. $\mu \rightarrow e\gamma$ at a Rate of One Out of 10^9 Muon Decays? *Phys. Lett. B*, 67:421–428, 1977.
- [14] Osamu Sawada and Akio Sugamoto, editors. *Proceedings: Workshop on the Unified Theories and the Baryon Number in the Universe: Tsukuba, Japan, February 13-14, 1979*, Tsukuba, Japan, 1979. Natl.Lab.High Energy Phys.

- [15] Murray Gell-Mann, Pierre Ramond, and Richard Slansky. Complex Spinors and Unified Theories. *Conf. Proc. C*, 790927:315–321, 1979.
- [16] S. L. Glashow. The Future of Elementary Particle Physics. *NATO Sci. Ser. B*, 61:687, 1980.
- [17] Rabindra N. Mohapatra and Goran Senjanovic. Neutrino Mass and Spontaneous Parity Nonconservation. *Phys. Rev. Lett.*, 44:912, 1980.
- [18] Guido Altarelli and Ferruccio Feruglio. Discrete Flavor Symmetries and Models of Neutrino Mixing. *Rev. Mod. Phys.*, 82:2701–2729, 2010.
- [19] Hajime Ishimori, Tatsuo Kobayashi, Hiroshi Ohki, Yusuke Shimizu, Hiroshi Okada, and Morimitsu Tanimoto. Non-Abelian Discrete Symmetries in Particle Physics. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, 183:1–163, 2010.
- [20] D. Hernandez and A. Yu. Smirnov. Lepton mixing and discrete symmetries. *Phys. Rev. D*, 86:053014, 2012.
- [21] Stephen F. King and Christoph Luhn. Neutrino Mass and Mixing with Discrete Symmetry. *Rept. Prog. Phys.*, 76:056201, 2013.
- [22] S. T. Petcov. Discrete Flavour Symmetries, Neutrino Mixing and Leptonic CP Violation. *Eur. Phys. J. C*, 78(9):709, 2018.
- [23] Ferruccio Feruglio. *Are neutrino masses modular forms?*, pages 227–266. 2019.
- [24] Tatsuo Kobayashi, Kentaro Tanaka, and Takuya H. Tatsuishi. Neutrino mixing from finite modular groups. *Phys. Rev. D*, 98(1):016004, 2018.
- [25] J. T. Penedo and S. T. Petcov. Lepton Masses and Mixing from Modular S_4 Symmetry. *Nucl. Phys. B*, 939:292–307, 2019.
- [26] Juan Carlos Criado and Ferruccio Feruglio. Modular Invariance Faces Precision Neutrino Data. *SciPost Phys.*, 5(5):042, 2018.
- [27] Tatsuo Kobayashi, Naoya Omoto, Yusuke Shimizu, Kenta Takagi, Morimitsu Tanimoto, and Takuya H. Tatsuishi. Modular A_4 invariance and neutrino mixing. *JHEP*, 11:196, 2018.
- [28] P. P. Novichkov, J. T. Penedo, S. T. Petcov, and A. V. Titov. Modular S_4 models of lepton masses and mixing. *JHEP*, 04:005, 2019.
- [29] P. P. Novichkov, J. T. Penedo, S. T. Petcov, and A. V. Titov. Modular A_5 symmetry for flavour model building. *JHEP*, 04:174, 2019.
- [30] Francisco J. de Anda, Stephen F. King, and Elena Perdomo. $SU(5)$ grand unified theory with A_4 modular symmetry. *Phys. Rev. D*, 101(1):015028, 2020.
- [31] Hiroshi Okada and Morimitsu Tanimoto. CP violation of quarks in A_4 modular invariance. *Phys. Lett. B*, 791:54–61, 2019.

- [32] Tatsuo Kobayashi, Yusuke Shimizu, Kenta Takagi, Morimitsu Tanimoto, Takuya H. Tatsuishi, and Hikaru Uchida. Finite modular subgroups for fermion mass matrices and baryon/lepton number violation. *Phys. Lett. B*, 794:114–121, 2019.
- [33] P. P. Novichkov, S. T. Petcov, and M. Tanimoto. Trimaximal Neutrino Mixing from Modular A_4 Invariance with Residual Symmetries. *Phys. Lett. B*, 793:247–258, 2019.
- [34] Gui-Jun Ding, Stephen F. King, and Xiang-Gan Liu. Neutrino mass and mixing with A_5 modular symmetry. *Phys. Rev. D*, 100(11):115005, 2019.
- [35] Takaaki Nomura and Hiroshi Okada. A modular A_4 symmetric model of dark matter and neutrino. *Phys. Lett. B*, 797:134799, 2019.
- [36] P. P. Novichkov, J. T. Penedo, S. T. Petcov, and A. V. Titov. Generalised CP Symmetry in Modular-Invariant Models of Flavour. *JHEP*, 07:165, 2019.
- [37] Ivo de Medeiros Varzielas, Stephen F. King, and Ye-Ling Zhou. Multiple modular symmetries as the origin of flavor. *Phys. Rev. D*, 101(5):055033, 2020.
- [38] Xiang-Gan Liu and Gui-Jun Ding. Neutrino Masses and Mixing from Double Covering of Finite Modular Groups. *JHEP*, 08:134, 2019.
- [39] Hiroshi Okada and Yuta Orikasa. Modular S_3 symmetric radiative seesaw model. *Phys. Rev. D*, 100(11):115037, 2019.
- [40] Tatsuo Kobayashi, Yusuke Shimizu, Kenta Takagi, Morimitsu Tanimoto, and Takuya H. Tatsuishi. New A_4 lepton flavor model from S_4 modular symmetry. *JHEP*, 02:097, 2020.
- [41] Gui-Jun Ding, Stephen F. King, and Xiang-Gan Liu. Modular A_4 symmetry models of neutrinos and charged leptons. *JHEP*, 09:074, 2019.
- [42] Stephen F. King and Ye-Ling Zhou. Trimaximal TM_1 mixing with two modular S_4 groups. *Phys. Rev. D*, 101(1):015001, 2020.
- [43] Takaaki Nomura, Hiroshi Okada, and Oleg Popov. A modular A_4 symmetric scotogenic model. *Phys. Lett. B*, 803:135294, 2020.
- [44] Juan Carlos Criado, Ferruccio Feruglio, and Simon J. D. King. Modular Invariant Models of Lepton Masses at Levels 4 and 5. *JHEP*, 02:001, 2020.
- [45] Tatsuo Kobayashi, Yusuke Shimizu, Kenta Takagi, Morimitsu Tanimoto, and Takuya H. Tatsuishi. A_4 lepton flavor model and modulus stabilization from S_4 modular symmetry. *Phys. Rev. D*, 100(11):115045, 2019. [Erratum: *Phys.Rev.D* 101, 039904 (2020)].
- [46] Takehiko Asaka, Yongtae Heo, Takuya H. Tatsuishi, and Takahiro Yoshida. Modular A_4 invariance and leptogenesis. *JHEP*, 01:144, 2020.
- [47] Takehiko Asaka, Yongtae Heo, and Takahiro Yoshida. Lepton flavor model with modular A_4 symmetry in large volume limit. *Phys. Lett. B*, 811:135956, 2020.

- [48] Mu-Chun Chen, Saúl Ramos-Sánchez, and Michael Ratz. A note on the predictions of models with modular flavor symmetries. *Phys. Lett. B*, 801:135153, 2020.
- [49] Gui-Jun Ding, Stephen F. King, Xiang-Gan Liu, and Jun-Nan Lu. Modular S_4 and A_4 symmetries and their fixed points: new predictive examples of lepton mixing. *JHEP*, 12:030, 2019.
- [50] Di Zhang. A modular A_4 symmetry realization of two-zero textures of the Majorana neutrino mass matrix. *Nucl. Phys. B*, 952:114935, 2020.
- [51] Xin Wang and Shun Zhou. The minimal seesaw model with a modular S_4 symmetry. *JHEP*, 05:017, 2020.
- [52] Tatsuo Kobayashi, Yusuke Shimizu, Kenta Takagi, Morimitsu Tanimoto, Takuya H. Tatsuishi, and Hikaru Uchida. CP violation in modular invariant flavor models. *Phys. Rev. D*, 101(5):055046, 2020.
- [53] Takaaki Nomura, Hiroshi Okada, and Sudhanwa Patra. An inverse seesaw model with A_4 -modular symmetry. *Nucl. Phys. B*, 967:115395, 2021.
- [54] Tatsuo Kobayashi, Takaaki Nomura, and Takashi Shimomura. Type II seesaw models with modular A_4 symmetry. *Phys. Rev. D*, 102(3):035019, 2020.
- [55] Jun-Nan Lu, Xiang-Gan Liu, and Gui-Jun Ding. Modular symmetry origin of texture zeros and quark lepton unification. *Phys. Rev. D*, 101(11):115020, 2020.
- [56] Xin Wang. Lepton flavor mixing and CP violation in the minimal type-(I+II) seesaw model with a modular A_4 symmetry. *Nucl. Phys. B*, 957:115105, 2020.
- [57] Hiroshi Okada and Yutaro Shoji. A radiative seesaw model with three Higgs doublets in modular A_4 symmetry. *Nucl. Phys. B*, 961:115216, 2020.
- [58] Gui-Jun Ding and Ferruccio Feruglio. Testing Moduli and Flavon Dynamics with Neutrino Oscillations. *JHEP*, 06:134, 2020.
- [59] Luis Lavoura. Zeros of the inverted neutrino mass matrix. *Phys. Lett. B*, 609:317–322, 2005.
- [60] E. I. Lashin and N. Chamoun. Zero minors of the neutrino mass matrix. *Phys. Rev. D*, 78:073002, 2008.
- [61] Harald Fritzsch, Zhi-zhong Xing, and Shun Zhou. Two-zero Textures of the Majorana Neutrino Mass Matrix and Current Experimental Tests. *JHEP*, 09:083, 2011.
- [62] Ivan Esteban, M. C. Gonzalez-Garcia, Michele Maltoni, Thomas Schwetz, and Albert Zhou. The fate of hints: updated global analysis of three-flavor neutrino oscillations. *JHEP*, 09:178, 2020.
- [63] K. Abe et al. Constraint on the matter–antimatter symmetry-violating phase in neutrino oscillations. *Nature*, 580(7803):339–344, 2020. [Erratum: *Nature* 583, E16 (2020)].

- [64] A. Gando et al. Search for Majorana Neutrinos near the Inverted Mass Hierarchy Region with KamLAND-Zen. *Phys. Rev. Lett.*, 117(8):082503, 2016. [Addendum: *Phys.Rev.Lett.* 117, 109903 (2016)].
- [65] N. Aghanim et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 641:A6, 2020. [Erratum: *Astron.Astrophys.* 652, C4 (2021)].
- [66] Nicola Cabibbo. Unitary Symmetry and Leptonic Decays. *Phys. Rev. Lett.*, 10:531–533, 1963.
- [67] Makoto Kobayashi and Toshihide Maskawa. CP Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction. *Prog. Theor. Phys.*, 49:652–657, 1973.
- [68] R. H. Dalitz. Note on the $\lambda(1405)$. *Eur. Phys. J.*, 3:676–678, 1998.
- [69] Ziro Maki, Masami Nakagawa, and Shoichi Sakata. Remarks on the unified model of elementary particles. *Prog. Theor. Phys.*, 28:870–880, 1962.
- [70] B. Pontecorvo. Neutrino Experiments and the Problem of Conservation of Leptonic Charge. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 53:1717–1725, 1967.
- [71] Steven Weinberg. Baryon and Lepton Nonconserving Processes. *Phys. Rev. Lett.*, 43:1566–1570, 1979.
- [72] P.A. Zyla et al. Review of Particle Physics. *PTEP*, 2020(8):083C01, 2020.
- [73] Francesco Vissani. Expected properties of massive neutrinos for mass matrices with a dominant block and random coefficients order unity. *Phys. Lett. B*, 508:79–84, 2001.
- [74] Francesco Vissani. A Statistical approach to leptonic mixings and neutrino masses. In *11th International School on Particles and Cosmology*, 11 2001.
- [75] P. F. Harrison, D. H. Perkins, and W. G. Scott. Tri-bimaximal mixing and the neutrino oscillation data. *Phys. Lett. B*, 530:167, 2002.
- [76] P. F. Harrison and W. G. Scott. Symmetries and generalizations of tri - bimaximal neutrino mixing. *Phys. Lett. B*, 535:163–169, 2002.
- [77] Guido Altarelli and Ferruccio Feruglio. Tri-bimaximal neutrino mixing from discrete symmetry in extra dimensions. *Nucl. Phys. B*, 720:64–88, 2005.
- [78] Guido Altarelli and Ferruccio Feruglio. Tri-bimaximal neutrino mixing, $A(4)$ and the modular symmetry. *Nucl. Phys. B*, 741:215–235, 2006.
- [79] Yusuke Shimizu, Morimitsu Tanimoto, and Atsushi Watanabe. Breaking Tri-bimaximal Mixing and Large θ_{13} . *Prog. Theor. Phys.*, 126:81–90, 2011.
- [80] Tatsuo Kobayashi, Hans Peter Nilles, Felix Ploger, Stuart Raby, and Michael Ratz. Stringy origin of non-Abelian discrete flavor symmetries. *Nucl. Phys. B*, 768:135–156, 2007.

- [81] Tatsuo Kobayashi, Stuart Raby, and Ren-Jie Zhang. Searching for realistic 4d string models with a Pati-Salam symmetry: Orbifold grand unified theories from heterotic string compactification on a $Z(6)$ orbifold. *Nucl. Phys. B*, 704:3–55, 2005.
- [82] Pyungwon Ko, Tatsuo Kobayashi, Jae-hyeon Park, and Stuart Raby. String-derived $D(4)$ flavor symmetry and phenomenological implications. *Phys. Rev. D*, 76:035005, 2007. [Erratum: *Phys.Rev.D* 76, 059901 (2007)].
- [83] Hiroyuki Abe, Kang-Sin Choi, Tatsuo Kobayashi, and Hiroshi Ohki. Non-Abelian Discrete Flavor Symmetries from Magnetized/Intersecting Brane Models. *Nucl. Phys. B*, 820:317–333, 2009.
- [84] M. Berasaluce-Gonzalez, P. G. Camara, F. Marchesano, D. Regalado, and A. M. Uranga. Non-Abelian discrete gauge symmetries in 4d string models. *JHEP*, 09:059, 2012.
- [85] J. Lauer, J. Mas, and Hans Peter Nilles. Duality and the Role of Nonperturbative Effects on the World Sheet. *Phys. Lett. B*, 226:251–256, 1989.
- [86] W. Lerche, D. Lust, and N. P. Warner. Duality Symmetries in $N = 2$ Landau-ginzburg Models. *Phys. Lett. B*, 231:417–424, 1989.
- [87] S. Ferrara, . D. Lust, and S. Theisen. Target Space Modular Invariance and Low-Energy Couplings in Orbifold Compactifications. *Phys. Lett. B*, 233:147–152, 1989.
- [88] D. Cremades, L. E. Ibanez, and F. Marchesano. Computing Yukawa couplings from magnetized extra dimensions. *JHEP*, 05:079, 2004.
- [89] Tatsuo Kobayashi and Satoshi Nagamoto. Zero-modes on orbifolds : magnetized orbifold models by modular transformation. *Phys. Rev. D*, 96(9):096011, 2017.
- [90] Tatsuo Kobayashi, Satoshi Nagamoto, Shintaro Takada, Shio Tamba, and Takuya H. Tatsuishi. Modular symmetry and non-Abelian discrete flavor symmetries in string compactification. *Phys. Rev. D*, 97(11):116002, 2018.
- [91] Reinier de Adelhart Toorop, Ferruccio Feruglio, and Claudia Hagedorn. Finite Modular Groups and Lepton Mixing. *Nucl. Phys. B*, 858:437–467, 2012.
- [92] S. Ferrara, D. Lust, Alfred D. Shapere, and S. Theisen. Modular Invariance in Supersymmetric Field Theories. *Phys. Lett. B*, 225:363, 1989.
- [93] J. P. Derendinger, S. Ferrara, C. Kounnas, and F. Zwirner. On loop corrections to string effective field theories: Field dependent gauge couplings and sigma model anomalies. *Nucl. Phys. B*, 372:145–188, 1992.
- [94] Luis E. Ibanez and Dieter Lust. Duality anomaly cancellation, minimal string unification and the effective low-energy Lagrangian of 4-D strings. *Nucl. Phys. B*, 382:305–361, 1992.
- [95] Tatsuo Kobayashi, Satoshi Nagamoto, and Shohei Uemura. Modular symmetry in magnetized/intersecting D-brane models. *PTEP*, 2017(2):023B02, 2017.

- [96] S. Ferrara, N. Magnoli, T. R. Taylor, and G. Veneziano. Duality and supersymmetry breaking in string theory. *Phys. Lett. B*, 245:409–416, 1990.
- [97] Mirjam Cvetič, A. Font, Luis E. Ibanez, D. Lust, and F. Quevedo. Target space duality, supersymmetry breaking and the stability of classical string vacua. *Nucl. Phys. B*, 361:194–232, 1991.
- [98] J. Wess and J. Bagger. *Supersymmetry and supergravity*. Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 1992.
- [99] Hajime Ishimori, Tatsuo Kobayashi, Hiroshi Ohki, Hiroshi Okada, Yusuke Shimizu, and Morimitsu Tanimoto. *An introduction to non-Abelian discrete symmetries for particle physicists*, volume 858. 2012.
- [100] Stephen F. King, Alexander Merle, Stefano Morisi, Yusuke Shimizu, and Morimitsu Tanimoto. Neutrino Mass and Mixing: from Theory to Experiment. *New J. Phys.*, 16:045018, 2014.
- [101] Vadim Kaplunovsky and Jan Louis. On Gauge couplings in string theory. *Nucl. Phys. B*, 444:191–244, 1995.
- [102] Surender Verma. Non-zero θ_{13} and CP-violation in inverse neutrino mass matrix. *Nucl. Phys. B*, 854:340–349, 2012.
- [103] Tsunayuki Matsubara. T2K future prospects with J-PARC neutrino beam and near detector upgrades. *JPS Conf. Proc.*, 33:011141, 2021.
- [104] K. K. Joo. New results from RENO & prospects with RENO-50. *J. Phys. Conf. Ser.*, 888(1):012012, 2017.
- [105] Francesca Di Lodovico. The Hyper-Kamiokande Experiment. *J. Phys. Conf. Ser.*, 888(1):012020, 2017.
- [106] Gerald Aarons et al. International Linear Collider Reference Design Report Volume 2: Physics at the ILC. 9 2007.