

2021 年度 博士論文

グランドゲージ・ヒッグス統一モデルに基づく
ディラック型ゲージノ質量の実現

佐藤 優成

新潟大学大学院自然科学研究科 博士後期課程
数理物質科学専攻 物理学コース

素粒子論研究室

目次

第 1 章	導入	1
第 2 章	ディラック・ゲージノ模型	4
2.1	超対称性	4
2.2	最小超対称標準模型	7
2.3	ディラック・ゲージノ模型	8
第 3 章	グランドゲージ・ヒッグス統一模型	13
3.1	コンパクト化とオービフォルド化	13
3.2	グランドゲージ・ヒッグス統一模型	16
第 4 章	supersoft 項の起源	18
4.1	セットアップ	19
4.2	KK モード関数と KK スペクトル	20
4.3	Chern-Simons 項の係数の計算	23
4.4	ゲージノ質量	26
第 5 章	まとめと今後の展望	28
付録 A	\mathbb{Z}_2 変換と境界条件	30
A.1	オービフォルドの境界条件	30
A.2	ゲージ変換と境界条件	31
付録 B	アノマリー流入と変形された Chern-Simons 項	32
B.1	セットアップと記法	32
B.2	変形された Chern-Simons 項	34
B.3	アノマリー流入	36
B.4	カレント期待値の計算	38
B.5	無限和の公式について	39
付録 C	アノマリーの計算	41
C.1	4次元のカイラルアノマリー	41
C.2	S^1/\mathbb{Z}_2 上のアノマリーの計算	44
付録 D	CS 項の係数と Green 関数	50
付録 E	アノマリー流入	55

第 1 章

導入

素粒子の標準模型は多くの高エネルギー実験の結果を精度良く説明する模型である。そこで、より高いエネルギーまで標準模型が適用できるかどうかを考える。くりこみ群を用いて標準模型をより高いスケールまで外挿すると、中間スケール ($\sim 10^{11}$ GeV) 付近で Higgs 4 点結合が 0 となることが知られている [1–3]。Higgs 4 点結合が 0 となると真空が不安定になってしまうことから、この中間スケール付近で、標準模型を超える新しい模型に切り替わることが期待される。Higgs 4 点結合が 0 となることを予言する模型として、ゲージ・ヒッグス統一模型 [4–7] とディラック・ゲージノ模型 [8–12] の 2 つが知られている。

ゲージ・ヒッグス統一模型 [4–6] は余剰次元模型の 1 種である。余剰次元模型とは、我々のよく知っている 4 次元時空に加えて、余分な空間次元を考える模型である。余剰次元を考える動機として一般には、階層性問題の解決、重力法則の変更、naturalness 概念の変更、対称性の破れの新しいメカニズム、などが知られている。ゲージ・ヒッグス統一模型では、電弱対称性の破れのメカニズムとして、細谷機構 [13–16] を考える。細谷機構は、ゲージ場の余剰次元方向成分のゼロモードが非自明な真空期待値 (vacuum expectation value, VEV) を持つことで対称性を破る。言い換えると、ゲージ場の余剰次元方向成分がヒッグス場と同定される。コンパクト化のスケールより高いエネルギーでは、ヒッグス場はゲージ場の一部となるため、自己結合を持たない。したがって、コンパクト化のスケールを中間スケールに取ることで、ヒッグス場の 4 点結合が 0 になることが自然に予言される [7]。4 次元有効理論でのくりこみ群方程式の言葉でいうと、コンパクト化のスケール (ここでは中間スケール) で 4 点結合が 0 になるという境界条件 (ゲージ・ヒッグス条件 [17, 18]) を考えることになる。

ディラック・ゲージノ模型 [8–10] は超対称模型の 1 種である。超対称性とは、ボソンとフェルミオンを入れ替える対称性のことである。例えば、ゲージボソンの超対称パートナーはゲージノと呼ばれる随伴表現フェルミオンである。標準模型を最小限に超対称化した模型は最小超対称標準模型 (Minimal Supersymmetric Standard Model, MSSM) と呼ばれる。MSSM ではゲージノの質量として Majorana 質量を仮定するが、ディラック・ゲージノ模型では Dirac 質量を仮定する。ゲージノに Dirac 質量を持たせるために、ゲージノのディラックパートナーと、その超対称パートナーである随伴表現のスカラー場が新たに導入される。また、Dirac 質量項を生成する supersoft 項 [10] の存在を仮定する。超対称模型ではヒッグス場を含むスカラー 4 点結合は D 項の寄与によって生成されるが、ディラック・ゲージノ模型では、新しく導入された随伴スカラー場が D 項の寄与を相殺する。したがって、ディラック・ゲージノが現れるスケールを中間スケールと同定することで、Higgs 4 点結合が 0 になることが予言される [11, 12]。

また、ディラック・ゲージノ模型は TeV スケールの模型としても利点がある。例えば、“supersoft 性” [10] や “supersafe 性” [19, 20] と呼ばれる性質をもつ。supersoft 性とは、スカラー質量に対する輻射補正において発散が相殺し、有限となる性質である。この性質によって、スクォークを軽く保ったまま、ゲージノを重く取ることができる。supersafe 性とは、重いディラックグレイノを考えることでグレイノやスクォークの生成が抑制されるという性質であり、超対称性が破れるスケールに対する制限が緩和されるという利点がある [21, 22]。また、supersoft 項や Dirac 質量の起源や関連する問題については文献 [23–26] で議論された。一方、中間スケールシナリオで重要であった D 項の相殺は、TeV スケールの模型としては Higgs 粒子の質量を再現することが難しくなるという問題

につながる。この問題の解決策は、 R 対称な模型 [27–29] や next-to-minimal な R 対称模型 [30] に基づいて提案された。

ディラック・ゲージノ模型は様々な文脈で興味を持たれている一方で、模型の仮定である随伴表現場と supersoft 項の起源や大統一理論 (grand unified theory, GUT)[31–35] への埋め込みなど、現実的な模型構築のための課題がある。本研究では、この課題について取り組む。

軽い随伴表現場を预言する大統一模型として、グランドゲージ・ヒッグス統一模型 [36–39] がある。この模型は、上で述べたゲージ・ヒッグス統一模型と同様に、余剰次元を仮定する模型であり、余剰次元が S^1/\mathbb{Z}_2 オービフォルドとなっている 5 次元時空を考える。上で述べたゲージ・ヒッグス統一模型が電弱対称性の破れに対して細谷機構を適用するのに対して、グランドゲージ・ヒッグス統一模型では、細谷機構を Georgi-Glashow の $SU(5)$ ゲージ対称性 [31] に対して適用する。細谷機構を用いて $SU(5)$ を $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ に破るためには、ゲージ場の余剰次元方向成分のうち、 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 随伴表現のスカラー場がゼロモードを持つ必要がある。そのため、対角埋め込み法 [40–47] という方法を用いる。この方法では、2つの $SU(5)$ を導入し、それらの入れ替え対称性を課すことで、対角部分群を得る。このとき、 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 随伴スカラー場はゲージ場の余剰次元方向成分のゼロモードとして得られる。この随伴スカラー場はツリーレベルではポテンシャルが平坦となるため、量子補正によって真空の位置が決まる。一般に、ゼロモードのポテンシャルと質量はコンパクト化のスケール程度の輻射補正を受ける。一方で、超対称化した模型を考えると、ゼロモードの質量はコンパクト化のスケールより十分小さい超対称性の破れのスケール M_{SB} 程度になる。したがって、超対称化したグランドゲージ・ヒッグス統一模型は軽い随伴表現のカイラル超場を预言する。また、軽い Higgs 2 重項を自然に実現することができるため、大統一理論における微調整問題の 1 つである二重項・三重項分離 (Doublet-Triplet splitting, DT 分離) 問題を自然に解決するという利点もある [38]。

なお、ゲージ・ヒッグス統一模型の文脈でゲージ対称性の統一を考える模型は上述のグランドゲージ・ヒッグス統一模型の他にも、いくつかの模型が提案されている [48–53]。上述のグランドゲージ・ヒッグス統一模型との違いは、細谷機構を適用する対称性である。これらの模型では、大統一の対称性はオービフォルドの境界条件 [54–59] で破り、細谷機構は電弱対称性の破れ [48–52]、またはゲージ群のランクを下げることに [53] に使われる。

本研究では、(超対称化した) グランドゲージ・ヒッグス統一模型が预言する軽い随伴表現場を、ディラック・ゲージノ模型で必要となる随伴表現場と同定する。さらに、5 次元の理論から出発したことで、ゲージノの Dirac 質量を生成する supersoft 項が一種の超対称チャーン・サイモン (Chern-Simons, CS) 項 [60] と見なすことができることを示す。そのために、グランドゲージ・ヒッグス統一模型に対する拡張を考える。1 つ目の拡張は、超対称性の破れに対応する $U(1)_D$ ゲージ対称性を追加することである。2 つ目の拡張は、CS 項を生成するために 5 次元フェルミオンを導入し、 $SU(5)$ の入れ替え対称性を破るような質量項を仮定することである。

本研究で考える CS 項は、5 次元フェルミオンの“アノマリー”を通じて生成される CS 項である。supersoft 項に対応する CS 項は $SU(5)$ と $U(1)$ を混ぜるような CS 項であり、 $SU(5)$ の入れ替え対称性を破るような組み合わせになっている。実際の計算は簡単のために $U(1)$ の場合について行う。CS 項の係数はオービフォルド上のアノマリーと密接に関連しており、本論文では 2 通りの計算方法を説明する。1 つ目の方法はアノマリー流入 [61] を用いた方法である。5 次元バルクにはアノマリーが存在せず、オービフォルドの境界上に局在することが知られている [62]。massless ゼロモードがバルクに広がって分布していると、ゼロモードが生成するアノマリーも同じようにバルクに広がるため、バルクのアノマリーを打ち消すように CS 項が生成される。つまり、ゼロモード波動関数の形から CS 項の係数を決めることができる。2 つ目の方法は、カルーツァ・クライン (Kaluza-Klein, KK) モードを積分し、三角グラフを直接評価する方法である [63, 64]。この方法では CS 項の係数は KK モード波動関数の足し上げとして得られる。また、これら 2 つの方法で得られた係数が一致することを示す。最後に、得られた係数からゲージノの Dirac 質量のスケールを概算する。

本論文の構成は以下の通りである。まず第 2 章では、超対称性や MSSM について手短かに紹介してから、ディラック・ゲージノ模型についてレビューする。特に、模型の仮定である $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 随伴表現場や supersoft 項についてまとめる。また、模型の特徴的な性質である supersoft 性や D 項の相殺について触れる。第 3

章では、余剰次元模型を考えるために必要となる S^1 コンパクト化と S^1/\mathbb{Z}_2 オービフォルド化について紹介する。その上で、軽い随伴表現を预言するグランドゲージ・ヒッグス統一模型についてレビューする。また、模型の特徴である DT 分離問題の回避について簡単に紹介する。第 4 章では、supersoft 項が 1 種の CS 項と考えられることを示す。その上で、バルクフェルミオンを導入し、このフェルミオンのアノマリーが生成する CS 項の係数を 2 通りの方法で計算する。最後に、第 5 章でまとめと今後の展望について述べる。付録 A では、オービフォルドを構成する \mathbb{Z}_2 変換と境界条件についての補足をする。付録 B では、 S^1/\mathbb{Z}_2 オービフォルド上の $U(1)$ 理論のセットアップをまとめた上で、変形された CS 項の計算を紹介する。付録 C では、藤川の方法に基づいて、 S^1/\mathbb{Z}_2 オービフォルド上のアノマリーを導出する。そのための準備として、4 次元のカイラルアノマリーについてレビューする。付録 D では、CS 項の係数に現れる関数が Green 関数と見なせることを議論する。付録 E では、ゼロモードのアノマリーから CS 項の係数を決める方法についての補足をする。

なお、本論文は文献 [65] を参考に行っている。

第 2 章

ディラック・ゲージノ模型

この章では、ディラック・ゲージノ模型についてレビューする。まず、超対称な場の理論を記述するのに必要な超場を導入し、これを用いて、超対称性をもつラグランジアン of 構成法を説明する。次に、標準模型を最小限に超対称化した MSSM について粒子の種類や量子数など最小限の内容をまとめる。これらのレビューは文献 [66, 67] に基づき、記法は基本的に文献 [66] に従う。最後に、MSSM の拡張であるディラック・ゲージノ模型について、模型の基本的な仮定と利点や課題をまとめる。

2.1 超対称性

ボソンとフェルミオンを入れ替える変換を超対称変換という。超対称変換の生成子 Q_α はスピノールで、次の超対称代数を満たす:

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}P_\mu, \quad \{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0. \quad (2.1)$$

生成子 Q を微分演算子として表現するために、反可換な Grassmann 座標 θ^α を導入する。座標 $(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$ で表される空間を超空間と呼び、この座標で表される場を超場という:

$$\Psi(x, \theta, \bar{\theta}) = G(x, \theta, \bar{\theta})\Psi(0, 0, 0)G^{-1}(x, \theta, \bar{\theta}), \quad G(x, \theta, \bar{\theta}) = \exp(ix^\mu P_\mu + i\theta^\alpha Q_\alpha + i\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}}). \quad (2.2)$$

ここで $\Psi(x, \theta, \bar{\theta})$ は超場、 $G(x, \theta, \bar{\theta})$ はユニタリー演算子である。微小変換を考えて、そこから Q の関数上の表現を読み取っていく。超場 $\Psi(x, \theta, \bar{\theta})$ に微小変換に対応するユニタリー演算子 $G(\epsilon, \eta, \bar{\eta})$ を作用させたときに、超場 $\Psi(x, \theta, \bar{\theta})$ が

$$G(\epsilon, \eta, \bar{\eta})\Psi(x, \theta, \bar{\theta})G^{-1}(\epsilon, \eta, \bar{\eta}) = \Psi(x + \delta x, \theta + \delta\theta, \bar{\theta} + \delta\bar{\theta}) \quad (2.3)$$

と変換するとする。このとき、左辺に現れるユニタリー演算子の積 $G(\epsilon, \eta, \bar{\eta})G(x, \theta, \bar{\theta})$ から、座標の変化 $(\delta x, \delta\theta, \delta\bar{\theta})$ が読み取れる。 $G(\epsilon, \eta, \bar{\eta})G(x, \theta, \bar{\theta})$ は次のように計算できる:

$$\begin{aligned} G(\epsilon, \eta, \bar{\eta})G(x, \theta, \bar{\theta}) &= \exp\left\{i(x + \epsilon)P + i(\theta + \eta)Q + i(\bar{\theta} + \bar{\eta})\bar{Q}\right. \\ &\quad \left.+ [(i\epsilon P + i\theta Q + i\bar{\theta}\bar{Q}), (ixP + i\theta Q + i\bar{\theta}\bar{Q})] + \dots\right\} \\ &= \exp\left[i(x + \epsilon + i\eta\sigma\bar{\theta} - i\theta\sigma\bar{\eta})P + i(\theta + \eta)Q + i(\bar{\theta} + \bar{\eta})\bar{Q}\right] \\ &= G(x + \epsilon - i\eta\sigma\bar{\theta} + i\theta\sigma\bar{\eta}, \theta + \eta, \bar{\theta} + \bar{\eta}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

ここで、1つ目の等式では Hausdorff の公式 $e^A e^B = \exp(A + B + \frac{1}{2}[A, B]) + \dots$ を用いた。2つ目の等式では、反交換関係 (2.1) や、 P が Q 、 \bar{Q} と可換であることを用いた。したがって、超空間座標 $(x, \theta, \bar{\theta})$ の無限小超対称変換は、

$$\delta x = \epsilon - i\eta\sigma\bar{\theta} + i\theta\sigma\bar{\eta}, \quad \delta\theta = \eta, \quad \delta\bar{\theta} = \bar{\eta} \quad (2.5)$$

と読み取れる。これを用いて、式 (2.3) の右辺をテイラー展開する:

$$\Psi(x + \delta x, \theta + \delta\theta, \bar{\theta} + \delta\bar{\theta}) = \left[1 + (\epsilon^\mu - i\eta\sigma^\mu\bar{\theta} + i\theta\sigma^\mu\bar{\eta}) \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + \bar{\eta}_{\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} \right] \Psi(x, \theta, \bar{\theta}). \quad (2.6)$$

ただし Grassmann 数の微分は左微分とする。一方、式 (2.3) の左辺は、無限小変換の生成子との交換関係で

$$\begin{aligned} G(\epsilon, \eta, \bar{\eta})\Psi(x, \theta, \bar{\theta})G^{-1}(\epsilon, \eta, \bar{\eta}) &= (1 - i\epsilon P + i\eta Q + i\bar{\eta}\bar{Q})\Psi(x, \theta, \bar{\theta}) (1 + i\epsilon P - i\eta Q - i\bar{\eta}\bar{Q}) \\ &= \Psi(x, \theta, \bar{\theta}) + [-i\epsilon P, \Psi] + [i\eta Q, \Psi] + [i\bar{\eta}\bar{Q}, \Psi] \end{aligned} \quad (2.7)$$

と表される。したがって、次の交換関係が導ける:

$$[P_\mu, \Psi] = -i\partial_\mu \Psi, \quad (2.8a)$$

$$[Q_\alpha, \Psi] = - \left[i \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - (\sigma^\mu\bar{\theta})_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right] \Psi, \quad (2.8b)$$

$$[\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \Psi] = - \left[-i \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + (\theta\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right] \Psi. \quad (2.8c)$$

式 (2.8a) から、 $P_\mu = i\partial_\mu$ がわかる。同様に、超対称変換の生成子 Q_α と $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ は次のように読み取れる:

$$Q_\alpha = i \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - (\sigma^\mu\bar{\theta})_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \bar{Q}_{\dot{\alpha}} = -i \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + (\theta\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (2.9)$$

また、後のために、 Q_α , $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ と反可換な微分演算子

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i(\sigma^\mu\bar{\theta})_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i(\theta\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (2.10)$$

を導入する。ここで定義された D_α , $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ は超共変微分と呼ばれる。

一般の超場は θ と $\bar{\theta}$ の展開式として次のように書くことができる:

$$\Psi(x, \theta, \bar{\theta}) = A(x) + \theta\psi(x) + \bar{\theta}\bar{\eta}(x) + \theta^2 B(x) + \bar{\theta}^2 C(x) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu(x) + \theta^2\bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \bar{\theta}^2\theta\xi(x) + \theta^2\bar{\theta}^2 D(x). \quad (2.11)$$

しかし成分が多く、超 Poincaré 代数の既約表現ではない。そこで、超対称性と両立する拘束条件で制限する。

■**カイラル超場** 次の条件を満たす超場をカイラル超場という:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0. \quad (2.12)$$

この条件を満たす一般的な Φ の形を考えるために、

$$x^\mu \longrightarrow z^\mu = x^\mu - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta} \quad (2.13)$$

のように座標を取り替える。この z^μ を固定すると、超共変微分は $\bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\partial/\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ と書ける。式 (2.12) から、 Φ は $\bar{\theta}$ を含まない項のみが残る。したがって、一般のカイラル超場は次のように書ける:

$$\Phi(z, \theta) = \phi(z) + \sqrt{2}\theta^\alpha\psi_\alpha(z) + \theta^2 F(z). \quad (2.14)$$

ここで、 $\phi(z)$ は複素スカラー場、 $\psi(z)$ は Weyl スピノール、 $F(z)$ は補助場である。

■**ベクトル超場** 次の条件を満たす超場をベクトル超場 (または、実超場) という:

$$V^\dagger = V. \quad (2.15)$$

一般的に書き下すと成分が多いが、Wess-Zumino ゲージ [66] をとると、

$$V = (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})A_\mu(x) + \theta^2\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}^2\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2 D \quad (2.16)$$

と書ける。ここで、 $A_\mu(x)$ はゲージ場、 $\lambda(x)$ はゲージノ、 $D(x)$ は補助場である。

ゲージ場の強さ $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ を含む超場は次のカイラル超場で与えられる:

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}^2 \left[\frac{1}{2} e^{-2V} D_\alpha e^{2V} \right] = \lambda_\alpha + \theta_\alpha D + \frac{i}{2} (\sigma^{\mu\nu} \theta)_\alpha F_{\mu\nu} - i\theta^2 (\not{D}\bar{\lambda})_\alpha. \quad (2.17)$$

超対称変換の生成子の表式 (2.9) より, カイラル超場 (2.14) の F 項, およびベクトル超場 (2.16) の D 項に対する超対称変換は全微分形であることがわかる。

2.1.1 ラグランジアン

一般的な超場の D 項と, カイラル超場の F 項の超対称変換は全微分になる。したがって, 超対称変換の下で不変なラグランジアンは D 項と F 項を用いて書くことができる:

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \Phi^\dagger e^{2V} \Phi + \left[\int d^2\theta \frac{1}{4g^2} \text{tr}(W^\alpha W_\alpha) + \int d^2\theta W(\Phi) + h.c. \right]. \quad (2.18)$$

ここで, Φ はカイラル超場, V はベクトル超場とした。第1項は極小な Kähler ポテンシャルと呼ばれるもので, カイラル超場の運動項を含む。第2項は超対称な Yang-Mills 作用でゲージ場の運動項を含む。第3項は超ポテンシャルで, 湯川相互作用などを表す。

■Kähler ポテンシャル

$$\int d^2\theta d^2\bar{\theta} \Phi^\dagger e^{2V} \Phi = |(\partial_\mu - iA_\mu)\phi|^2 + \psi i(\not{\partial} - iA)\bar{\psi} + |F|^2 + \sqrt{2} [(\bar{\psi}\bar{\lambda})\phi + (\lambda\psi)\phi^\dagger] + \phi^\dagger D\phi. \quad (2.19)$$

Kähler ポテンシャルを成分場で表すと, ゲージ場と結合した物質場の運動項が含まれていることがわかる。ここではゲージ結合定数を省略したが, 復活させるときは, $V \rightarrow gV$ のようにすればよい。一方, F は運動項を持たない補助場であることが分かる。

■超対称 Yang-Mills 作用

$$\int d^2\theta \frac{1}{4g^2} \text{tr}(W^\alpha W_\alpha) + h.c. = \frac{1}{g^2} \text{tr} \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \lambda i \not{D}\bar{\lambda} + \frac{1}{2} D^2 \right]. \quad (2.20)$$

これは成分場で書き下すと, 確かにゲージ場の運動項を含む。また, D は運動項を持たないことから, F と同様に補助場である。

2.1.2 R 対称性

超対称なラグランジアンは R 対称性と呼ばれる大域的な $U(1)_R$ 対称性をもつ。(連続) R 対称性は Grassmann 座標 θ, θ^\dagger に対する次のような変換によって定義される:

$$\theta \rightarrow e^{i\alpha}\theta, \quad \theta^\dagger \rightarrow e^{-i\alpha}\theta^\dagger. \quad (2.21)$$

θ, θ^\dagger はそれぞれ R 荷 $+1, -1$ を持つ。ここで, α は変換パラメータである。このとき, 超対称変換の生成子の変換性は

$$Q \rightarrow e^{-i\alpha}Q, \quad \bar{Q} \rightarrow e^{i\alpha}\bar{Q} \quad (2.22)$$

となる。つまり, Q, \bar{Q} はそれぞれ R 電荷 $-1, +1$ を持つ。 Q, \bar{Q} は R 対称性の生成子とは交換せず, 次のような交換関係

$$[R, Q] = -Q \quad [R, \bar{Q}] = \bar{Q} \quad (2.23)$$

を満たす。したがって, 超場に含まれる各成分場は異なる R 荷を持つ。

R 荷 r_Φ のカイラル超場 $\Phi = (\phi, \psi, F)$ の各成分の R 荷はそれぞれ $r_\Phi, r_\Phi - 1, r_\Phi - 2$ である:

$$\phi \rightarrow e^{ir_\Phi\alpha}\phi, \quad \psi \rightarrow e^{i(r_\Phi-1)\alpha}\psi, \quad F \rightarrow e^{i(r_\Phi-2)\alpha}F. \quad (2.24)$$

一方、ベクトル超場は実なので、 R 荷を持たない。Wess-Zumino ゲージでは

$$A^\mu \rightarrow A^\mu, \quad \lambda \rightarrow e^{i\alpha}\lambda, \quad D \rightarrow D \quad (2.25)$$

となる。各成分の R 荷はそれぞれ 0, 1, 0 である。

ゲージノは R 荷 +1 を持つことから、ゲージノの Majorana 質量項 $M_\lambda \lambda \lambda$ は $U(1)_R$ を破ることが分かる。言い換えると、 R 対称な模型を考えると、ゲージノの質量として Majorana 質量を考えることはできない。

2.2 最小超対称標準模型

最小超対称標準模型 (Minimal Supersymmetric Standard Model, MSSM) では、標準模型の各粒子に対して超対称パートナーを導入する。ラグランジアンは標準模型を超対称化したものに加えて、超対称性をソフトに破る項を含む。

■MSSM の場 MSSM に含まれる物質、ゲージ場を列挙する:

ボソン	フェルミオン
$\left\{ \begin{array}{l} \text{スクォーク} \quad \tilde{q} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_L \\ \tilde{d}_L \end{pmatrix}, \tilde{u}_R^c, \tilde{d}_R^c, \\ \text{スレプトン} \quad \tilde{l} = \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_L \\ \tilde{l}_L \end{pmatrix}, \tilde{e}_R^c, \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{クォーク} \quad q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \tilde{u}_R^c, \tilde{d}_R^c, \\ \text{レプトン} \quad l = \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix}, \tilde{e}_R^c, \end{array} \right.$
$\left\{ \begin{array}{l} \text{グルーオン} \quad g, \\ \text{ウィークボソン} \quad W, Z, \\ \text{フォトン} \quad \gamma, \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{グリーノ} \quad \tilde{g}, \\ \text{ウィーノ} \quad \tilde{W}, \tilde{Z}, \\ \text{フォティーノ} \quad \tilde{\gamma}, \end{array} \right.$
$\left\{ \begin{array}{l} \text{ヒッグスポソン} \\ H_u = \begin{pmatrix} H_u^+ \\ H_u^0 \end{pmatrix}, \\ H_d = \begin{pmatrix} H_d^0 \\ H_d^- \end{pmatrix}, \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{ヒッグシーノ} \\ \tilde{H}_u = \begin{pmatrix} \tilde{H}_u^+ \\ \tilde{H}_u^0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{H}_d = \begin{pmatrix} \tilde{H}_d^0 \\ \tilde{H}_d^- \end{pmatrix}. \end{array} \right.$

これらの量子数を表 2.1 にまとめる。

表 2.1 量子数

超場	$SU(3)$	$SU(2)$	$U(1)$
Q	3	2	$\frac{1}{6}$
u_R^c	$\bar{3}$	1	$-\frac{2}{3}$
d_R^c	$\bar{3}$	1	$\frac{1}{3}$
L	1	2	$-\frac{1}{2}$
e_R^c	1	1	1
H_u	1	2	$\frac{1}{2}$
H_d	1	2	$-\frac{1}{2}$

■超対称性のソフトな破れ 超対称パートナーの粒子はお互いに同じ質量、同じ内部量子数を持つが、現実には同じ質量をもつボソンとフェルミオンの組は見つかっていないため、超対称性は現実では破れている。超対称性をソフトに破る項として、通常よく用いられるものは次のように書くことができる:

$$\mathcal{L}_{\text{soft}} = -\frac{1}{2}(M_\lambda \lambda^a \lambda^a + h.c.) - (m^2)_{ij} \phi_i^\dagger \phi_j + \left[-\frac{1}{3!}(yA)_{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k - (B\mu)H_1 H_2 + h.c. \right]. \quad (2.26)$$

ここで、 M_λ はゲージノの Majorana 質量、 m^2 はスカラー場のソフト質量、 A はスカラー場の3点結合、 B はスカラー場の2点結合である。

2.3 ディラック・ゲージノ模型

ディラック・ゲージノ模型は、MSSM の拡張模型の1つである [10]。本節では模型の基本的な仮定と、模型の性質や課題についてまとめる。

ゲージノ λ^a ($a = 1, 2, 3$) とはゲージボソン A_μ^a の超対称パートナーである $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 随伴表現のフェルミオンであった。MSSM ではゲージノは Majorana 質量を仮定していたが、ディラック・ゲージノ模型ではゲージノが Dirac 質量を持つことを考える。そのために、各ゲージノの Dirac パートナーとなる $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 随伴表現フェルミオン χ^a を新しく導入し、ゲージノが Dirac 質量

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = -m_D \lambda^a \chi^a + h.c. \quad (2.27)$$

を持つことを仮定する。この χ^a はカイラル超場 Φ^a

$$\Phi^a(x, \theta) = \phi^a(x) + \sqrt{2}\theta^\alpha \chi_\alpha^a(x) + \dots \quad (2.28)$$

に埋め込まれているとする。 ϕ^a は随伴スカラー場であり、 χ^a の超対称パートナーである。

ディラック・ゲージノ模型では、隠れたセクター $U(1)_D$ の D 項の VEV $\langle D_D \rangle$ によって超対称性が破れることを仮定する。さらに、メッセンジャーセクターを積分することで次の“supersoft”項

$$\mathcal{L}_{\text{supersoft}} = \frac{\sqrt{2}}{\Lambda_D} \int d^2\theta W_D^\alpha W_\alpha^a \Phi_a + h.c. \quad (2.29)$$

が生成されることを仮定する。ここで Λ_D はカットオフスケール、 W_D^α は隠れたセクター $U(1)_D$ ゲージ場の強さの超場である。超対称性が破れると、 $\langle W_D^\alpha \rangle = \theta^\alpha \langle D_D \rangle \neq 0$ となる。 W_α^a は $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ ゲージ場の強さ超場、 Φ_a は随伴表現のカイラル超場である。supersoft 項は $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ ゲージ不変であり、かつ超対称な相互作用となっている。以上、ディラック・ゲージノ模型における仮定をまとめると、(i) ゲージノの Dirac パートナーを含む随伴表現場 Φ_a の導入、(ii) ゲージノの Dirac 質量項を含む supersoft 項、(iii) 隠れたセクター $U(1)_D$ による超対称性の破れ、の3つである。

supersoft 項を導入したことによる効果として、ゲージノの Dirac 質量 m_D を生成すること、随伴スカラーの実部が質量 $2m_D$ を持つこと、随伴スカラーを含む新しいスカラー3点結合、の3つがある。これらを順に確認していく。supersoft 項 (2.29) に期待値 $\langle W_D^\alpha \rangle = \theta^\alpha \langle D_D \rangle$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{\Lambda_D} \int d^2\theta \theta^\alpha \langle D_D \rangle W_\alpha^a \Phi_a + h.c. &= \frac{\sqrt{2}}{\Lambda_D} \int d^2\theta \theta^\alpha \langle D_D \rangle \left[\theta_\alpha D^a \phi^a + \lambda_\alpha^a \sqrt{2}\theta^\beta \chi_\beta^a + \dots \right] + h.c. \\ &= -m_D (\lambda^a \chi^a + h.c.) + \sqrt{2}m_D D^a (\phi^a + \phi^{a\dagger}) \end{aligned} \quad (2.30)$$

となり、第1項にゲージノの Dirac 質量項 (2.27) が現れる。ここで、Dirac 質量 m_D は

$$m_D = \frac{\langle D_D \rangle}{\Lambda_D} \quad (2.31)$$

と定義した。また、第2項には随伴スカラー場の実部のみが現れている。そこで、実スカラー場 σ^a と π^a を用いて複素スカラー場 ϕ^a を

$$\phi^a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma^a + i\pi^a) \quad (2.32)$$

と書くことにする。次に、ラグランジアンの中で補助場 D^a を含む項を考える：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(D^a)^2 + D^a (\Phi^\dagger g T^a \Phi) + 2m_D D^a \sigma^a - \delta m_\phi^2 |\phi^a|^2. \quad (2.33)$$

ここで、 Φ は基本表現のスカラー場とする。第1項は補助場の運動項、第2項は Kähler ポテンシャルの D 項であり、第3項は式 (2.30) の第2項で、supersoft 項に含まれる項である。最後の項は随伴スカラー場 ϕ^a のソフトな質量項であり、 D^a を含まない項であるが、後のために手で加えた。式 (2.33) から補助場を消去したものを有効ポテンシャル V_{eff} とする。平方完成をすると

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (D^a + \Phi^\dagger g T^a \Phi + 2m_D \sigma^a)^2 - \frac{1}{2} (\Phi^\dagger g T^a \Phi + 2m_D \sigma^a)^2 - \frac{1}{2} \delta m_\phi^2 (\sigma_a^2 + \pi_a^2) \quad (2.34)$$

となるため、有効ポテンシャルは次のように書ける:

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{2} (\Phi^\dagger g T^a \Phi)^2 + 2m_D \sigma^a \Phi^\dagger g T^a \Phi + \frac{1}{2} (2m_D)^2 \sigma_a^2 + \frac{1}{2} \delta m_\phi^2 (\sigma_a^2 + \pi_a^2) . \quad (2.35)$$

第2項に新しいスカラー3点結合が現れている。また、第3項が随伴スカラー場の実部 σ^a の質量項で、ソフト質量 $\delta m_\phi^2 = 0$ のとき $m_\sigma = 2m_D$ になっている。これらは supersoft 項の効果で現れたものである。また、このときの随伴スカラー場の虚部 π^a の質量は $m_\pi = 0$ である。第1項は通常の D 項ポテンシャルである。最後の項は手で加えたソフト質量の効果である。最後のソフト質量項を入れて考えると、随伴スカラー場の質量

$$m_\sigma^2 = 4m_D^2 + \delta m_\phi^2, \quad m_\pi^2 = \delta m_\phi^2 \quad (2.36)$$

が得られる。

結局、ディラック・ゲージノ模型における基本的な仮定は次の3つにまとめることができる:

- ゲージノの Dirac パートナーを含む随伴カイラル超場
- Dirac 質量を生成する supersoft 項
- $U(1)_D$ の D 項による超対称性の破れ

さらに、2つ目の仮定である supersoft 項を導入したことによる効果として、Dirac 質量の生成、随伴スカラーを含む新しい3点結合、随伴スカラー場の質量の生成を確認した。次に、これらの効果によってどのような利点が生まれるのかを見ていく。特に、新しいスカラー3点結合の効果が supersoft 性という重要な性質をもたらすことを確認する。

2.3.1 ディラック・ゲージノ模型の性質

本節ではディラック・ゲージノ模型の特徴的な性質である supersoft 性と D 項の相殺についてレビューする。また、TeV スケールの模型としての利点と、中間スケールの模型としての利点について簡単にまとめる。

supersoft 性 [10] とは、スカラー質量に対する輻射補正が有限になるという性質である。supersoft 項 (2.29) は超対称かつゲージ不変な相互作用であった。もしこの項がスカラーのソフト質量に対して、発散する補正を生成するならば、発散を相殺する超対称かつゲージ不変な相殺項が書けるはずであるが、実はそのような項は書けないことが分かる。したがって、スカラーのソフト質量に対する輻射補正は有限であると言える。

スカラーのソフト質量に対する輻射補正が有限であることを1ループの場合について具体的に確かめてみる。まず、ゲージボソンループは2通りのダイアグラムが書ける:

$$\text{---} \text{---} \overset{A_\mu}{\text{---}} \text{---} = g^2 T_{ij}^a T_{jk}^b \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^{4i}} \frac{\delta^{ab}}{m_q^2 - k^2} k^\mu \frac{-g_{\mu\nu} + (1-\alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{m_q^2 - k^2}}{-k^2} k^\nu, \quad (2.37a)$$

$$\text{---} \text{---} \overset{A_\mu}{\text{---}} \text{---} = g^2 (T^a T^a)_{ij} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^{4i}} \frac{-g_{\mu\nu} + (1-\alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}}{m_q^2 - k^2} g^{\mu\nu}. \quad (2.37b)$$

これら2つを足したものを $(-\delta m_q^2)_{\text{gauge}}$ と表すと、

$$(-\delta m_q^2)_{\text{gauge}} = g^2 C_2(R) \delta_{ij} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^{4i}} \left[\frac{3}{-(m_q^2 - k^2)} + \frac{-4 + 1 - \alpha}{-k^2(m_q^2 - k^2)} m_\phi^2 \right] \quad (2.38)$$

と書ける。被積分関数の第1項が2次発散，第2項が対数発散している。次に，スフェルミオンのループを考える。スフェルミオンループも2通りのダイアグラムが考えられる。 $\phi T^a \phi^\dagger$ の縮約の取り方の違いは，補助場の飛び方に対応している：

$$\begin{aligned} \text{---} \bullet \overset{\tilde{q}}{\text{---}} \bullet \text{---} &= g^2 (T^a)_{ik} (T^b)_{lj} \frac{\delta^{ab}}{-1} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^{4i}} \frac{\delta_{kl}}{(m_{\tilde{q}}^2 - k^2)} \\ &= g^2 C_2(R) \delta_{ij} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^{4i}} \frac{-1}{(m_{\tilde{q}}^2 - k^2)}. \end{aligned} \quad (2.39a)$$

一方，生成子がトレースレスであることを用いると，

$$\text{---} \bullet \overset{\tilde{q}}{\text{---}} \bullet \text{---} = g^2 (T^a)_{ij} (T^b)_{kl} \frac{\delta^{ab}}{-1} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^{4i}} \frac{\delta_{kl}}{(m_{\tilde{q}}^2 - k^2)} = 0 \quad (2.39b)$$

となる。次にゲージノとフェルミオンのループを考える。フェルミオンループの -1 倍に注意すると，

$$\begin{aligned} \text{---} \bullet \overset{q}{\text{---}} \bullet \text{---} &= -(\sqrt{2}g)^2 (T^a T^b)_{ij} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^{4i}} \text{tr} \left(P_R \frac{\delta^{ab}}{m_D - \not{k}} P_L \frac{1}{m_q - \not{k}} \right) \\ &= -4g^2 C_2(R) \delta_{ij} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^{4i}} \left[\frac{-1}{m_D^2 - k^2} + \frac{m_\psi^2}{(m_D^2 - k^2)(m_q^2 - k^2)} \right] \end{aligned} \quad (2.40)$$

となり，被積分関数の第1項が2次発散，第2項が対数発散している。以下，簡単のため $m_{\tilde{q}} = m_q = 0$ として計算する。ここまでの寄与を足すと，

$$(2.38) + (2.39a) + (2.40) = g^2 C_2(R) \delta_{ij} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^{4i}} \frac{4m_D^2}{k^2(m_D^2 - k^2)} \quad (2.41)$$

となり，2次発散が相殺している。ここまではMSSMの場合と同様の計算である。

次に，ディラック・ゲージノ模型で新しく現れる随伴スカラーを含むループを考える：

$$\text{---} \bullet \overset{\sigma^a}{\text{---}} \bullet \text{---} = (2m_D g)^2 C_2(R) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^{4i}} \frac{1}{m_{\tilde{q}}^2 - k^2} \frac{1}{m_\sigma^2 - k^2}. \quad (2.42)$$

この寄与を式(2.41)に加えると，次のようにまとめられる：

$$(2.41) + (2.42) = 4m_D^2 g^2 C_2(R) \delta_{ij} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^{4i}} \left[\frac{1}{k^2(m_D^2 - k^2)} - \frac{1}{k^2(m_\sigma^2 - k^2)} \right]. \quad (2.43)$$

次元正則化を用いて積分を評価する。まずEuclid化して，Feynmanのパラメータ公式

$$\frac{1}{k^2(m^2 + k^2)} = \int_0^1 dx \frac{1}{(x m^2 + k^2)^2} \quad (2.44)$$

を用いる。あとで $m = m_D, m_\sigma$ とする。次元正則化をすると，

$$\int_0^1 dx \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(\epsilon)}{\Gamma(2)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{x m^2} \right)^\epsilon = \int_0^1 dx \frac{1}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \log \frac{\mu^2}{x m^2} \right] \quad (2.45)$$

となる。ここで $\frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi$ とおいた。 $\log \mu^2$ が対数発散する部分である。式(2.43)からスフェルミオン質量に対する補正は次のように書ける：

$$\delta m_{\tilde{q}}^2 = \frac{C_2(R) g^2}{(4\pi)^2} 4m_D^2 \log \frac{4m_D^2 + \delta m_\phi^2}{m_D^2}. \quad (2.46)$$

ただし、(2.36) より、 $m_\sigma^2 = 4m_D^2 + \delta m_\phi^2$ である。よって確かに、随伴スカラーループの効果によってスフェルミオン質量に対する輻射補正が有限となっている。つまり、supersoft 性が1ループの場合に確かめられた。

次に、 D 項の相殺について説明する。 D 項の相殺とは、スカラー場の4点結合を与える D 項が、随伴スカラー場の寄与と打ち消し合ってしまうという性質である [10]。実際に D 項の相殺を確認する。式 (2.35) を σ で平方完成する:

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{2} (4m_D^2 + \delta m_\phi^2) \left(\sigma_a + \frac{2m_D}{4m_D^2 + \delta m_\phi^2} \Phi^\dagger g T^a \Phi \right)^2 + \frac{1}{2} \delta m_\phi^2 \pi_a^2 - \frac{1}{2} \frac{4m_D^2}{4m_D^2 + \delta m_\phi^2} (\Phi^\dagger g T^a \Phi)^2 + \frac{1}{2} (\Phi^\dagger g T^a \Phi) . \quad (2.47)$$

1行目の第1項は Gauss 積分の形になっているので σ^a で積分できる。1行目の第2項は他と相互作用しないのでここでは無視できる。結果として2行目が残る:

$$V_{\text{eff}} = \frac{\delta m_\phi^2}{4m_D^2 + \delta m_\phi^2} (\Phi^\dagger g T^a \Phi)^2 . \quad (2.48)$$

もとの D 項と比べると因子 $\frac{\delta m_\phi^2}{4m_D^2 + \delta m_\phi^2}$ が掛かっている。 $\delta m_\phi^2 \rightarrow \infty$ でこの因子は1に近づくが、supersoft 性も失われることになる。一方、supersoft (pure Dirac) な極限 $\delta m_\phi^2 \rightarrow 0$ で D 項は0になる。

第1節で述べたように、 D 項の相殺は中間スケールでディラック・ゲージノ模型を考える動機の1つである。標準模型での Higgs4 点結合についてくりこみ群を考えると、中間スケールで0になっているためである。一方で、TeV スケールの模型として考えると、真空が不安定になり、Higgs 粒子の質量 125GeV を再現することが難しくなるため、 D 項の相殺は問題である。この点については、最小 R 対称模型 [27–29] や next-to-minimal R 対称模型 [30] での解決策が提案されている。

2.3.2 ディラック・ゲージノ模型の課題

ディラック・ゲージノ模型の課題として、前節で述べた D 項の相殺の他にも、随伴表現場や supersoft 項の起源、大統一理論への埋め込み、随伴スカラー場の質量の問題などが知られている。本研究では、大統一模型の1種であるグランドゲージ・ヒッグス統一模型から随伴表現場や supersoft 項を導けることを示す。随伴スカラー場の質量の問題については、ゴールドストン・ゲージノシナリオ [25, 26] という解決策が提案されているので、手短かにレビューする。

ディラック・ゲージノ模型では、随伴表現場が軽く残っていることと、supersoft 項が何らかのメカニズムで生成されることを仮定する。supersoft 演算子を導入した文献 [10] では、ゲージセクターの超対称性を $N = 2$ に拡張することで、随伴表現のカイラル超場 Φ^a を導入している。しかし、なぜ随伴表現場が軽く残っているのか、どのように supersoft 項が生成されるのかというのは説明されない問題である。また、supersoft 項に現れるカットオフスケールは理論から決まらないので、Dirac 質量 m_D が TeV スケールや中間スケールになるように手で決めることになる。

本研究では、この課題について取り組む。余剰次元に基づく大統一理論の模型である、グランドゲージヒッグス模型に着目する。この模型が自然に予言する軽い随伴表現場を、ゲージノの Dirac パートナーを含む随伴表現場と同定し、さらに、余剰次元模型を考えたことで、supersoft 項が1種の CS 項として導けることを示す。

関連する問題として、随伴スカラー場の問題がある。前節までは、ゲージノの Dirac 質量を生成する項として supersoft 項のみを考えてきた。実は、supersoft 項以外に、lemon-twist(LT) 項と呼ばれる次のような項も書くことができる [23, 24]:

$$\mathcal{L}_{\text{LT}} = \frac{1}{\Lambda^2} \int d^2\theta \Phi^a \Phi^a W_{D\alpha} W_D^\alpha . \quad (2.49)$$

メッセンジャー場を積分して、supersoft 項と LT 項が同時に生成されるとすると、随伴スカラーの実部はタキオンのような質量を持ってしまう。前節で見たように、随伴スカラー場に対してソフトな質量を考えればタキオンのでなく

することは可能であるが、その分 supersoft 性は損なうことになる。一方で、何らかの対称性で、LT 項のみを禁止することは難しい。この問題に対して、ゴールドストーン・ゲージノシナリオと呼ばれる解決策が文献 [25, 26] によって提案された。随伴スカラーの虚部 $\text{Im}(\phi)$ がアノマラスな大域的な対称性の自発的破れに伴う (擬)Goldstone モードであるならば、LT 項は Goldstone モードのシフト対称性によって禁止される。一方で、欲しい supersoft 項はアノマリーによって生成される、という模型である。

ここで、5次元の模型を考えると、ゲージ場の余剰次元方向成分は4次元のゲージ対称性の破れに対応する南部・ゴールドストーンモードの一種といえる。(このことは、5次元方向を格子正則化するもしくは“deconstruction”[68]を考えるとわかりやすい。)次節以降で見ると、ランドゲージ・ヒッグス統一模型が予言する軽い随伴表現場のスカラー部分(の虚部)はゲージ場の余剰次元方向成分であり、本研究ではこの随伴表現場をゲージノの Dirac パートナーを含むカイラル超場と同一視する。したがって、本研究で考える模型は、ゴールドストーン・ゲージノシナリオの余剰次元的に実現した模型と言える。余剰次元の立場で考えると、LT 項が存在しないことは5次元のゲージ不変性から理解できることになる。

以上本章では、超対称模型として MSSM とディラック・ゲージノ模型についてレビューした。まず超場形式を導入し、物質場はカイラル超場、ゲージ場はベクトル超場に埋め込まれ、ラグランジアンは超場を用いて書けることを確認した。MSSM は標準模型の Higgs セクターを拡張し、各粒子に超対称パートナーを導入した模型である。そこでは、ゲージノの質量として Majorana 質量を仮定していた。ディラック・ゲージノ模型では、ゲージノが Dirac 質量をもつことを考える。そのための仮定は、(i) ゲージノの Dirac パートナーを含む随伴表現場 Φ_a の導入、(ii) ゲージノの Dirac 質量項を含む supersoft 項、(iii) 隠れたセクター $U(1)_D$ による超対称性の破れ、の3つである。supersoft 項を導入したことによって得られた効果として、ゲージノの Dirac 質量 m_D を生成すること、随伴スカラーの実部が質量 $2m_D$ を持つこと、随伴スカラーを含む新しいスカラー3点結合、を確認した。スフェルミオン質量に対する輻射補正が有限になる supersoft 性と、スカラー4点結合がゼロになる D 項の相殺はディラック・ゲージノ模型の特徴的な性質である。これらの効果は、随伴スカラーを含む新しいスカラー3点結合によってもたらされた。最後に、ディラック・ゲージノ模型の課題として、新しく導入した随伴表現場や supersoft 項の起源の問題があることを述べた。次節では、これらの起源がランドゲージヒッグス統一模型という5次元時空上の模型によって説明できることを議論する。

第3章

グランドゲージ・ヒッグス統一模型

この章では、グランドゲージ・ヒッグス統一模型 (grand gauge-Higgs unification model, gGHU 模型)[36–38] についてレビューする。グランドゲージヒッグス統一模型は余剰次元に基づく大統一理論の1種であり、本研究では大統一の対称性として $SU(5)$ を考える [31]。余剰次元として S^1/\mathbb{Z}_2 オービフォルドを考え、 $SU(5)$ 対称性の破れに対して細谷機構 [13–16] を適用する。細谷機構を適用するためには、随伴スカラー場であるゲージ場の余剰次元方向成分がゼロモードを持つ必要がある。そのために対角埋め込み法 [40–47] を用いる。この方法では、2つの $SU(5)$ に対する入れ替え対称性 \mathbb{Z}_2^{ex} を課すことで、対角部分群 $SU(5)_G$ を得る。gGHU 模型を超対称化すると、軽い随伴表現カイラル超場が得られ [38]、本研究ではこれをディラック・ゲージノ模型で必要な場と同定する。また、超対称 gGHU 模型では、軽い Higgs 2 重項を実現することができるため、大統一理論における微調整問題の1種である DT 分離問題を自然に解決するという利点がある。

3.1 コンパクト化とオービフォルド化

ここからは5次元の理論を考えていくので、そのための準備として、 S^1 コンパクト化と S^1/\mathbb{Z}_2 オービフォルド化について説明する。

一般に、余剰次元模型を考える動機としては、階層性問題の解決や、重力法則の変更、naturalness 概念の変更、対称性の破れの新しいメカニズムなどが知られている。余剰次元を考える利点は多いが、我々が感じ取っている時空は4次元であるため、余剰次元を感知できない工夫が必要となる。そのような工夫の一つとして、 S^1 コンパクト化がある。これは、余剰次元方向が小さく丸まっているために観測できないと考えるものである。また、4次元のカイラルな理論を得るのにはさらに工夫が必要で、その一つとして S^1/\mathbb{Z}_2 オービフォルド化を説明する。オービフォルド化はフェルミオンにカイラリティを導入する方法の1つである。

5次元座標を $x^M = (x^\mu, x^5 \equiv y)$ とする ($\mu = 0, 1, 2, 3$)。余剰次元方向の座標 y と $y + 2\pi R$ を同一視することを S^1 コンパクト化という。 R はコンパクト化の半径である。5次元時空のゲージ場 $A_M(x, y)$ を考えると、 S^1 コンパクト化は A_M に対する周期境界条件として表すことができる:

$$A_M(x, y + 2\pi R) = A_M(x, y) . \quad (3.1)$$

この周期性から、 A_M をフーリエ級数展開することができる。簡単のために、以下しばらく、フーリエ係数の規格化因子は考えないことにすると、フーリエ級数展開は

$$A_M(x, y) \sim A_{M+}^{(0)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{M+}^{(n)}(x) \cos \frac{ny}{R} + A_{M-}^{(n)}(x) \sin \frac{ny}{R} \right] \quad (3.2)$$

の形であり、フーリエ係数 $A_{M\pm}^{(n)}(x)$ は4次元場と見なせる。 $n=0$ モード $A_{M+}^{(0)}(x)$ はゼロ質量 (偶関数) で、ゼロモードと呼ばれる。 $n \neq 0$ モード $A_{M\pm}^{(n)}(x)$ は質量 $m_n = n/R$ をもち、Kaluza-Klein モード (KK モード) と呼ばれる。このように、 S^1 コンパクト化した5次元の場は4次元からみると、色々な質量 $m_n = n/R$ をもつ無限個の

場と等しい。コンパクト化の半径 R が小さければ KK モードの質量は重くなるので、 $1/R$ より低いエネルギーでは KK モードは観測されない。したがって、一般には、エネルギーが低いと余剰次元は観測できない。

一方、今の場合、5次元のベクトル場を考えているので、状況が少し異なる。低エネルギーで残るのは、ゼロ質量のゼロモード $A_{M+}^{(0)}(x)$ である。 A_μ は4次元でみるとベクトル場であるのに対して、 A_5 はスカラー場である。つまり、 S^1 コンパクト化した5次元上のゲージ場を4次元でみると、低エネルギーではゼロ質量のベクトル場 $A_{\mu+}^{(0)}(x)$ とスカラー場 $A_{5+}^{(0)}(x)$ が軽く残るのが特徴である。 $A_{\mu+}^{(0)}(x)$ は4次元のゲージ場と見なすことができるが、その他に余分なスカラー場 $A_{5+}^{(0)}(x)$ が軽く残っている。余剰次元の存在を示す KK モードはコンパクト化のスケール程度にエネルギーが高くないと観測できないが、ここでの A_5 のように、4次元を考えるだけでは現れなかった場がコンパクト化のスケールよりも軽く残ることがある。

S^1 上でさらに $y \sim -y$ と同一視することを S^1/\mathbb{Z}_2 オービフォルド化という。点 $y_0 = 0$ および $y_1 = \pi R$ はオービフォルドの固定点である。 S^1/\mathbb{Z}_2 オービフォルド化を、 $U(1)$ ゲージ場に対する境界条件として表すと、

$$A_\mu(x, -y) = +A_\mu(x, y) \quad (\text{偶関数}), \quad (3.3a)$$

$$A_5(x, -y) = -A_5(x, y) \quad (\text{奇関数}) \quad (3.3b)$$

となる。ゼロモードは y 方向に定数モードであることに注意すると、ベクトル場 $A_{\mu+}^{(0)}(x)$ は境界条件を満たし、ゼロモードが残るが、スカラー場 $A_{5+}^{(0)}(x)$ は境界条件を満たさないので、ゼロモードが残らないことがわかる。以下ではこのように、ゲージ場に対して境界条件を課して、ゼロモードが残るかどうかを考えていく。

3.1.1 S^1/\mathbb{Z}_2 上の $SU(5)$ ゲージ場

ここでは A_M が $SU(5)$ のゲージ場である場合を考える。 $U(1)$ の場合との違いは、ゲージ場が行列になることである。 $SU(5)$ ゲージ場は随伴表現に属し、 5×5 エルミート行列で表すことができる。ここでは、 $SU(3) \times SU(2)$ 部分群に注目して、

$$A_M(x, y) = \begin{pmatrix} \boxed{A_M^{\alpha\beta}} & & \\ & & \\ & & \boxed{A_M^{\alpha\beta}} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

の形で表示することにする。ここで $A_M^{\alpha\beta}$ は $SU(3)$ ゲージ場、 $A_M^{\alpha\beta}$ は $SU(2)$ ゲージ場である。非対角成分は $(\mathbf{3}, \mathbf{2}) + (\mathbf{3}, \mathbf{2}^*)$ 表現に対応している。

このとき、固定点 $y_0 = 0$ および $y_1 = \pi R$ まわりの \mathbb{Z}_2 変換 $y - y_i \mapsto y + y_i$ ($i = 0, 1$) を定義して、 $SU(5)$ ゲージ場に対して境界条件を次のように課す：

$$A_\mu(x, y_i - y) = +P_i A_\mu(x, y_i + y) P_i^{-1}, \quad (3.5a)$$

$$A_5(x, y_i - y) = -P_i A_5(x, y_i + y) P_i^{-1}. \quad (3.5b)$$

ここで、 P_i は 5×5 ユニタリ行列である。前節では周期境界条件と固定点 $y_0 = 0$ まわりの境界条件のみを課していたが、ここでは2つの固定点 y_0 および y_1 のまわりの境界条件を課している。前節とは違うことをしているように見えるが、基本的には同じことをしている。オービフォルドの構成のためには、周期境界条件と2つの固定点 y_0 および y_1 のまわりの境界条件という3種類の境界条件が考えられるが、独立に取れるのは3つのうち2つである。この点については付録 A で説明する。

境界条件は行列 P_i の取り方に依るので、それに対応して残るゼロモードも変わる。具体例として2通りの境界条件を考えて、どのようなゼロモードが残るのかをみる。

■境界条件1 $P_0 = P_1 = 1$ をとると、

$$A_\mu(x, -y) = +A_\mu(x, y), \quad A_5(x, -y) = -A_5(x, y). \quad (3.6)$$

これは第 3.1 節のときと同じで、 A_μ はゼロモードを含むが、 A_5 はゼロモードを含まない。4次元有効理論では $SU(5)$ ゲージ場が軽く残り、スカラー場はコンパクト化の半径の逆数 R^{-1} 程度の質量を持つ。

■境界条件2 P_0 および P_1 を次式のようにとる:

$$P_0 = P_1 = P_W \equiv \begin{pmatrix} \boxed{+1_3} & \\ & \boxed{-1_2} \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

このときゼロモードが残るのは

$$A_\mu(x, y) = \begin{pmatrix} \boxed{A_\mu^{ab}} & \\ & \boxed{A_\mu^{\alpha\beta}} \end{pmatrix}, \quad A_5(x, y) = \begin{pmatrix} & \boxed{A_5^{\alpha\beta}} \\ \boxed{A_5^{\alpha\beta}} & \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

である。つまり、 A_μ は $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ ゲージ場、 A_5 は $(\mathbf{3}, \mathbf{2}) + (\mathbf{3}^*, \mathbf{2})$ 表現場が軽く残る。ゲージ場については、5次元の $SU(5)$ 対称性が境界条件によって破れ、標準模型と同じゲージ場が得られた。 A_5 は破れた対称性の生成子に対応するスカラー場である。ただし、これはディラック・ゲージノ模型で欲しい随伴表現ではない。

3.1.2 $SU(5) \times SU(5)$ ゲージ場

次節でグランドゲージ・ヒッグス統一模型についてレビューする前に、 $SU(5) \times SU(5)$ ゲージ場 [36–38] において、どのように随伴スカラー場がゼロモードを持つのかを手短に確認する。

前節の $SU(5)$ が1つの場合、 A_5 の随伴スカラー部分がゼロモードを持たないのは、 A_μ と A_5 の境界条件が -1 倍違うということが重要であった。そこで、 $SU(5)$ ゲージ場を2つ用意して、その対角部分群を取るということを考える。(これは弦理論において対角埋め込み法 [40–47] として知られている。) $SU(5)_1, SU(5)_2$ それぞれのゲージ場を $A_M^{(1)}, A_M^{(2)}$ と書き、さらに1と2の入れ替えの下での \mathbb{Z}_2^{ex} 対称性を課す。ここで、オービフォールドの \mathbb{Z}_2 と区別するために \mathbb{Z}_2^{ex} と書いた。この \mathbb{Z}_2^{ex} 変換の固有状態である $A_M^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_M^{(1)} \pm A_M^{(2)})$ を定義する。これは \mathbb{Z}_2^{ex} 変換の下で $A_M^{(\pm)} \rightarrow \pm A_M^{(\pm)}$ と変換する。

固定点 $y_0 = 0, y_1 = \pi R$ まわりの境界条件を次のように課す:

$$A_\mu^{(\pm)}(x, y_i - y) = \pm P_i A_\mu^{(\pm)}(x, y_i + y) P_i^{-1}, \quad (3.9a)$$

$$A_5^{(\pm)}(x, y_i - y) = \mp P_i A_5^{(\pm)}(x, y_i + y) P_i^{-1}. \quad (3.9b)$$

$y_0 = 0$ まわりの境界条件として、 $P_0 = 1$ をとると、

$$A_\mu^{(\pm)}(x, -y) = \pm A_\mu^{(\pm)}(x, y), \quad A_5^{(\pm)}(x, -y) = \mp A_5^{(\pm)}(x, y). \quad (3.10)$$

この境界条件からは $A_\mu^{(+)}$ と $A_5^{(-)}$ のゼロモードが残る。 $A_\mu^{(+)}$ は対角部分群 $SU(5)_{\text{diag.}}$ のゲージ場である。 $y_1 = \pi R$ まわりの境界条件として、 $P_1 = P_W$ を取る。 P_W は式 (3.7) 式で定義した。 y_0 まわりの境界条件と合わせて、ゼロモードが残るのは

$$A_\mu^{(+)}(x, y) = \begin{pmatrix} \boxed{A_\mu^{ab}} & \\ & \boxed{A_\mu^{\alpha\beta}} \end{pmatrix}, \quad A_5^{(-)}(x, y) = \begin{pmatrix} \boxed{A_5^{\alpha\beta}} & \\ & \boxed{A_5^{\alpha\beta}} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

である。つまり、対角部分群 $SU(5)_{\text{diag.}}$ の部分群 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ のゲージ場と随伴スカラー場が軽く残る。前節の $SU(5)$ が1つの場合と比べると、 A_5 がゼロモードを持つ部分が異なっている。ここで現れた随伴スカラー場は、ディラック・ゲージノ模型で必要になる随伴表現場と同定できる。

本節では非自明な境界条件を考えて、 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ の随伴スカラーである $A_5^{(-)}$ がゼロモードを持つことを確認した。ディラック・ゲージノ模型における随伴表現場の起源を考えるだけであれば以上の説明で十分であるが、次節では、異なる境界条件を課して同じように $A_5^{(-)}$ の随伴スカラー部分がゼロモードを持つことを見る。本節との違いは、Wilson 線積分がどのような期待値を持つかである。本節では、Wilson 線積分の期待値が 1 であることを暗に仮定していた。実際には、理論は境界条件と Wilson 線積分の期待値の組み合わせによって決まり、同じ理論を導く境界条件は互いに“大きな”ゲージ変換で移り合う [69]。この点については付録 A で説明する。細谷機構では Wilson 線積分が重要な役割を果たすため、次節で説明する境界条件を用いたほうが都合が良い。一方で、随伴スカラーがゼロモードを持つことを示すには本節の境界条件で見たほうが見やすいと考え、グランドゲージ・ヒッグスのレビューをする前に説明した。両者は見かけ上異なる境界条件を考えているが、ゲージ変換で移り合うため、同じ理論を考えていることになる。

3.2 グランドゲージ・ヒッグス統一模型

本節では、軽い随伴表現場を预言する模型であるグランドゲージ・ヒッグス統一模型 (grand gauge-Higgs unification, gGHU 模型)[36–38] についてレビューする。gGHU 模型は、大統一理論の対称性の破れに対して細谷機構を適用する模型である。ここでは大統一模型の対称性として $SU(5)$ を考える。この模型を超対称化した模型は、軽い随伴表現場を预言し、DT 分離を自然に説明する模型である。

前節において、 $SU(5) \times SU(5)$ ゲージ場を考えると、軽い随伴表現場がゼロモードを持つことを確認した。ここで改めて模型の仮定を説明する。 $SU(5)$ 対称性の破れに対して細谷機構を適用するためには、ゲージ場の余剰次元成分がゼロモードを持つ必要がある。しかし、式 (3.3) で見たように、 S^1/\mathbb{Z}_2 オービフォールド上では A_μ と A_5 の境界条件は互いに逆符号である必要があり、 A_μ と A_5 の両方がゼロモードを持つことはできない。この困難を回避する方法として、対角埋め込み法が知られている。2つの $SU(5)$ ゲージ場 $A_M^{(1)}$, $A_M^{(2)}$ を考えて、それらを入れ替える \mathbb{Z}_2^{ex} 対称性を課す：

$$P_{\text{ex}} : A_M^{(1)}(x, y) \longleftrightarrow A_M^{(2)}(x, y). \quad (3.12)$$

ここで P_{ex} は \mathbb{Z}_2^{ex} の生成子とする。つまり、 $\mathbb{Z}_2^{\text{ex}} = \{1, P_{\text{ex}}\}$ である。オービフォールドの境界条件は、5次元パリティ P_5 と \mathbb{Z}_2^{ex} の入れ替え P_{ex} を組み合わせた変換に対して課される：

$$A_M^{(1)}(y_p - y) = (-)^M A_M^{(2)}(y_p + y). \quad (3.13)$$

ここで、 $y = y_p (p = 0, 1)$ はオービフォールドの固定点で、 $y_0 = 0$, $y_1 = \pi R$ である。この境界条件を、 P_{ex} の固有状態 $A_M^{(\pm)} = (A_M^{(1)} \pm A_M^{(2)})/\sqrt{2}$ で書き換えると、

$$A_\mu^{(\pm)}(y_p - y) = \pm A_\mu^{(\pm)}(y_p + y), \quad (3.14a)$$

$$A_5^{(\pm)}(y_p - y) = \mp A_5^{(\pm)}(y_p + y) \quad (3.14b)$$

と書ける。従って、 $A_\mu^{(+)}$ と $A_5^{(-)}$ がゼロモードを持つ。これは、境界条件によって対称性が $SU(5)_1 \times SU(5)_2 \rightarrow SU(5)_V$ と対角部分群に破れたことを意味している。 $A_5^{(-)}$ は対角部分群 $SU(5)_V$ のもとで随伴表現として変換するスカラー場である。よって、細谷機構で $SU(5)$ を破るのに必要な随伴スカラー場のゼロモードが得られた。Wilson 線積分は次のように与えられる：

$$\begin{aligned} W &= \mathcal{P} \exp \left[ig \int dy \left(A_5^{(1)a} T_1^a + A_5^{(2)a} T_2^a \right) \right] \\ &= \mathcal{P} \exp \left[i \frac{g}{\sqrt{2}} \int dy \left(A_5^{(+a)} (T_1^a + T_2^a) + A_5^{(-a)} (T_1^a - T_2^a) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

ここで、 \mathcal{P} は経路順序化を表し、 g は結合定数である。いま、ゼロモードを持つのは $A_5^{(-)}$ なので、

$$W = \mathcal{P} \exp \left[i \frac{g}{\sqrt{2}} \int dy A_5^{(-)} \right] \quad (3.16)$$

を考える。\$P_{\text{ex}}\$ の固有状態である \$(\pm)\$ のベースで見ると、結合定数が \$1/\sqrt{2}\$ 倍されていることが分かる。\$SU(5)\$ を \$SU(3) \times SU(2) \times U(1)\$ に破るような VEV は

$$\langle W \rangle = \text{diag.}(+1, +1, +1, -1, -1) \quad (3.17)$$

である。このとき、\$A_5^{(-)}\$ のうち、\$SU(3) \times SU(2) \times U(1)\$ 随伴表現のスカラーが massless で残る。これは、前節の境界条件で得られた結果と一致する。実際、\$\langle W \rangle = 1\$ となるようなゲージ変換をすると、\$y = y_1 = \pi R\$ 周りの境界条件が式 (3.7) で定義した \$P_W\$ を掛けたものに変更される。

次に、フェルミオンについて考える。\$\mathbb{Z}_2^{\text{ex}}\$ 対称性から、バルクフェルミオンとして 1 対のフェルミオン \$\Psi_{(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)}^{(1)}\$, \$\Psi_{(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1)}^{(2)}\$ を導入する。添字の \$(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)\$ は左側が \$SU(5)_1\$, 右側が \$SU(5)_2\$ のもとでの表現を表す。境界条件は

$$\Psi_{(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)}^{(1)}(y_0 - y) = \eta_\Psi \gamma_5 \Psi_{(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1)}^{(2)}(y_0 + y), \quad \Psi_{(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)}^{(1)}(y_1 - y) = \eta'_\Psi \gamma_5 \Psi_{(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1)}^{(2)}(y_1 + y) \quad (3.18)$$

と課す。ただし、\$\eta_\Psi(\eta'_\Psi) = \pm 1\$ である。\$\Psi^{(\pm)}\$ で書き直すと、

$$\Psi^{(\pm)}(y_0 - y) = \pm \eta_\Psi \gamma_5 \Psi^{(\pm)}(y_0 + y), \quad \Psi^{(\pm)}(y_1 - y) = \pm \eta'_\Psi \gamma_5 \Psi^{(\pm)}(y_1 + y) \quad (3.19)$$

となる。この式から、\$\Psi_L^{(+)}\$ と \$\Psi_R^{(-)}\$, \$\Psi_L^{(-)}\$ と \$\Psi_R^{(+)}\$ がそれぞれ同じ境界条件を満たすことが分かる。例えば \$\Psi_L^{(+)}\$ がゼロモードを持てば、\$\Psi_R^{(-)}\$ もゼロモードを持つ。以下では簡単のために \$\mathbf{R}_2 = \mathbf{1}\$ と置く。このとき、\$\Psi_L^{(+)}\$ と \$\Psi_R^{(-)}\$ は対角部分群 \$SU(5)_V\$ の下で同じ表現であるため、ゼロモードがベクトル的となり、カイラルでなくなる。標準模型のフェルミオンのような、カイラルフェルミオンはオービフォールドの境界上に置くなどの工夫が必要である。

3.2.1 二重項・三重項分離

次に(超対称) グランドゲージ・ヒッグス統一模型の特徴である、二重項・三重項 (Doublet-Triplet, DT) 分離の実現について説明する。

まず、DT 分離問題について手短かに紹介する。例として、4 次元のシンプルな(超対称) \$SU(5)\$ 模型を考える。\$SU(5)\$ 模型では、標準模型の Higgs 場は \$SU(5)\$ の \$\mathbf{5}(\bar{\mathbf{5}})\$ 表現に埋め込まれる。\$SU(5)\$ の \$\mathbf{5}\$ 表現を作るためには、\$SU(3)\$ の基本表現場 \$H^C\$ が必要である:

$$\bar{H}(\bar{\mathbf{5}}) = (\bar{H}^C, H_d), \quad H(\mathbf{5}) = (H^C, H_u). \quad (3.20)$$

\$SU(5)\$ が GUT スケール (\$\sim 10^{16}\$ GeV) で破れるとすると、\$H^C\$ は GUT スケール程度の質量を持つ。一方で、標準模型の Higgs 場は電弱スケールの質量を持つはずなので、もともと同一表現の粒子の質量が大きく異なる必要があるということになる。これが DT 分離問題と呼ばれる微調整問題である。

DT 分離問題を解決する方法はいくつか提案されているが、その 1 つに missing VEV 機構 [70–76] がある。式 (3.17) の VEV は \$A_5^{(-)}\$ の VEV が \$\langle A_5^{(-)} \rangle \sim \text{diag.}(0, 0, 0, v, v)\$ となっていることに対応しており (\$v \neq 0\$), missing VEV を実現する形になっている。通常の \$SU(5)\$ の生成子を見ると、トレースレス条件からこのような VEV を取ることはできないが、\$W\$ は \$SU(5)\$ の代数ではなく群の要素であるため、このような VEV を取ることができる。

gGHU 模型では、標準模型の Higgs 場と \$H^C\$ の質量が異なることが自然に説明される [38]。電弱対称性の破れに細谷機構を適用する通常のゲージ・ヒッグス統一模型では、ゲージ場の余剰次元成分のゼロモードが標準模型の Higgs 場と同定される。一方で gGHU 模型では、\$SU(5)\$ の破れに対して細谷機構を適用するため、ゲージ場の余剰次元成分は随伴スカラー場であり、標準模型の Higgs 場は別に考える必要がある。そこで、バルク場の対 \$H_{(5,1)}^{(1)}\$ と \$H_{(1,5)}^{(2)}\$ を導入し、\$\langle W \rangle = 1\$ になるゲージでの境界条件

$$H^{(\pm)}(y_0 - y) = \eta_H \gamma_5 H^{(\pm)}(y_0 + y), \quad H^{(\pm)}(y_1 - y) = \eta'_H \gamma_5 P_W H^{(\pm)}(y_1 + y) \quad (3.21)$$

を考える。このとき、\$\eta_H \eta'_H = -1\$ と取ると、\$SU(2)\$ 二重項のみがゼロモードを持つようにできることが分かる。したがって、gGHU 模型では DT 分離が自然に実現している。

第 4 章

supersoft 項の起源

本節では supersoft 項が 1 種の Chern-Simons (CS) 項として導けることを示し、その係数をアノマリーとの関係から計算する [65, 77]。

第 2.3 節で見たように、ディラック・ゲージノ模型では随伴表現のカイラル超場 Φ^a と supersoft 項 (2.29) の存在を仮定する。一方、第 3.2 節で見たように、gGHU 模型は軽い随伴表現場を预言する。そこで本研究では、この随伴表現場をディラック・ゲージノ模型の構成に必要な随伴表現場と同定する。本節では、もう一つの仮定である supersoft 項の導出を議論し、特に、supersoft 項のボソン部分 $\phi^a F_{\mu\nu}^a \tilde{F}_D^{\mu\nu}$ に着目する。そのために、gGHU 模型のセットアップに対して以下のような変更を加える：

- ゲージ群を $SU(5)_1 \times SU(5)_2 \times U(1)_D$ と拡張 ，
- “メッセンジャー”(バルク) フェルミオンと境界フェルミオンの追加 。

ディラック・ゲージノ模型では $U(1)_D$ の D 項による超対称性の破れを仮定するため、この $U(1)_D$ ゲージ群を追加する。 $U(1)_D$ のゲージ場がゼロモードを持つように、 $U(1)_D$ は $P_{\text{ex-even}}$ と仮定する。メッセンジャーフェルミオンと境界フェルミオンは CS 項を生成するために追加し、本節ではこれらの混合質量が無限大の極限の場合について、CS 項の係数を計算する。また、本章での議論は超対称でない場合について行う。

まず、supersoft 項が 1 種の CS 項とみなせることを議論する。supersoft 項には $\phi^a F_{\mu\nu}^a \tilde{F}_D^{\mu\nu}$ という項が含まれている。gGHU 模型のセットアップを考えると、 $A_\mu^{(+)}$ のゼロモードが 4 次元のゲージ場となり、 $A_5^{(-)}$ のゼロモードが 4 次元の擬スカラー成分 π^a に対応する ($\phi^a = (\sigma^a + i\pi^a)/\sqrt{2}$)。したがって、次のような混合 CS 項

$$A_5^{a(-)} F_{\mu\nu}^{a(+)} \tilde{F}_D^{\mu\nu} \quad (4.1)$$

が supersoft 項に対応する。

$SU(5)_i^2 \times U(1)_D$ ($i = 1, 2$) の CS 項を次のように定義する：

$$\mathcal{O}^{(i)} = A_5^{a(i)} F_{\mu\nu}^{a(i)} \tilde{F}_D^{\mu\nu} . \quad (4.2)$$

このとき、欲しい CS 項 (4.1) は以下の組み合わせ

$$\mathcal{O}^{(-)} = \mathcal{O}^{(1)} - \mathcal{O}^{(2)} = A_5^{a(-)} F_{\mu\nu}^{a(+)} \tilde{F}_D^{\mu\nu} + A_5^{a(+)} F_{\mu\nu}^{a(-)} \tilde{F}_D^{\mu\nu} \quad (4.3)$$

に含まれる。右辺第 2 項の場が少なくとも 1 つ KK モードを含む一方で、第 1 項はゼロモードを含む場のみで構成される演算子である。したがって、4 次元有効理論で重要になるのは第 1 項である。演算子 $\mathcal{O}^{(-)}$ は $P_{\text{ex-odd}}$ である。このような項を生成するためには、 \mathbb{Z}_2^{ex} 不変性を破るような寄与を加える必要がある。あとで見るように、本研究ではそのような寄与としてメッセンジャーフェルミオンの質量項を考える。

ここで、 \mathbb{Z}_2 不変性とオービフォールドの構成について考える。通常のオービフォールドを構成するときには、5 次元方向のパリティ不変性 \mathbb{Z}_2^d を要請する。一方、本研究で扱う gGHU 模型では、 $SU(5)_1$ と $SU(5)_2$ の入れ替えに対応する \mathbb{Z}_2^{ex} が存在する。本研究では、オービフォールドを構成する際に、 $\mathbb{Z}_2^d \times \mathbb{Z}_2^{\text{ex}}$ 不変性ではなく、その対角部分

群 $\mathbb{Z}_2^{\text{comb}} = \{1, P_5 P_{\text{ex}}\}$ 不変性を要請する。つまり、オービフォールドの境界条件は P_5 と P_{ex} を同時に作用させた形になっている。 $\mathcal{O}^{(-)}$ は P_{ex} -odd であるだけでなく、(通常の CS 項と同じように) P_5 -odd でもある。したがって $\mathcal{O}^{(-)}$ は $\mathbb{Z}_2^{\text{comb}}$ 不変な演算子である。

4.1 セットアップ

2種類のフェルミオンを導入する。1つ目は5次元フェルミオン $\Psi_{(\mathbf{R}, \mathbf{1})}^{(1)}$ とその \mathbb{Z}_2^{ex} パートナー $\Psi_{(\mathbf{1}, \mathbf{R})}^{(2)}$ で、以下ではこれらを“メッセンジャー”フェルミオンと呼ぶ。2つ目はオービフォールドの境界 $x^5 = x_p^5 (p=0, 1)$ 上に局在する4次元フェルミオン ψ_L^p で、境界フェルミオンと呼ぶことにする。新しく導入するフェルミオンを、表 4.1 にまとめる。

表 4.1 CS 項を生成するために導入するフェルミオン

バルクフェルミオン	$SU(5)_1 \times SU(5)_2$	$SU(5)_G$	$U(1)_D$	P_5
$\Psi_L^{(1)}(x^M)$	$(\mathbf{R}, \mathbf{1})$	\mathbf{R}	q_D	+
$\Psi_L^{(2)}(x^M)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{R})$	\mathbf{R}	q_D	+
$\Psi_R^{(1)}(x^M)$	$(\mathbf{R}, \mathbf{1})$	\mathbf{R}	q_D	-
$\Psi_R^{(2)}(x^M)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{R})$	\mathbf{R}	q_D	-
境界フェルミオン	導入する境界	$SU(5)_G$	$U(1)_D$	P_{ex}
$\psi_L^{p=0}(x^\mu)$	$x_0^5 = 0$	\mathbf{R}	q_D	-
$\psi_L^{p=1}(x^\mu)$	$x_1^5 = \pi R$	\mathbf{R}	q_D	-

これらのフェルミオンに対する5次元ラグランジアンを $\mathcal{L}_\Psi = \mathcal{L}_\Psi^{\text{bulk}} + \mathcal{L}_\Psi^{\text{boundary}}$ と書き、

$$\mathcal{L}_\Psi^{\text{bulk}} = \sum_{i=1,2} \bar{\Psi}^{(i)} (i\not{D} - \gamma_5 D_5 - m_i) \Psi^{(i)}, \quad (4.4)$$

$$\mathcal{L}_\Psi^{\text{boundary}} = \sum_{p=0,1} \left\{ \bar{\psi}_L^p i\not{D} \psi_L^p - \sqrt{\mu_p} \left(\bar{\psi}_L^p \Psi_R^{(-)} + c.c. \right) \right\} 2\delta(x^5 - x_p^5) \quad (4.5)$$

とする。ここで、 D_M は $SU(5)_1 \times SU(5)_2 \times U(1)_D$ に対応する共変微分、 m_i はメッセンジャーフェルミオンの質量 ($i=1, 2$)、 μ_p はメッセンジャーフェルミオンと境界フェルミオンとの混合質量とする。

メッセンジャーフェルミオン $\Psi^{(i)}$ の質量項を P_{ex} の固有状態 $\Psi^{(\pm)}$ で書き直すと、

$$m_1 \bar{\Psi}^{(1)} \Psi^{(1)} + m_2 \bar{\Psi}^{(2)} \Psi^{(2)} = m_+ \left(\bar{\Psi}^{(+)} \Psi^{(+)} + \bar{\Psi}^{(-)} \Psi^{(-)} \right) + m_- \left(\bar{\Psi}^{(+)} \Psi^{(-)} + \bar{\Psi}^{(-)} \Psi^{(+)} \right) \quad (4.6)$$

と書ける。ただし、 $m_\pm = m_1 \pm m_2$ とおいた。以下では $m_+ = 0$ の場合、つまり $m_1 = -m_2 = m_-$ の場合を考える。さらに簡単のため、 m_- を単に m と書くことにする。結局、バルクの質量項として、

$$-\mathcal{L}_{\text{mass}}^{\text{bulk}} = m \left(\bar{\Psi}^{(1)} \Psi^{(1)} - \bar{\Psi}^{(2)} \Psi^{(2)} \right) = m \left(\bar{\Psi}^{(+)} \Psi^{(-)} + \bar{\Psi}^{(-)} \Psi^{(+)} \right) \quad (4.7)$$

を考える。通常のオービフォールド上では、フェルミオン質量としてキルク質量を考えるのに対して、式 (4.7) に現れる m は定数である。 $\mathcal{O}_{\text{mass}}^{(-)} \equiv \bar{\Psi}^{(1)} \Psi^{(1)} - \bar{\Psi}^{(2)} \Psi^{(2)}$ は P_{ex} -odd であり、また、5次元フェルミオンの質量項は P_5 -odd である。したがって、 $\mathcal{O}_{\text{mass}}^{(-)}$ は P_5 と P_{ex} を同時に作用させたときに偶、つまり $\mathbb{Z}_2^{\text{comb}}$ 不変となっている。ラグランジアン $\mathcal{L}_{\text{mass}}^{\text{bulk}}$ が $\mathbb{Z}_2^{\text{comb}}$ 不変であるためには、係数 m は定数でなければならない。本研究では、この質量項 (4.7) のみが \mathbb{Z}_2^{ex} を破ると仮定する。

メッセンジャーフェルミオンに対するオービフォールドの境界条件を

$$\Psi^{(1)}(x_p^5 - x_5) = -\gamma_5 \Psi^{(2)}(x_p^5 + x_5) \quad (4.8)$$

と課す。このとき、 $\Psi_L^{(+)}$ と $\Psi_R^{(-)}$ がゼロモードを持つ。しかし、バルク質量項 (4.7) を導入すると、これらのゼロモードが質量項を組み、massless でなくなる。そのため、massless ゼロモードを得るためには工夫が必要となる。その工夫として、境界フェルミオン ψ_L^p を導入する。 ψ_L^p が $\Psi_R^{(-)}$ と質量項を組むことで、 $\Psi_L^{(+)}$ が massless ゼロモードを持つことができる。

4.2 KK モード関数と KK スペクトル

本節では境界フェルミオンがある場合における、メッセンジャーフェルミオン $\Psi^{(i)}$ の KK モード関数について議論する。以降では簡単のため $SU(5)$ の代わりに $U(1)$ を考える。

S^1/\mathbb{Z}_2 上の $U(1)_1 \times U(1)_2 \times U(1)_D$ 模型を考える。バルクフェルミオンとして $\Psi^{(1)}(q, 0, q_D)$, $\Psi^{(2)}(0, q, q_D)$ を導入する。ここで、 $(U(1)_1, U(1)_2, U(1)_D)$ それぞれの $U(1)$ チャージを (Q_1, Q_2, Q_D) と表した。また、以下では 5 次元方向の座標を y と書く。オービフォールドの固定点 $y = y_p \equiv p\pi R$ まわりの境界条件を、式 (4.8) と同じように、

$$\Psi^{(1)}(y_p - y) = -\gamma_5 \Psi^{(2)}(y_p + y) \quad (4.9)$$

とする。また、オービフォールドの各固定点 $y = y_p$ 上に左巻フェルミオン $\psi_L^p(q, -, q_D)$ を導入する。ここで、チャージは (バルクフェルミオンと異なり) $(U(1)^{(+)}, \mathbb{Z}_2^{\text{ex}}, U(1)_D)$ に対応している。これは、境界上では $U(1)_1 \times U(1)_2$ が対角部分群 $U(1)^{(+)}$ に破れるためである。 $U(1)^{(-)}$ は破れており、対応する電荷 $Q_1 - Q_2$ は決まらない。

考えるラグランジアンは式 (4.4), (4.5) と同じ形だが、 $U(1)$ を考えているので共変微分が

$$\begin{aligned} D_M &= \partial_M - ig \left(Q_1 A_M^{(1)} + Q_2 A_M^{(2)} \right) - ig_{5D} Q_D B_M \\ &= \partial_M - i \frac{g}{\sqrt{2}} (Q_1 + Q_2) A_M^{(+)} - i \frac{g}{\sqrt{2}} (Q_1 - Q_2) A_M^{(-)} - ig_{5D} Q_D B_M \end{aligned} \quad (4.10)$$

となる。ここで、 $U(1)_D$ のゲージ場を B_M 、ゲージ結合定数を g_{5D} と書いた。また、 $U(1)^{(\pm)}$ のチャージを $Q_{\pm} = Q_1 \pm Q_2$ と見なすと、ゲージ場 $A_M^{(\pm)} = (A_M^{(1)} \pm A_M^{(2)})/\sqrt{2}$ のゲージ結合定数は $g/\sqrt{2}$ となる。

バルクフェルミオン $\Psi_{\chi}^{(i)}(x^{\mu}, x^5)$ に対する運動方程式は $\chi = L, R$ として、

$$i\mathcal{D}\Psi_R^{(i)} = (D_5 + m_i) \Psi_L^{(i)}, \quad (4.11a)$$

$$i\mathcal{D}\Psi_L^{(i)} = (D_5 + m_i) \Psi_R^{(i)} \quad (4.11b)$$

となる。 $m_1 = -m_2 = m$ である。4 次元の質量が M_n の KK モード関数を $\xi_{n,\chi}^{(i)}(y)$ として、 $\Psi_{\chi}^{(i)}(x^{\mu}, y) = \psi_{n,\chi}(x^{\mu})\xi_{n,\chi}^{(i)}(y)$ と展開すると、 $\xi_{n,\chi}^{(i)}(y)$ に対する運動方程式は

$$M_n \xi_{n,R}^{(i)} = (-\partial_5 + m_i) \xi_{n,L}^{(i)}, \quad (4.12a)$$

$$M_n \xi_{n,L}^{(i)} = (+\partial_5 + m_i) \xi_{n,R}^{(i)} \quad (4.12b)$$

となる。なお、添字の n はあとの議論を先取りして付けている。境界条件を考慮すると、KK 質量は整数または自然数 n でラベリングされる。運動方程式 (4.12) は 2 階微分方程式として、まとめて

$$M_n^2 \xi_{\chi}^{(i)}(y) = (-D_5^2 + m_i^2) \xi_{\chi}^{(i)}(y) \quad (4.13)$$

と表せる。したがって、 $\xi_{\chi}^{(i)}(y)$ の一般解は

$$\xi_{n,\chi}^{(i)}(y) = e^{ia_i y/R} \left[A_{n,\chi}^{(i)} \sin(\omega_n y) + B_{n,\chi}^{(i)} \cos(\omega_n y) \right] \quad (4.14)$$

と書ける。ただし、 $\omega_n^2 = m_n^2 - m^2$ とおいた。 $a_1 = -a_2 = a$ は Wilson 線積分の位相部分で、

$$a \equiv R \frac{gq}{\sqrt{2}} \left\langle A_5^{(-)} \right\rangle \quad (4.15)$$

とおいた。運動方程式 (4.13) から係数 $A_{n,\chi}^{(i)}, B_{n,\chi}^{(i)}$ の間には関係式

$$A_{n,L}^{(i)} = \frac{m_i}{m_n} A_{n,R}^{(i)} - \frac{\omega_n}{m_n} B_{n,R}^{(i)}, \quad (4.16a)$$

$$B_{n,L}^{(i)} = \frac{m_i}{m_n} B_{n,R}^{(i)} + \frac{\omega_n}{m_n} A_{n,R}^{(i)} \quad (4.16b)$$

が成り立つ。

KK モード関数に対するオビフォルドの条件は

$$\xi_{R/L}^{(1)}(y_p - y) = \mp \xi_{R/L}^{(2)}(y_p + y)$$

である。ただし、 $p = 0, 1$ であり、 $y_0 = 0$, $y_1 = \pi R$ とした。 \mathcal{P}_{ex} の固有状態では、

$$\xi_R^{(\pm)}(-y) = \mp \xi_R^{(\pm)}(y), \quad \xi_L^{(\pm)}(-y) = \pm \xi_L^{(\pm)}(y) \quad (4.17)$$

と書ける。

次に、境界条件から KK 質量のスペクトルを求めたい。そのためには境界フェルミオンの寄与を考慮する必要がある。ここでは、境界フェルミオンの寄与を境界条件の変更として取り込むことを考える。式 (4.5) では、バルクフェルミオンと境界フェルミオンとの混合質量項

$$\sqrt{\mu_p} \left(\bar{\psi}_L^p \Psi_R^{(-)} + c.c. \right) \quad (4.18)$$

を導入した。境界 $y = y_p$ 上ではこの影響が現れる。運動方程式は、

$$i\mathcal{D}\Psi_R^{(-)} = -\partial_5\Psi_L^{(-)} + \sqrt{\mu_p}\psi_L^p 2\delta(y - y_p) + \dots \quad (4.19)$$

となる。ただし $y = y_p$ で有限の項は省略した。この式を微小領域 $[y_p - \epsilon, y_p + \epsilon]$ で積分すると、

$$(-1)^p \Psi_L^{(-)}(y_p^\epsilon) = \sqrt{\mu_p} \psi_L^p \quad (4.20)$$

となる。ここで、 $y_p^\epsilon \equiv y_p + (-1)^p \epsilon$ とおいた。 $\bar{\psi}_L^p$ の運動方程式と、 $\Psi_R^{(-)}$ の連続性を使うと

$$(-1)^p \xi_L^{(-)}(y_p^\epsilon) = \frac{\mu_p}{M_n} \xi_R^{(-)}(y_p) \sim \frac{\mu_p}{M_n} \xi_R^{(-)}(y_p^\epsilon) \quad (4.21)$$

が得られる。このあとは、 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限を取り、 $\xi^{(-)}$ に対する境界条件

$$(-1)^p \xi_L^{(-)}(y_p) = \frac{\mu_p}{M_n} \xi_R^{(-)}(y_p) \quad (4.22)$$

を考える。なお、この境界条件 (4.22) は $M_n = 0$ で発散するため、 $M_n = 0$ である massless ゼロモードについては別途考慮する必要がある。一方、 $\Psi^{(+)}$ は境界フェルミオンとの質量項を考えないので、境界条件は変更は受けず、

$$\xi_R^{(+)}(y_p) = 0 \quad (4.23)$$

となる。以上の境界条件 (4.22), および (4.23) に一般解 (4.14) を代入して計算すると、KK 質量スペクトル $M = M_n$ は、次の関数のゼロ点として得られる:

$$N(M; a) = \frac{8\omega_1\omega_2}{M^2} [\cos(2\pi a) - N_c(M)] . \quad (4.24)$$

ここで、 $N_c(M)$ は

$$\begin{aligned} N_c(M) &= \cos(\omega_1\pi R) \cos(\omega_2\pi R) \\ &+ \frac{\mu_0 - \mu_1}{\omega_1} \sin(\omega_1\pi R) \cos(\omega_2\pi R) + \frac{\mu_0 - \mu_1}{\omega_2} \cos(\omega_1\pi R) \sin(\omega_2\pi R) \\ &- \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 + [2\mu_0 - (m_1 + m_2)] [2\mu_1 - (m_1 + m_2)]}{2\omega_1\omega_2} \sin(\omega_1\pi R) \sin(\omega_2\pi R) \end{aligned} \quad (4.25)$$

である。ただし、式 (4.24) の右辺には全体に $1/M^2$ が掛かっているため、この式も $M = 0$ では使えない。これは、もともと $M = 0$ で使えない境界条件 (4.22) から出発していることから分かる。

最後に、KK モード関数の規格化について考える。境界フェルミオンの寄与を境界条件として取り込んだので、4次元場として考えるのはバルクフェルミオン $\Psi_\chi^{(i)}(x, y)$ の KK モード $\psi_{n,\chi}(x)$ である。KK モード $\psi_{n,\chi}(x)$ の運動項の規格化を要請すると、KK モード関数に対する規格化条件

$$\int_0^{\pi R} dy \left[\xi_{n,\chi}^{(1)} \xi_{m,\chi}^{(1)} + \xi_{n,\chi}^{(2)} \xi_{m,\chi}^{(2)} \right] = \delta_{n,m} \quad (4.26)$$

が得られる。 $\xi_{n,\chi}^{(i)}$ をベクトルの第 i 成分とみなすと、上式はベクトルの内積の形をしている。次節以降の計算ではこのベクトル表記を用いることがある。運動方程式 (4.12a),(4.12b) はベクトル表記で

$$\begin{pmatrix} \xi_{R/L}^{(1)} \\ \xi_{R/L}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mp \partial_y + m_- & 0 \\ 0 & \mp \partial_y - m_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{L/R}^{(1)} \\ \xi_{L/R}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

と書ける。

4.2.1 massless ゼロモードについて

混合質量 μ_p が 0 の場合と、 μ_p が無限大の極限の場合について、massless ゼロモードの振る舞いを考える。

まず、運動方程式 (4.12) において、 $M_n = 0$ の場合は

$$\partial_5 \xi_{n,L/R}^{(i)} = \pm m_i \xi_{n,L/R}^{(i)} \quad (4.28)$$

となるので、massless ゼロモードは

$$\xi_{L0}^{(i)} = c_L^{(i)} e^{+m_i y}, \quad \xi_{R0}^{(i)} = c_R^{(i)} e^{-m_i y} \quad (4.29)$$

となる。ここで、 $c_\chi^{(i)}$ は未定係数とする。 $c_\chi^{(i)}$ は境界条件と規格化条件から決まる。

$\mu_p = 0$ の場合、 $\xi_R^{(+)}$ と $\xi_L^{(-)}$ が Dirichlet 境界条件を満たす:

$$\textcircled{y} = 0 \quad c_R^{(1)} + c_R^{(2)} = 0, \quad c_L^{(1)} - c_L^{(2)} = 0, \quad (4.30a)$$

$$\textcircled{y} = \pi R \quad c_R^{(1)} e^{-m_1 \pi R} + c_R^{(2)} e^{-m_2 \pi R} = 0, \quad c_L^{(1)} e^{+m_1 \pi R} - c_L^{(2)} e^{+m_2 \pi R} = 0. \quad (4.30b)$$

この式を満たす係数 $c_\chi^{(i)}$ の組み合わせは $c_R^{(1)} = c_R^{(2)} = c_L^{(1)} = c_L^{(2)} = 0$ しかない。したがって、 $\mu_p = 0$ の場合は massless ゼロモードは存在しない。

$\mu_p \rightarrow \infty$ の極限の場合は、境界条件が境界フェルミオンの効果によって変更されるため、 $\xi_R^{(+)}$ と $\xi_R^{(-)}$ が Dirichlet 境界条件を満たす:

$$\textcircled{y} = 0 \quad c_R^{(1)} + c_R^{(2)} = 0, \quad c_R^{(1)} - c_R^{(2)} = 0, \quad (4.31a)$$

$$\textcircled{y} = \pi R \quad c_R^{(1)} e^{-m_1 \pi R} + c_R^{(2)} e^{-m_2 \pi R} = 0, \quad c_R^{(1)} e^{+m_1 \pi R} - c_R^{(2)} e^{+m_2 \pi R} = 0. \quad (4.31b)$$

この式から、 $c_R^{(1)} = c_R^{(2)} = 0$ となるが、 $c_L^{(i)}$ については決まらない。これは、2つの massless ゼロモード $\xi_L^{(1)}, \xi_L^{(2)}$ が存在することに対応する。ベクトル記法では、

$$\begin{pmatrix} \xi_L^{(1)} \\ \xi_L^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_L^{(1)} e^{+m y} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ c_L^{(2)} e^{+m y} \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

と書ける。係数は規格化条件から

$$\frac{1}{(c_L^{(i)})^2} = \int_0^{\pi R} dy e^{\pm 2\pi R} = e^{\pm m \pi R} \frac{\sinh(m \pi R)}{m} \quad (4.33)$$

と決まる。ただし、上符号が $i = 1$, 下符号が $i = 2$ である。よって massless ゼロモードは、係数も含めて

$$\begin{pmatrix} \xi_L^{(1)} \\ \xi_L^{(2)} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{m}{\sinh(m\pi R)}} \begin{pmatrix} e^{+m(y-\pi R/2)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{\frac{m}{\sinh(m\pi R)}} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-my(y-\pi R/2)} \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

と書ける。

$\mu_p \gg 1/R$ かつ $\mu_p \gg |m_i|$ の極限で、スペクトルを与える式 (4.24) は

$$N(M; a) \sim \frac{16\mu_0\mu_1}{M^2} \sin(\omega_1\pi R) \sin(\omega_2\pi R) \quad (4.35)$$

となり、KK 質量は $M_n^2 = m_i^2 + (n/R)^2$ となる。この極限では、上式に Wilson 線積分の位相 a が現れないため、KK スペクトルは a に依存しなくなる。このあと見るように、KK スペクトルが a に依存しないときには CS 項の係数も a に依存せず、したがってゲージノ質量が統一する。

4.3 Chern-Simons 項の係数の計算

本節では、境界フェルミオンを $y = 0$ と $y = \pi R$ に導入した場合について、CS 項の係数を計算する。混合質量 μ_p が無限大の極限について、アノマリー流入を利用したゼロモードからの計算 [65] と、(massive)KK モードを積分して得る計算 [77] の 2通りの計算を示し、それらが一致することを確認する。

4.3.1 ゼロモードからの計算

S^1/\mathbb{Z}_2 オービフォールド上のアノマリーは 5 次元バルクには存在せず、オービフォールドの固定点上に局在する [62]。オービフォールド上のアノマリーについては付録 C でレビューする。一方で、5 次元フェルミオンが massless ゼロモードを持つとき、ゼロモードが生成するアノマリーはゼロモード波動関数に比例してバルクに広がる。このバルクに広がったアノマリーは KK モードの寄与によって生成される CS 項によって相殺される。以上のことから、フェルミオンゼロモードがどのようにバルクに広がるかが分かると、ゼロモードの寄与を打ち消すように CS 項の係数を決めることができる。

gGHU 模型のセットアップ [65] で、特に混合質量 μ_p が無限大の極限でのゼロモードは式 (4.34) で与えられる。 $U(1)^{(-)}$ カレント $J_M^{(-)}$ の規格化を次のように決める:

$$S_{\text{int}} = \int dx^4 \int_0^{\pi R} dx^5 \frac{g}{\sqrt{2}} A_M^{(-)} J_{(-)}^{(M)} + \dots \quad (4.36)$$

カレント $J_M^{(-)}$ の 4 次元発散は次の電荷密度 ρ に比例してバルクに広がっている:

$$\rho(x^5) = -q \left| \xi_L^{(1)} \right|^2 + q \left| \xi_L^{(2)} \right|^2 = \frac{2qm}{\sinh(m\pi R)} \sinh \left[2m \left(\frac{\pi R}{2} - x^5 \right) \right] \quad (4.37)$$

CS 項はバルクに広がったアノマリーを相殺するように有効的に生成される。そこで、欲しい CS 項を

$$\Gamma_{\text{CS}} = \frac{2(qg/\sqrt{2})^2 q_D g_5 D}{16\pi^2} \int dx^4 \int_0^{\pi R} dx^5 u(x^5) A_5^{(-)} F_{\mu\nu}^{(+)} \tilde{F}_D^{\mu\nu}(x^5) \quad (4.38)$$

と書き、 $\rho(x^5)$ を打ち消すように係数関数 $u(x^5)$ を決めていく。

ここでは、ゼロモードの分布 (4.37) がオービフォールドの midpoint $x^5 = \pi R/2$ まわりの反転について反対称であることを利用する。(より一般の場合については付録 E で考える。) $0 < y < \pi R/2$ とすると、 $\rho(y) = -\rho(\pi R - y)$ であるので、 $x^5 = y$ から $x^5 = \pi R - y$ への流入を考えるとアノマリーが打ち消し合う。そのような流入は、線分 $[y, \pi R - y] \equiv I_y$ に制限した CS 項

$$L_{\text{CS}}[I_y] = \int_0^{\pi R} dx^5 \Theta_y(x^5) A_5^{(-)} F_{\mu\nu}^{(+)} \tilde{F}_D^{\mu\nu}(x^5) \quad (4.39)$$

によって実現される。ここで、 $\Theta_y(x^5)$ は矩形関数

$$\Theta_y(x^5) = \begin{cases} 1 & \text{for } x^5 \in I_y \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad (4.40)$$

とした。ゲージ変換パラメータを $\alpha(x^5)$ として変分をとると、

$$\delta_g L_{\text{CS}} [I_y] = \int_0^{\pi R} dx^5 \Theta_y(x^5) \left(\frac{\sqrt{2}}{g} \partial_5 \alpha \right) F_{\mu\nu}^{(+)} \tilde{F}_D^{\mu\nu}(x^5) = \frac{\sqrt{2}}{g} \left[\alpha F_{\mu\nu}^{(+)} \tilde{F}_D^{\mu\nu} \right]_{x^5=y}^{\pi R-y} \quad (4.41)$$

となる。これに ρ を掛けて y について積分したものが欲しい CS 項である:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi R}{2}} dy \rho(y) L_{\text{CS}} [I_y] &= \int_0^{\frac{\pi R}{2}} dy \rho(y) \int_0^{\pi R} dx^5 \Theta_y(x^5) A_5^{(-)} F_{\mu\nu}^{(+)} \tilde{F}_D^{\mu\nu}(x^5) \\ &= \int_0^{\pi R} dx^5 q u(x^5) A_5^{(-)} F_{\mu\nu}^{(+)} \tilde{F}_D^{\mu\nu}(x^5). \end{aligned} \quad (4.42)$$

したがって、係数関数 $u(x^5)$ は

$$u(x^5) = \int_0^{\frac{\pi R}{2}} dy \frac{1}{q} \rho(y) \Theta_y(x^5) = \frac{2 \sinh(mx^5) \sinh[m(\pi R - x^5)]}{\sinh(m\pi R)} \quad (4.43)$$

と求められる [65]。

ゲージノの Dirac 質量項に対応させるため、4次元有効理論での式 (4.38) を求める。ゲージ場のゼロモード波動関数は $1/\sqrt{\pi R}$ なので、4次元の (GUT) 結合定数は $g_G = g/\sqrt{2\pi R}$ となる。ここで $g/\sqrt{2}$ は5次元の結合定数である。同様に、 $U(1)_D$ の結合定数は $g_D = g_{5D}/\sqrt{\pi R}$ となる。式 (4.38) で求めた係数関数 $u(x^5)$ を x^5 積分すると、

$$\mathcal{L}_{\text{CS}}^{4d} = \frac{2q^2 g_G^2 q_D g_D}{16\pi^2} \pi R f(m\pi R) A_5^{(-)} F_{\mu\nu}^{(+)} \tilde{F}_D^{\mu\nu}(x) \quad (4.44)$$

が得られる [65]。ここで、関数 $f(z)$ は

$$f(z) = \frac{1}{\tanh(z)} - \frac{1}{z} \quad (4.45)$$

である。なお、式 (4.44) に現れるゲージ場はゼロモード (4次元場) である。

4.3.2 KK モードからの計算

有効作用 $W[A] = -i \log Z[A]$ に CS 項 (4.38) があるとき、カレント期待値

$$\langle J_5^{(-)}(x, y) \rangle \sim \frac{\delta W[A]}{\delta A_5^{(-)}(x, y)} \quad (4.46)$$

がゼロでない値で残る。逆に、カレント期待値 $\langle J_5^{(-)}(x, y) \rangle$ を計算することで、CS 項 (4.38) に現れる係数関数 $u(y)$ が求められることが期待される。

文献 [63, 64] では、 $U(1)$ が1つの場合について三角グラフの計算から CS 項の係数を計算している。この場合、係数関数 $u(y)$ は

$$u(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_n} \phi_n^L(y) \phi_n^R(y) \quad (4.47)$$

と与えられる。ここで、 $\phi_n^{L/R}(y)$ は KK モード関数、 M_n は KK モードの質量である。三角グラフの計算については付録 E でレビューする。また、係数関数 $u(y)$ が一種の Green 関数であることを D で示す。

上の結果を、gGHU 模型のセットアップで利用することを考える [77]。式 (4.3) で示したように、求めたい CS 項は

$$\mathcal{O}^{(-)} A_5^{(1)} F_{\mu\nu}^{(1)} \tilde{F}_D^{\mu\nu} - A_5^{(2)} F_{\mu\nu}^{(2)} \tilde{F}_D^{\mu\nu} \quad (4.48)$$

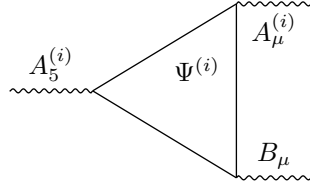


図 4.1 カレント期待値 $\langle J_5^{(i)} \rangle$ に寄与する三角グラフ

の組み合わせに含まれる。この各項では 1 と 2 が混ざらないため、それぞれ三角グラフ (図 4.1) が計算できる。したがって $U(1)$ が 1 つだけの場合の結果 (4.47) を利用できる。ただし、混合アノマリーを考えているので、係数が 2 倍ずれることに注意が必要である。そこで、CS 項を

$$\mathcal{L}_{\text{CS}}^{(i)}(y) = -\frac{2}{32\pi^2} u^{(i)}(y) A_5^{(i)} F^{(i)} \tilde{F}_D = -\frac{2}{32\pi^2} u^{(i)}(y) \mathcal{O}^{(i)} \quad (4.49)$$

と書き、混合アノマリーの 2 倍を前に付けておく。CS 項の係数 $u^{(i)}(y)$ は

$$u^{(i)}(y) = \sum_n \frac{1}{M_n} \xi_{n,L}^{(i)}(y) \xi_{n,R}^{(i)}(y) \quad (4.50)$$

と書ける。ここで、 $i = 1, 2$ で、 $\xi_{n,L/R}^{(i)}(y)$ は KK モード関数、 M_n は KK 質量とする。

$i = 1, 2$ について和を取って組み替えると、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{CS-like}}^{(1)} + \mathcal{L}_{\text{CS-like}}^{(2)} &= -\frac{2}{32\pi^2} \frac{u^{(1)} - u^{(2)}}{2} \left[\mathcal{O}^{(1)} - \mathcal{O}^{(2)} \right] \\ &\quad - \frac{2}{32\pi^2} \frac{u^{(1)} + u^{(2)}}{2} \left[\mathcal{O}^{(1)} + \mathcal{O}^{(2)} \right] \end{aligned} \quad (4.51)$$

と書ける。supersoft 項のために必要なのは右辺第 1 項の $\mathcal{P}_{\text{ex,odd}}$ な組み合わせであるので、

$$u^{(-)}(y) \equiv \frac{u^{(1)} - u^{(2)}}{2} \quad (4.52)$$

を求めればよい。

そこで、KK モード関数 $\xi_{n,L/R}^{(i)}(y)$ を求める。まず、 $a = 0$ の場合の (massive) KK モードの一般解 (4.14) について、境界条件 (4.22), (4.23) から未定係数を決めていく。境界条件から係数の条件が読み取れる:

$$\xi_{n,R}^{(+)}(0) = 0: \quad B_{n,R}^{(1)} + B_{n,R}^{(2)} = 0, \quad (4.53a)$$

$$\xi_{n,R}^{(-)}(0) = 0: \quad B_{n,R}^{(1)} - B_{n,R}^{(2)} = 0, \quad (4.53b)$$

$$\xi_{n,R}^{(+)}(\pi R) = 0: \quad (A_{n,R}^{(1)} + A_{n,R}^{(2)}) \sin(\omega_n \pi R) = 0, \quad (4.53c)$$

$$\xi_{n,R}^{(-)}(\pi R) = 0: \quad (A_{n,R}^{(1)} - A_{n,R}^{(2)}) \sin(\omega_n \pi R) = 0. \quad (4.53d)$$

式 (4.53a), (4.53b) より、 $B_{n,R}^{(1)} = B_{n,R}^{(2)} = 0$ である。 $\sin(\omega_n \pi R) \neq 0$ のとき、残りの式から $A_{n,R}^{(1)} = A_{n,R}^{(2)} = 0$ となる。このとき式 (4.16a), (4.16b) より、 $A_{n,L}^{(1)} = A_{n,L}^{(2)} = 0$, $B_{n,L}^{(1)} = B_{n,L}^{(2)} = 0$ と自明な解となる (規格化を満たさない)。 $\sin(\omega_n \pi R) = 0$ のとき、 $\omega_n = n/R$ が得られる ($n > 0$)。これはもちろん、式 (4.35) で求めたスペクトルと一致している。KK モードは

$$\xi_{n,R}^{(i)} = A_{n,R}^{(i)} \sin\left(\frac{n}{R}y\right), \quad (4.54a)$$

$$\xi_{n,L}^{(i)} = \frac{A_{n,R}^{(i)}}{m_n} \left[m_i \sin\left(\frac{n}{R}y\right) + \frac{n}{R} \cos\left(\frac{n}{R}y\right) \right] \quad (4.54b)$$

となる。未定係数が $A_{n,R}^{(i)}$ と 2 つあり、これは KK タワーが 2 つあることに対応している。独立解を

$$\begin{cases} A_{n,R}^{(1)} \equiv A_n \\ A_{n,R}^{(2)} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} A_{n,R}^{(1)} = 0 \\ A_{n,R}^{(2)} \equiv A'_n \end{cases} \quad (4.55)$$

ととると、規格化条件 (4.26) から、 $A_n^2 = (A'_n)^2 = 2/(\pi R)$ となる。まとめると、KK モードは

$$\xi_{n,R}^{(i)} = \sqrt{\frac{2}{\pi R}} \sin\left(\frac{n}{R}y\right), \quad (4.56a)$$

$$\xi_{n,L}^{(i)} = \frac{\sqrt{2}}{m_n \sqrt{\pi R}} \left[m_i \sin\left(\frac{n}{R}y\right) + \frac{n}{R} \cos\left(\frac{n}{R}y\right) \right] \quad (4.56b)$$

と書ける。ここで、 $m_1 = -m_2 = m$ 、 $M_n^2 = m^2 + (n/R)^2$ である。

求めたい CS 項の係数は、

$$u^{(-)}(y) \equiv \frac{u^{(1)} - u^{(2)}}{2} = \frac{m}{\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^2} \sin^2\left(\frac{n}{R}y\right) \quad (4.57)$$

である。ここで、全体が m に比例していることに注目したい。 m はもともと \mathbb{Z}_2^{ex} を破るようなバルクフェルミオンの質量として導入した。 m を 0 に取ると、求めたい CS 項の係数は 0 になることから、質量項 (4.7) を導入しないと求めたい CS 項は生成されないことが分かる。

式 (4.57) の無限和を実行したい。第 1 項は

$$\begin{aligned} \frac{m}{\pi R} \sum_n \frac{1}{M_n^2} \sin^2\left(\frac{n}{R}y\right) &= \frac{m}{\pi R} \sum_n \frac{1}{m^2 + (n/R)^2} \frac{1 - \cos\left(\frac{2ny}{R}\right)}{2} \\ &= \frac{mR}{2\pi} \sum_n \left[\frac{1}{(mR)^2 + n^2} - \frac{\cos\left(n\frac{2y}{R}\right)}{(mR)^2 + n^2} \right] \end{aligned} \quad (4.58)$$

と変形できる。ここで、以下の計算で用いる公式を文献 [78] の pp.67, 78 より引用する:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + n^2} = \frac{\pi}{2a} \coth(a\pi) - \frac{1}{2a^2}, \quad (4.59a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{a^2 + n^2} = \frac{\pi}{2a} \frac{\cosh(a(\pi - x))}{\sinh(a\pi)} - \frac{1}{2a^2} \quad [0 \leq x \leq 2\pi]. \quad (4.59b)$$

この公式を用いると、

$$(4.58) = \frac{1}{4} \left[\coth(m_- \pi R) - \frac{\cosh(m_- \pi R - 2m_- y)}{\sinh(m_- \pi R)} \right] \quad (4.60)$$

となる。これは少し変形すると、

$$\begin{aligned} u^{(-)}(y) &= \frac{1}{4} \left[\coth(m_- \pi R) - \frac{\cosh(m_- \pi R - 2m_- y)}{\sinh(m_- \pi R)} \right] \\ &= \frac{1}{\sinh(m_- \pi R)} \left[\cosh(m_- \pi R) - \cosh(2m_- y - m_- \pi R) \right] \\ &= \frac{2 \sinh(mx^5) \sinh[m(\pi R - x^5)]}{\sinh(m\pi R)} \end{aligned} \quad (4.61)$$

となり、ゼロモードから計算した係数関数 (4.43) と一致する [77]。

4.4 ゲージノ質量

求めた CS 項の係数 (4.44) から、ゲージノのディラック質量の大きさを見積もる [65]。

ここまでの計算は $U(1)$ の場合について行ったので、 $SU(5)$ への拡張が必要である。拡張は、式 (4.44) で電荷 q を群論的因子 $\text{tr}(t_{\mathbf{R}}^a) t_{\mathbf{R}}^b = T(\mathbf{R}) \delta^{ab}$ と置き換えれば良い。ただし、 $t_{\mathbf{R}}^a$ は $SU(5)$ の表現 \mathbf{R} における生成子とする。結果は次のように書ける:

$$\mathcal{L}_{\text{CS}}^{4d} = \frac{2T(\mathbf{R})g_G^2 q_D g_D}{16\pi^2} \pi R f(m\pi R) A_5^{(-)} F_{\mu\nu}^{(+)} \tilde{F}_D^{\mu\nu}(x). \quad (4.62)$$

ここで、 g_G と g_D は $SU(5)_G \times U(1)_D$ の 4 次元でのゲージ結合定数、 q_D はメッセンジャーフェルミオンの $U(1)_D$ 電荷である。また、関数 $f(z)$ は式 (4.44) と同じ

$$f(z) = \frac{1}{\tanh z} - \frac{1}{z} \quad (4.63)$$

である。

ここで、バルク質量 m の依存性について考える。 m の依存性は全て関数 $f(m\pi R)$ に含まれている。 m が小さいときは、 $f(m\pi R) \sim (m\pi R)/3$ であり、 m が大きいときは、 $f(m\pi R) \rightarrow 1$ となる。したがって、CS 項の係数は典型的にはコンパクト化の半径の逆数のオーダーであるが、 m が小さい場合には係数が抑制される。 m が 0 の場合は係数も 0 になる。つまり、 P_{ex} なバルク質量項を導入しないと欲しい CS 項は生成されない。結局、gGHU 模型を拡張したセットアップを考えると、ディラック・ゲージノ質量に対応する CS 項が確かに生成された。

次に、求めた係数からゲージノの Dirac 質量を読み取ることを考える。そのために、supersoft 項をゲージ結合をあらわに書いた形

$$\mathcal{L}_{\text{supersoft}}^{4d} = \frac{C_A g_A^2 g_D}{\Lambda} \int d^2\theta \sqrt{2} \Phi^a W_\alpha^a W_D^{\dot{a}} \quad (4.64)$$

に書き換える。ここで、 Λ はこの項が生成されるスケール、 C_A は適当な係数、 g_A と g_D はそれぞれ群 G_A と $U(1)_D$ のゲージ結合定数とする。この表記のもとで、ゲージノ質量は

$$m_{DA} = C_A g_A^2 \frac{g_D \langle D_D \rangle}{\Lambda} \quad (4.65)$$

書ける。gGHU 模型のセットアップでは、 $\Lambda = M_{\text{GUT}} = 1/R$ と取るので、係数 C_A は

$$C_A = \frac{2T(\mathbf{R})q_D}{16\pi} f(m\pi R) \quad (4.66)$$

となる。 C_A は標準模型のゲージ群に対して全て等しい値になっている。ゲージノ質量は C_A に比例しているので、ゲージノ質量も標準模型の各ゲージ群に対して等しい値で生成される。この結果はバルクと境界の混合質量 μ_p が十分大きい極限における結果である。 μ_p が有限の場合については、Wilson 線積分の位相部分 a に依存したゲージノ質量が得られることが期待される。

最後に、ゲージノ質量のスケールを見積もる。ゲージ結合定数は $\mathcal{O}(1)$ 、 $M_{\text{GUT}} = 1/R = \mathcal{O}(10^{16} \text{GeV})$ 、 $\sqrt{\langle D_D \rangle} = \mathcal{O}(10^{12} \text{GeV})$ とすると、

$$m_D \sim 10^3 \text{GeV} \left(\frac{\sqrt{\langle D_D \rangle}}{10^{12} \text{GeV}} \right)^2 \left(\frac{m}{10^{12} \text{GeV}} \right) \quad (4.67)$$

と見積もることができる。したがって、以上のパラメータの取り方の下で、TeV スケールのディラック・ゲージノが可能であることが分かる。また、中間スケールを得るためには $\sqrt{\langle D_D \rangle} = \mathcal{O}(10^{14} \text{GeV})$ と大きな超対称性の破れが必要となる。

第 5 章

まとめと今後の展望

本論文では、グランドゲージ・ヒッグス統一模型 (gGHU 模型) に基づいて、ディラックゲージノ模型の構成に必要な、軽い随伴表現場と supersoft 項が導けることを示した。ゲージノが Dirac 質量項を持つためには、ゲージノの Dirac パートナーを含む随伴表現場と、質量項を生成する supersoft 項が必要である。gGHU 模型では、 $SU(5)$ の破れに細谷機構を適用するため、ゲージ場の余剰次元方向成分のゼロモードとして、軽い随伴スカラー場が予言される。gGHU 模型を超対称化すると、随伴表現のカイラル超場が得られ、これがゲージノの Dirac パートナーを含む随伴表現場と同定できる。さらに、5 次元模型を考えたことから、supersoft 項は 1 種の超対称 Chern-Simons 項であると見なせる。本研究では、具体的なセットアップを与えて、CS 項の係数が計算できることを示した。

supersoft 項に対応する CS 項を生成するためのセットアップとして、gGHU 模型に対する拡張を考えた。1 つ目の拡張は超対称性の破れに対応する $U(1)_D$ 対称性を追加することである。2 つ目は CS 項の生成するための場として、メッセンジャーフェルミオンと境界フェルミオンを追加することである。フェルミオンのアノマリーを通じて生成される CS 項を考えた。supersoft 項に対応する CS 項は、2 つの $SU(5)$ の入れ替え対称性 Z_2^{ex} を破るような組み合わせになっているため、そのソースとして、 $P_{\text{ex-odd}}$ なメッセンジャーフェルミオンの質量項を考えた。実際、得られた CS 項の係数はバルク質量 m の関数であり、 $m \rightarrow 0$ の極限でこの係数は 0 になることから、バルク質量項を導入しないと欲しい CS 項は生成されないことが分かる。

ここでの注意点は、欲しい CS 項や新しく加えたバルク質量項は 5 次元パリティについても P_5 -odd ということである。gGHU 模型でのオービフォルドコンパクト化は、 P_5 と P_{ex} を同時に作用させたときの境界条件を考えている。欲しい CS 項や新しく加えたバルク質量項は $P_5 \times P_{\text{ex-even}}$ (あるいは Z_2^{comb} 不変) であるため、オービフォルドコンパクト化と矛盾しない。

フェルミオンのアノマリーが有効的に生成する CS 項の係数は 2 通りの計算方法がある。1 つ目の方法はアノマリー流入を利用した方法であり、ゼロモードのバルクへの広がりから CS 項の係数が計算できる。オービフォルド上のアノマリーは、バルクには存在せず、固定点上に局在することが知られている。一方で、フェルミオンの massless ゼロモードが作るアノマリーはゼロモード波動関数に比例してバルクに広がっているはずである。この広がったアノマリーを相殺するように、CS 項が生成される。したがって、フェルミオンゼロモード関数から CS 項の係数を求めることができる [65]。2 つ目の方法は KK モードを積分し、三角グラフを直接評価する方法である。このとき得られる CS 項の係数は、KK モード波動関数の足し上げとして与えられる。以上 2 つの方法での計算を行い、それらが同じ結果を与えることを示した [77]。

バルクフェルミオンだけでなく、境界フェルミオンも導入した。バルク質量項を導入すると、ゼロモードを持つ場が質量項を持ってしまい、massless ではなくなってしまう。境界フェルミオンを導入し、バルクフェルミオンとの混合質量 μ_p を考えることで massless ゼロモードを得ることができる。境界フェルミオンは、バルク場の境界条件を有効的に変更する効果があり、本研究では特に、 μ_p が無限大の極限を考えた。この極限では、得られる CS 項が Wilson 線積分 a に依存しない。これは、フェルミオンゼロモードがほとんどバルク場から成り、かつ、ゼロモードの電荷密度 $\rho(x^5)$ が位相 $e^{iax^5/R}$ に依らないためである。KK モードの立場から見ると、KK 質量のスペクトル

が $\mu_p \rightarrow \infty$ の極限で a に依存しないことが理由である。CS 項の係数が a に依存しないことは、(GUT スケールでの) ゲージノ質量が統一することに対応している。つまり、グルイーノ、ウィーノ、ビーノの質量が等しくなる。

上で述べたゲージノ質量の統一は自明ではなく、 μ_p が大きな極限でのみ成り立つという点に注意したい。なぜなら、gGHU 模型では $SU(5)$ の破れに細谷機構を適用している、つまり、 $SU(3)$ に対しては $e^{a\pi i} = +1$ 、 $SU(2)$ に対しては $e^{a\pi i} = -1$ となるような Wilson 線積分の VEV を考えるからである。実際、 μ_p が有限の場合を考えると、 a に依存したゲージノ質量が得られると期待される。

現象論的には、ゲージノ質量が統一するかどうかは、TeV スケールシナリオにおいても、中間スケールシナリオにおいても重要である。例えば陽子崩壊を考えるためには、ゲージノ質量の質量スペクトルを求め、ゲージ大統一のスケールを決める必要がある。陽子崩壊の寿命を予言するためには他にも、物質場 (特に第 1 世代のクォーク・レプトン) を余剰次元のどこに置くかなど、模型のセットアップに依存することが知られており [39]、さらなる研究が必要である。

本研究の重要な仮定の 1 つは、 \mathbb{Z}_2^{ex} の破れを含む項がメッセンジャーフェルミオンの質量項 (4.7) のみであるとしたことである。一般的には、 \mathbb{Z}_2^{ex} を破るような項は他にも考えられる。例えば裸の CS 項や Higgs 場の質量項である。Higgs 場の $P_5^{\text{ex-odd}}$ な質量項を導入すると、Higgs 二重項に対して質量が与えられ、gGHU 模型の利点である DT 分離を損なうことになってしまう。したがって、Higgs セクターに対してはメッセンジャーセクターとの結合を持たないようにするか、持つとしても十分小さくなるように、工夫した模型構築が必要となる。

DT 分離に関連した別の問題は \mathbb{Z}_2^{ex} の破れが Wilson 線積分の VEV(3.17) に対して影響するかどうかという問題である。VEV がわずかにずれただけでも、DT 分離を損なうことになるためである。実際には、Wilson 線積分の VEV(3.17) は \mathbb{Z}_2^{ex} の破れに対して安定である。なぜかという、バルクフェルミオンの質量スペクトルを与える式 4.24 は Wilson 線積分 a の符号の反転 $a \rightarrow -a$ の下で不変だからである。このことは、 μ_p が有限の場合についても言える。

最後に、 \mathbb{Z}_2^{ex} の破れの起源について考える。1 つのアイディアは $U(1)_D$ に対しても対角埋め込み法を適用することである。つまり、ゲージ群として $U(1)_{D1} \times U(1)_{D2}$ を考え、 $\mathcal{P}_{\text{ex-even}}$ な対角部分群を $U(1)_D$ と同定する。 $\mathcal{P}_{\text{ex-odd}}$ な組み合わせを $U(1)_m$ 、そのゲージ場を $B_M^{(-)}$ と書き、余剰次元方向成分 $B_5^{(-)}$ (またはその実スカラーパートナー) が何らかの機構によって VEV をもったとする。このとき、 $U(1)_m$ と結合するフェルミオンに対する質量項は生成されるが、結合しないフェルミオンの質量項は生成されない。本研究においては、メッセンジャーフェルミオンのみが \mathbb{Z}_2^{ex} を破る質量項を持ち、Higgs 場に対しては \mathbb{Z}_2^{ex} を破る質量項はないということを仮定していた。 $U(1)_D$ に対しても対角埋め込み法を適用することで、この仮定を説明できると期待できる。この可能性についてはさらなる研究が必要である。

謝辞

本研究および本論文作成において、大変多くのご指導を頂きました中野博章准教授には心からの御礼と感謝を申し上げます。また、多くの議論をしていただきました北海道大学の瀬戸治様、愛知医科大学の山下敏史様へ感謝を申し上げます。また、ゼミや授業などを通してご指導して頂いた谷本盛光名誉教授、浅賀岳彦教授、江尻信司准教授へ御礼と感謝を申し上げます。研究のみならず、多くの点でサポートしてくださった研究室の皆様へ感謝いたします。

付録 A

\mathbb{Z}_2 変換と境界条件

この付録では、オービフォールドの境界条件について補足する。1つ目の補足は境界条件を課す変換についてである。オービフォールドを構成するための変換として、余剰次元方向に $2\pi R$ の並進と、2つの固定点 $y_0 = 0$, $y_1 = \pi R$ 周りの反転があるが、これら3つは独立ではない。したがって、一見異なる変換に対する境界条件を課していても、記述される理論は同じとなることがある。もう一つの補足は Wilson 線積分の VEV と境界条件についてである。同じ境界条件でも、Wilson 線積分の VEV が異なれば異なる理論を記述することがある。言い換えると、理論を指定するためには境界条件だけでなく Wilson 線積分の VEV も決める必要である。同じ理論を記述する境界条件と Wilson 線積分の組は、境界条件を変えるような“大きな”ゲージ変換の下で移り合う [69]。ゲージ変換と境界条件について、簡単な $U(1)$ の場合について考える。

A.1 オービフォールドの境界条件

第 3.1 節では、まず S^1 コンパクト化をしてから $y \sim -y$ と同一視をした。一方で第 3.1.1 節では固定点 $y_0 = 0$ と $y_1 = \pi R$ 周りでの \mathbb{Z}_2 変換を定義して同一視をした。これらが同じものであることを、文献 [79] に基づいて説明する。

余剰次元方向の並進変換 $T : y \mapsto y + 2\pi R$ と、2つの \mathbb{Z}_2 変換 $P_i : y_i - y \mapsto y_i + y$ ($i = 0, 1$) を定義する。これらの変換は互いに独立ではない。実際、 $TP_0 : \pi R - y \mapsto -\pi R + y \mapsto y + \pi R$ なので $TP_0 = P_1$ である。また、 $P_0^2 = P_1^2 = 1$ である。変換 T , P_i に対応する境界条件は3つのうち2つを決めると残りの1つは自動的に決まる。例として、バルク質量を持たないスカラー場 $\Phi(x, y)$ に対する境界条件

$$\Phi(x, -y) = P_0 \Phi(x, y), \quad \Phi(x, \pi R - y) = P_1 \Phi(x, \pi R + y) \quad (\text{A.1})$$

を考える。境界条件は $(P_0, P_1) = (+, +), (+, -), (-, +), (-, -)$ の4通りある。それぞれの KK モードは次のようにまとめられる。 $T = P_1 P_0$ と書くと、

$$T = +1 : \begin{cases} (+, +) : \cos\left(\frac{n}{R}y\right) \\ (-, -) : \sin\left(\frac{n}{R}y\right) \end{cases}, \quad T = -1 : \begin{cases} (+, -) : \cos\left(\frac{n+1/2}{R}y\right) \\ (-, +) : \sin\left(\frac{n+1/2}{R}y\right) \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

である。ここで、massless モードを持つのは $(P_0, P_1) = (+, +)$ の場合のみとなる。また、 $P_j = +$ は Neumann 条件、 $P_j = -$ は Dirichlet 条件に対応している。

フェルミオンに対する境界条件は

$$\Psi(x, y_j - y) = P_j \gamma_5 \Psi(x, y_j + y) \quad (\text{A.3})$$

なので、カイラリティに応じて境界条件が変わる。 $(+, +)$ の場合は R にのみ、 $(-, -)$ の場合は L にのみゼロモードが現れて、4次元のカイラルフェルミオンが得られる。

$U(1)$ ゲージ場の場合は運動項 $\mathcal{L} = -1/4F_{MN}F^{MN}$ を不変にするため、 A_μ と A_5 は符号が変わらなければならない。つまり、

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ A_5 \end{pmatrix} (x, y_j - y) = P_j \begin{pmatrix} A_\mu \\ -A_5 \end{pmatrix} (x, y_j + y) \quad (\text{A.4})$$

となり、 A_μ と A_5 で境界条件が変わる。 $(+, +)$ の場合は A_μ にのみ、 $(-, -)$ の場合は A_5 にのみゼロモードが現れる。非可換ゲージ場の場合 (例えば $SU(N)$ の場合) は P_j はゲージ群に属する ($P_j \in SU(N)$)。つまり P_j は行列になる。例えば、第 3.1.1 節では $P_1 = \text{diag.}(+1, +1, +1, -1, -1)$ を考えた。

A.2 ゲージ変換と境界条件

境界条件を変えるような“大きな”ゲージ変換をすると、Wilson 線積分の期待値 (または Aharonov-Bohm 位相 $\langle A_5 \rangle$) も変化する。ゲージ変換の下で理論は変わらないはずなので、理論の対称性を決めるためには、境界条件だけでなく Wilson 線積分の期待値も指定する必要がある。言い換えると、異なる境界条件と Wilson 線積分の期待値の組合わせが同じ対称性の破れを記述する場合があります、これを境界条件の同値類という [69]。本節では、簡単のため $U(1)$ の場合について、ゲージ変換の下で境界条件が変わることを文献 [80, 81] にしたがって確認する。

5次元ゲージ場 A_M と結合するフェルミオン Ψ を考え、次のような境界条件を課す:

$$A_M(x, y + 2\pi R) = A_M(x, y), \quad (\text{A.5a})$$

$$\Psi(x, y + 2\pi R) = e^{i\theta} \Psi(x, y). \quad (\text{A.5b})$$

ただし、 θ は定数とする。位相 $e^{i\theta}$ の影響で、フェルミオンの KK 質量は

$$m_n = \frac{n}{R} + \frac{\theta}{2\pi R} \quad (\text{A.6})$$

となる。ここで、 Ψ が周期境界条件を満たすように、次のようなゲージ変換を考える:

$$\Psi'(x, y) = e^{-i\frac{\theta}{2\pi R}y} \Psi(x, y). \quad (\text{A.7})$$

実際、変換後の Ψ' は位相の現れない周期境界条件

$$\Psi'(x, y + 2\pi R) = \Psi'(x, y) \quad (\text{A.8})$$

を満たす。ゲージ変換をしているだけなので、フェルミオンの KK 質量は変わらないはずであるが、一方で、境界条件からは θ の影響が消えているように見える。実際には、ゲージ場の余剰次元方向成分 A_y も変換されるということが重要となる。ゲージ変換のもとで、 A_y は

$$A'_y = A_y + \frac{\theta}{2\pi R} \quad (\text{A.9})$$

と変換される。ここで現れた $\frac{\theta}{2\pi R}$ はゲージ場の VEV $\langle A_y \rangle = \frac{\theta}{2\pi R}$ である。フェルミオンの KK 質量は5次元方向の共変微分 $D_y = i\partial_y + A_y$ から決まるので、変換後の Ψ' の KK 質量は

$$m'_n = \frac{n}{R} + \langle A_y \rangle = \frac{n}{R} + \frac{\theta}{2\pi R} \quad (\text{A.10})$$

となり、ゲージ変換前の KK 質量 (A.6) と確かに一致する。ゲージ場が VEV $\langle A_y \rangle$ をもつとき、Wilson 線積分の VEV は次のようになる:

$$W = \mathcal{P} \exp\left(i \int dy A_y\right) = \exp(i\theta). \quad (\text{A.11})$$

したがって、境界条件を変えるようなゲージ変換 (A.7) のもとでは、ゲージ場の余剰次元方向の期待値 $\langle A_y \rangle$ や Wilson 線積分の VEV が変化する。ゲージ変換の下で理論が変わらないことは、フェルミオンの KK 質量に着目することで確認した。なお、簡単のために $U(1)$ の場合を考えたが、実際には $U(1)$ の Wilson 線積分はゲージ不変であり、式 (A.9) のゲージ変換は周期境界条件を満たさない変換である。 $N \geq 2$ の $SU(N)$ へ拡張すると Wilson 線積分やゲージ場は共变的に変換することになる。また、ここでは S^1 の場合のみ考えたが、 S^1/\mathbb{Z}_2 オービフォールドを考えると、指定する境界条件が1つ増える。詳しい解説は文献 [81] を参照されたい。

付録 B

アノマリー流入と変形された Chern-Simons 項

この付録では、 $U(1)$ が 1 つの場合に対して、 S^1/\mathbb{Z}_2 オービフォルド上のアノマリーと CS 項の関係についてまとめる。 S^1/\mathbb{Z}_2 オービフォルド上のアノマリーは、オービフォルドの固定点上に局在する [62]。このことに対応して、フェルミオンゼロモードがバルクに広がって分布していると、ゼロモードが作るアノマリーを打ち消すように CS 項が生成される。このとき生成される CS 項は KK モードの寄与と解釈ができる。実際、直接フェルミオン KK モードを積分しても CS 項が得られ、その係数は KK モード関数の無限和の形で与えられる [63, 64]。ゼロモードから求めた CS 項の係数と KK モードから求めたものが一致することは、モード関数の完全性を用いて示すことができる。この付録の最後では、計算に必要な無限和の公式を手短に導出をする。

B.1 セットアップと記法

$U(1)$ の場合のゼロモードや KK モード関数についてまとめる。また、文献 [62] に従って、行列記法を導入する。

B.1.1 セットアップ

5次元オービフォルド時空上で、古典的な $U(1)$ ゲージ場と結合する 4成分フェルミオンの作用は

$$S = \int d^4x \int_{-\pi R}^{\pi R} dy \bar{\Psi}(x, y) [i\gamma^\mu D_\mu - \gamma_5 \partial_y - m(y)] \Psi(x, y) \quad (\text{B.1})$$

と書ける。共変微分は $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$ とし、簡単のために $A_5 = 0$ とおいた。固定点 $y_0 = 0$ および $y_1 = \pi R$ まわりにおける、5次元フェルミオン $\Psi(x, y)$ に対するオービフォルド条件を

$$\Psi(x, y_i - y) = \gamma_5 \Psi(x, y_i + y) \quad (\text{B.2})$$

とする。このとき、次のように KK モード展開できる:

$$\Psi_{R/L}(x, y) = \sum_{n \geq 0} \psi_n^{R/L}(x) \phi_n^{R/L}(y) . \quad (\text{B.3})$$

KK モード関数 $\phi_n^{(R/L)}(y)$ は次の運動方程式と正規直交条件を満たす:

$$[\pm \partial_y + m(y)] \phi_n^{R/L}(y) = M_n \phi_n^{L/R}(y) , \quad (\text{B.4})$$

$$\int_{-\pi R}^{\pi R} dy \phi_n^R(y) \phi_m^R(y) = \int_{-\pi R}^{\pi R} dy \phi_n^L(y) \phi_m^L(y) = \delta_{nm} . \quad (\text{B.5})$$

運動方程式 (B.4) では $\phi_n^{R/L}(y)$ が混ざっていることに注意する。展開係数 $\psi_n^{R/L}(x)$ は質量 M_n をもつ 4次元場である。オービフォルド条件 (B.2) より、モード関数 $\phi_n^{R(L)}(y)$ は固定点 $y = y_i$ ($i = 0, 1$) に対して (反) 対称な関数となる。つまり、

$$\phi_n^R(y_i - y) = +\phi_n^R(y_i + y) , \quad \phi_n^L(y_i - y) = -\phi_n^L(y_i + y) . \quad (\text{B.6})$$

特に、ゼロモードを考えると、 $\phi_0^R(y)$ は条件 (B.6) を満たすが、 $\phi_0^L(y)$ は満たせない。

具体的に、フェルミオン質量がキルク質量

$$m(y) = -m(-y) = m \quad (\text{B.7})$$

である場合を考える。 m は定数とする。まず、 $M_n = 0$ であるゼロモードを求める。オビフォルドの基本領域 $0 \leq y \leq \pi R$ で考えると、運動方程式 (B.4) から、

$$\phi_0^{R/L}(y) = C_{R/L} e^{\mp my} \quad (\text{B.8})$$

と求められる。 S^1 上の規格化条件 (B.5) を用いて規格化定数 $C_{R/L}$ を決めると、

$$\phi_0^R(y) = \sqrt{\frac{m}{1 - e^{-2m\pi R}}} e^{-m|y|}, \quad \phi_0^L(y) = \sqrt{\frac{m}{e^{2m\pi R} - 1}} e^{+m|y|} \quad (\text{B.9})$$

となる。ただし、 $\phi_0^L(y)$ は境界条件 (B.6) を満たせず、 $\phi_0^R(y)$ のみが生き残る。次に、 $n \neq 0$ モード関数を求める。運動方程式 (B.4) から

$$[-\partial_y^2 + m^2] \phi_n^{R/L}(y) = M_n^2 \phi_n^{R/L}(y) \quad (\text{B.10})$$

となる。したがってモード関数の一般解は

$$\phi_n^{R/L}(y) = A_{n,R/L} \sin(\omega_n y) + B_{n,R/L} \cos(\omega_n y) \quad (\text{B.11})$$

の形である。ここで、 $\omega_n^2 = M_n^2 - m^2$ とおいた。オビフォルドの条件 (B.6) から、 $\phi_n^L(y)$ は固定点 $y = 0, \pi R$ 周りで Dirichlet 境界条件

$$\phi_n^L(0) = \phi_n^L(\pi R) = 0 \quad (\text{B.12})$$

を満たすことがわかる。この境界条件の下で式 (B.11) の係数を決めると、規格化された $n \neq 0$ モード関数は

$$\phi_n^L(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sin\left[\frac{ny}{R}\right], \quad (\text{B.13a})$$

$$\phi_n^R(y) = \frac{1}{M_n \sqrt{\pi R}} \left\{ m \sin\left[\frac{ny}{R}\right] - \frac{n}{R} \cos\left[\frac{ny}{R}\right] \right\} \quad (\text{B.13b})$$

と求められる。

B.1.2 行列記法

次の行列記法 [62] を導入する:

$$(\psi)_n(x) = \psi_n(x), \quad (\text{B.14a})$$

$$\left(\mathcal{A}^{\mu Rk/L}\right)_{nm}(x) = \mathcal{A}_{nm}^{\mu Rk/L}(x) = \int_{-\pi R}^{\pi R} dy \phi_n^{R/L}(y) \phi_m^{R/L}(y) A^\mu(x, y), \quad (\text{B.14b})$$

$$(M)_{nm} = M_n \delta_{nm}. \quad (\text{B.14c})$$

ただし、 $n, m = 0, 1, 2, \dots$ とする。 $\Psi(x, y)$ の KK モード展開を式 (B.1) に代入し、 y 積分を実行すると、作用は 4次元積分として次のように書ける:

$$S = \int d^4x [\bar{\psi}_R(i\mathcal{D}_R)\psi_R + \bar{\psi}_L(i\mathcal{D}_L)\psi_L - (\bar{\psi}_R M \psi_L + \bar{\psi}_L M \psi_R)]. \quad (\text{B.15})$$

ここで、 $\mathcal{D}_{R/L} = \not{\partial} - i\mathcal{A}_{R/L}$ とおいた。同様に、KK モード展開を使って $U(1)$ カレントを書き下すと、

$$\begin{aligned} J^\mu(x, y) &= \bar{\Psi}(x, y) \gamma^\mu \Psi(x, y) \\ &= \sum_{nm} [\phi_n^R(y) \phi_m^R(y) \bar{\psi}_{n,R}(x) \gamma^\mu \psi_{m,R}(x) + \phi_n^L(y) \phi_m^L(y) \bar{\psi}_{n,L}(x) \gamma^\mu \psi_{m,L}(x)], \end{aligned} \quad (\text{B.16a})$$

$$\begin{aligned} J^5(x, y) &= \bar{\Psi}(x, y) i\gamma^5 \Psi(x, y) \\ &= \sum_{nm} [\phi_n^L(y) \phi_m^R(y) \bar{\psi}_{n,L}(x) \gamma^\mu \psi_{m,R}(x) - \phi_n^R(y) \phi_m^L(y) \bar{\psi}_{n,R}(x) \gamma^\mu \psi_{m,L}(x)]. \end{aligned} \quad (\text{B.16b})$$

を得る。ここで、行列 $\Xi_{nm}(y), \Omega_{nm}(y)$ を、

$$\Xi(y) = \Xi^R(y)P_R + \Xi^L(y)P_L, \quad \left[\Xi^{R/L}(y) \right]_{nm} = \phi_n^{R/L}(y)\phi_m^{R/L}(y), \quad (\text{B.17a})$$

$$\Omega(y) = \Omega^R(y)P_R + \Omega^L(y)P_L, \quad \left[\Omega^{R/L}(y) \right]_{nm} = \phi_n^{L/R}(y)\phi_m^{R/L}(y) \quad (\text{B.17b})$$

と定義する。これを使うと、カレントは行列記法で

$$J^\mu(x, y) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\Xi(y)\psi(x), \quad J^5(x, y) = \bar{\psi}(x)i\gamma_5\Omega(y)\psi(x) \quad (\text{B.18})$$

と書ける。また、後の議論のために、次の4次元カレントを定義する:

$$j_{L/R_{nm}}^\mu(x) = \bar{\psi}_n^{R/L}(x)\gamma^\mu\psi_m^{R/L}(x), \quad j_{nm}^5(x) = \bar{\psi}_n^L(x)\psi_m^R(x) - \bar{\psi}_m^R(x)\psi_n^L(x). \quad (\text{B.19})$$

これを用いると、5次元カレントは

$$J^\mu(x, y) = \sum_{nm} \left[\Xi_{nm}^R(y)j_{Rnm}^\mu(x) + \Xi_{nm}^L(y)j_{Lnm}^\mu(x) \right], \quad J^5(x, y) = i \sum_{nm} \phi_n^L(y)\phi_m^R(y)j_{nm}^5(x) \quad (\text{B.20})$$

と書ける。

B.2 変形された Chern-Simons 項

本節では KK モードを積分して CS 項を生成することを考える。このとき生成される CS 項の係数は KK モードの和として与えられる [63, 64]。

具体的には、係数に 5 次元方向の座標に依存した関数 $u(y)$ を含むような形の CS 項

$$\Gamma_{\text{CS}} = \int d^4x \int_{y_0}^{y_1} dy u(y) \frac{1}{16\pi^2} A_5 F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (\text{B.21})$$

を考える。これを、文献 [64] にしたがって、変形された CS 項と呼ぶ。変形された CS 項が有効作用に含まれるとき、カレントの期待値は非ゼロで残る:

$$\langle J^5(x, y) \rangle \propto \frac{\delta\Gamma[A]}{\delta A_5(x, y)}. \quad (\text{B.22})$$

逆に、 $\langle J^5(x, y) \rangle$ を計算することで式 (B.21) 中の $u(y)$ を求められる [63, 64]。なお、このような変形された CS 項はオービフォルド上のアノマリイと関係がある。この点については次節で議論する。

作用として式 (B.1) を考え、キルク質量 (B.7) をもつフェルミオンカレントの余剰次元方向成分 J^5 を考える。KK モード展開をすると、式 (B.16b), (B.17b) より、

$$\langle J^5(x, y) \rangle = i \sum_{mn} \phi_m^L(y)\phi_n^R(y) \langle j_{mn}^5(x) \rangle \quad (\text{B.23})$$

と書ける。ここで、 $j_{mn}^5(x)$ は式 (B.19) で定義した。また、簡単のため、ゲージ場は余剰次元方向について定数とする。この仮定は、ゲージ場のゼロモードを考えていると言い換えることもできる。この仮定のもとで、行列表記した 4 次元ゲージ場は式 (B.14b) と式 (B.5) より、

$$A_{\mu mn}^{R/L}(x) = \int dy \phi_n^{R/L}(y)\phi_m^{R/L}(y)A_\mu(x) = \delta_{nm}A_\mu(x) \quad (\text{B.24})$$

と、対角的になる。式 (B.15) のうち、相互作用項はカレントを用いて、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} &= \sum_{nm} (j_{Lnm}^\mu \mathcal{A}_{\mu nm}^L + j_{Rnm}^\mu \mathcal{A}_{\mu nm}^R) \\ &= \sum_{nm} (j_L^\mu + j_R^\mu)_{mn} \delta_{nm} A_\mu(x) = \sum_n \bar{\psi}_n \gamma^\mu \psi_n A_\mu(x) \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

と書ける。このとき、三角グラフの計算から、 $\langle j_{5mn}(x) \rangle$ は次のように求められる：

$$\langle j_{5mn}(x) \rangle = -i\delta_{mn} \frac{1}{32\pi^2 M_n} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}(x) . \quad (\text{B.26})$$

計算については第 B.4 節で示す。式 (B.23) に代入すると、

$$\langle J^5(x, y) \rangle = -\frac{1}{16\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} u(y)$$

となる。ここで係数関数 $u(y)$ は

$$u(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_n} \phi_n^L(y) \phi_n^R(y) \quad (\text{B.27})$$

というモード関数の無限和の形で与えられる。式 (B.23) より、 $\langle J^5(x, y) \rangle$ に $-A_5(x, y)$ を掛けると、

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{1}{16\pi^2} u(y) A_5(x, y) F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}(x, y) \quad (\text{B.28})$$

となり、有効作用に現れる変形された Chern-Simons 項が得られた。

具体的に、キルク質量 (B.7) のフェルミオンの KK モード関数 (B.13) を代入する：

$$u(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_n} \phi_n^L(y) \phi_n^R(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi R M_n^2} \left[m(y) \sin^2\left(\frac{ny}{R}\right) + \frac{n}{R} \sin\left(\frac{ny}{R}\right) \cos\left(\frac{ny}{R}\right) \right] . \quad (\text{B.29})$$

実際に $u(y)$ の無限和をそれぞれ実行して具体形を求める。まず、以下の計算で用いる公式を文献 [78] の pp.67, 78 より引用する：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + n^2} = \frac{\pi}{2a} \coth(a\pi) - \frac{1}{2a^2} , \quad (\text{B.30a})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{a^2 + n^2} = \frac{\pi}{2a} \frac{\cosh(a(\pi - x))}{\sinh(a\pi)} - \frac{1}{2a^2} \quad [0 \leq x \leq 2\pi] , \quad (\text{B.30b})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin(nx)}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2} \frac{\sinh(a(\pi - x))}{\sinh(a\pi)} \quad [0 < x < 2\pi] . \quad (\text{B.30c})$$

区間 $[0, \pi R]$ で式 (B.29) の第 1 項は

$$\begin{aligned} \frac{m}{\pi R} \sum_n \frac{1}{M_n^2} \sin^2\left(\frac{n}{R}y\right) &= \frac{m}{\pi R} \sum_n \frac{1}{m^2 + \left(\frac{n}{R}\right)^2} \frac{1 - \cos\left(\frac{2ny}{R}\right)}{2} \\ &= \frac{mR}{2\pi} \sum_n \left[\frac{1}{(mR)^2 + n^2} - \frac{\cos\left(n\frac{2y}{R}\right)}{(mR)^2 + n^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

と変形できる。ここで公式 (B.30a), (B.30b) を用いると、次のように計算できる：

$$(\text{B.31}) = \frac{1}{4} \left[\coth(m\pi R) - \frac{\cosh(m\pi R - 2my)}{\sinh(m\pi R)} \right] . \quad (\text{B.32})$$

同様に式 (B.29) の第 2 項は

$$\frac{1}{\pi R} \sum_n \frac{1}{M_n^2} \frac{n}{R} \sin\left(\frac{n}{R}y\right) \cos\left(\frac{n}{R}y\right) = \frac{1}{2\pi} \sum_n \frac{n \sin\left(\frac{2ny}{R}\right)}{(mR)^2 + n^2} \quad (\text{B.33})$$

と変形できる。ここで公式 (B.30c) を用いると、次のように計算できる：

$$(\text{B.33}) = \frac{1}{4} \frac{\sinh(m\pi R - 2my)}{\sinh(m\pi R)} . \quad (\text{B.34})$$

よって $[0, \pi R]$ では以下のようにまとめられる:

$$u(y) = \frac{1}{4} \left[\coth(m\pi R) - \frac{\cosh(m\pi R - 2my)}{\sinh(m\pi R)} + \frac{\sinh(m\pi R - 2my)}{\sinh(m\pi R)} \right]. \quad (\text{B.35})$$

一方, $[-\pi R, \pi R]$ では全体に符号関数 $\text{sgn}(y)$ が掛かる:

$$u(y) = \frac{\text{sgn}(y)}{4} \left[\coth(m\pi R) - \frac{\cosh(m\pi R - 2m|y|)}{\sinh(m\pi R)} + \frac{\sinh(m\pi R - 2m|y|)}{\sinh(m\pi R)} \right]. \quad (\text{B.36})$$

式 (B.36) は $m\pi R \rightarrow \infty$ で符号関数に近づき, バルクでは定数となる。また, 微分は固定点 $y = 0$ と $y = \pi R$ に局在し, 互いに符号が逆になる。一方, この極限では式 (B.9) で与えたゼロモード波動関数 ϕ_0^R は原点 $y_0 = 0$ に局在することが分かる。次節で見ると, これは単純な場合のアノマリー流入を表している。

一方で, $m\pi R \rightarrow 0$ の極限でも CS 項が生成される¹。上述の CS 項 (B.35) は, 第 4.3.2 節で求めた CS 項 (4.60) と比較すると, 第 3 項が付け加わっている。言い換えると, 式 (B.35) の第 3 項は $m \rightarrow -m$ の下で符号を変えない部分である。第 1, 2 項は $m = 0$ で 0 となるので, 第 3 項のみ考えることにする:

$$\left. \frac{\sinh(m\pi R - 2my)}{\sinh(m\pi R)} \right|_{m=0} = \left. \frac{\frac{\partial}{\partial m} \sinh(m\pi R - 2my)}{\frac{\partial}{\partial m} \sinh(m\pi R)} \right|_{m=0} = 1 - \frac{2y}{\pi R}. \quad (\text{B.37})$$

したがって, $m = 0$ で生成される CS 項の係数はバルク上で線形な関数となっている。 $m = 0$ のとき, ゼロモードはバルク上で一定となる平坦な分布になっており, この場合も確かにアノマリーの流入を表している。

B.3 アノマリー流入

S^1/\mathbb{Z}_2 オービフォールド上のアノマリーは 5 次元バルクには存在せず, オービフォールドの固定点 $y_0 = 0, y_1 = \pi R$ 上に局在する [62]。このことから, フェルミオンのゼロモードが存在すると CS 項が生成されることを説明する。

まず, アノマリーと CS 項の関係を示す最も単純な例として, フェルミオンゼロモードが $y_0 = 0$ に局在している場合を考える。このとき, 対応するアノマリーは $y_0 = 0$ だけに局在している。一方で, S^1/\mathbb{Z}_2 オービフォールド上のアノマリーは両側の固定点 $y_0 = 0, y_1 = \pi R$ 上に等しく局在する [62]。したがって, $y_0 = 0$ から $y_1 = \pi R$ へのアノマリーの流入があるはずである。実際, このような流入は CS 項によって引き起こされる。CS 項のゲージ変換は全微分であるから, S^1/\mathbb{Z}_2 上では表面項が残る。この表面項はフェルミオンゼロモードが作るアノマリーと同じ形をしており, また, 表面項であるので $y_0 = 0$ と $y_1 = \pi R$ で互いに逆符号となる。つまり, CS 項の変分が, アノマリー流入を表している。

次に, 一般化として, フェルミオンのゼロモードが電荷密度 $\rho(y)$ に比例してバルクに広がっている場合を考える。このとき, ゼロモードが作るアノマリーは $\rho(y)$ に比例してバルクに広がる:

$$\delta_g \Gamma_{\text{ZM}} = \int d^4x \int_{y_0}^{y_1} dy \rho(y) \frac{1}{16\pi^2} \alpha(y) F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}. \quad (\text{B.38})$$

ここで, $\alpha(y)$ はゲージ変換パラメータとする。この場合も CS 項がアノマリーの流入を表すが, 係数が 5 次元座標に依存したものになる。これを, 先行研究 [64] にしたがって, 変形された CS 項と呼ぶ。係数関数 $u(y)$ はゼロモードのアノマリーを相殺するように決める。ゲージ変換 $\delta_g A_5 = \partial_y \alpha(y)$ のもとで有効作用 (B.21) は

$$\delta_g \Gamma_{\text{CS}} = + \int d^4x \int_{y_0}^{y_1} dy \partial_y u(y) \frac{g^2}{16\pi^2} \alpha F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} - \int d^4x \left[u(y) \frac{g^2}{16\pi^2} \alpha F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \right]_{y_0}^{y_1} \quad (\text{B.39})$$

¹ 第 4.3.2 節では, 導入したバルク質量を 0 にとると, 生成された CS 項の係数も 0 になっていた。つまり, \mathbb{Z}_2^{ex} の破れの源を導入しないと, 欲しい CS 項は生成されなかった。一方で, 本付録で扱う $U(1)$ が 1 つの場合は, \mathbb{Z}_2^{5d} を破る源に対応するのはキルク質量 (B.7) である。しかし, $m = 0$ としてキルク質量を導入しない場合にも CS 項は生成される。これは, 正則化と関係があると考えられる。例えば, Pauli-Villars(PV) 正則化を考えると, PV 場の質量項が必要となるが, オービフォールド上でフェルミオン質量項を持たせるためにはキルク質量を考えることになる。つまり, 元の作用に \mathbb{Z}_2^{5d} の破れの寄与を加えなくても, 正則化のために \mathbb{Z}_2^{5d} を破る必要があるため, $m = 0$ でも CS 項が生成されると解釈できる。

と変換する。したがって、ゼロモードの寄与を相殺するには、

$$\partial_y u(y) = -\rho(y) \quad (\text{B.40})$$

とし、境界条件として

$$u(y_1) = -u(y_0) = \frac{1}{2} \mathcal{A} \equiv \frac{1}{2} \int_{y_0}^{y_1} dy \rho(y) \quad (\text{B.41})$$

と決めればよい。 \mathcal{A} は境界上での全アノマリーの大きさである。最右辺の積分はゼロモードの規格化条件となっているので、 $\mathcal{A} = 1$ である。したがって、オービフォルド上のアノマリーはフェルミオンゼロモードの形に依存しない。

ここで、式 (B.27) で求めた係数関数 $u(y)$ を用いて、式 (B.40) の関係が成り立つことを確かめる。KK モード関数の運動方程式 (B.4) を使うと、

$$\partial_y u(y) = - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\phi_n^R(y) \phi_n^R(y) - \phi_n^L(y) \phi_n^L(y) \right] \quad (\text{B.42})$$

と変形できる。右辺を評価するために、次の関数を定義する:

$$\Delta'(x, y) = - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\phi_n^R(x) \phi_n^R(y) - \phi_n^L(x) \phi_n^L(y) \right]. \quad (\text{B.43})$$

この関数は $y = x$ で $\partial_y u(y)$ に一致する。ここで、KK モードの和はゼロモードを含まないことに注意が必要である。 $y \rightarrow -y$ とすると、モード関数の偶奇性から

$$-\Delta'(x, -y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\phi_n^R(x) \phi_n^R(y) + \phi_n^L(x) \phi_n^L(y) \right] \quad (\text{B.44})$$

と右辺 2 項目の符号が変わる。右辺はちょうどモード関数の完全性関係の形である:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\phi_n^R(x) \phi_n^R(y) + \phi_n^L(x) \phi_n^L(y) \right] = \sum_{N: \text{整数}} \delta(x - y - 2N\pi R). \quad (\text{B.45})$$

ここで、デルタ関数部分は周期性を考慮した形になっている。ただし、式 (B.44) の無限和にはゼロモードが含まれていないので、

$$-\Delta'(x, -y) = \sum_{N: \text{整数}} \delta(x - y - 2N\pi R) - \phi_0^R(x) \phi_0^R(y) \quad (\text{B.46})$$

と表せる。5次元バルクのみを考えることで、デルタ関数部分は無視すると、

$$\partial_y u(y) = \Delta'(y, -y) = \left[\phi_0^R(y) \right]^2 \quad (\text{B.47})$$

が得られることから、確かに式 (B.40) が成り立つ。したがって、バルクに広がるゼロモードの寄与を相殺するように決めた CS 項の係数は、KK モードを積分して得られるものと一致することが示せた。

キルク質量の場合における、具体的な係数関数 (B.35) とゼロモード関数 (B.9) を用いて、式 (B.40) が成り立つことを確かめる。まず、式 (B.35) の第 2 項と第 3 項を合わせて

$$u(y) = \frac{1}{4} \left[\coth(m\pi R) - \frac{e(m\pi R - 2my)}{\sinh(m\pi R)} \right] \quad (\text{B.48})$$

と変形できるので、微分すると

$$\partial_y u(y) = \frac{m}{\sinh(m\pi R)} e(m\pi R - 2my) \quad (\text{B.49})$$

となる。一方、ゼロモード関数 ϕ_0^R は

$$|\phi_0^R|^2 = \frac{m}{1 - e^{-2m\pi R}} e^{-2my} = \frac{m}{\sinh(m\pi R)} e(m\pi R - 2my) \quad (\text{B.50})$$

と変形できる。これは上式 (B.49) で求めた係数関数の微分 $\partial_y u(y)$ と一致する。したがって、式 (B.40) が成立することを具体形を使って確かめられた。

B.4 カレント期待値の計算

付録 B.2 で省略した、4 次元カレント $\langle j_{5mn}(x) \rangle$ の計算を示す。余剰次元方向について定数のゲージ場を考えると、相互作用ラグランジアンは式 (B.25) となる。このとき、 $\langle j_{5mn}(x) \rangle$ は 2 次までで

$$\begin{aligned} \langle j_{5mn}(x) \rangle &= \frac{i^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | T j_{5mn}(x) \mathcal{L}_{\text{int}}(x_1) \mathcal{L}_{\text{int}}(x_2) | 0 \rangle \\ &= \frac{i^2}{2} \sum_{ij} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | T j_{5mn}(x) j_{ii}^\mu(x_1) j_{jj}^\nu(x_2) | 0 \rangle A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

と書ける。ここで、 $\langle 0 | T j_{5mn}(x) j_{ii}^\mu(x_1) j_{jj}^\nu(x_2) | 0 \rangle$ のフーリエ変換を

$$(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - q) \Gamma_{mn}^{\mu\nu} = \sum_{ij} \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 e^{-ip_1x_1 - ip_2x_2 + iqx} \langle 0 | T j_{5mn}(x) j_{ii}^\mu(x_1) j_{jj}^\nu(x_2) | 0 \rangle \quad (\text{B.52})$$

で定義する。これは三角グラフ (図 B.1) に対応する。

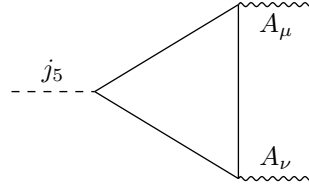


図 B.1 カレント期待値 $\langle j_5 \rangle$ に寄与する三角グラフ

これを計算すると、

$$\begin{aligned} \Gamma_{mn}^{\mu\nu} &= \delta_{mn} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(k-p_1)^2 - M_n^2} \frac{i}{k^2 - M_n^2} \frac{i}{(k+p_2)^2 - M_n^2} \\ &\quad \times (-1) \text{tr} [\gamma_5 (\not{k} - \not{p}_1 + M_n) \gamma^\mu (\not{k} + M_n) \gamma^\nu (\not{k} + \not{p}_2 + M_n) + (p_1 \leftrightarrow p_2, \mu \leftrightarrow \nu)] \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

となる。ここで現れるトレースは

$$\text{tr} [\gamma_5 (\not{k} - \not{p}_1 + M_n) \gamma^\mu (\not{k} + M_n) \gamma^\nu (\not{k} + \not{p}_2 + M_n)] = +4iM_n \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{1\rho} p_{2\sigma} \quad (\text{B.54})$$

と計算できる。これは積分変数に依らない。また、入れ替え $p_1 \leftrightarrow p_2$, $\mu \leftrightarrow \nu$ の下で不変なので、式 (B.53) は

$$\Gamma_{mn}^{\mu\nu} = i\delta_{mn} \times (8iM_n \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{1\rho} p_{2\sigma}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k-p_1)^2 - M_n^2} \frac{1}{k^2 - M_n^2} \frac{1}{(k+p_2)^2 - M_n^2} \quad (\text{B.55})$$

と書ける。ここでユークリッド化をして運動量積分をする。 $k^2 = -k_\mu k_\mu = -k_E^2 (< 0)$ のようにユークリッド化した運動量で積分を書き直し、

$$\begin{aligned} &\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k-p_1)^2 - M_n^2} \frac{1}{k^2 - M_n^2} \frac{1}{(k+p_2)^2 - M_n^2} \\ &= -i \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k-p_1)_E^2 + M_n^2} \frac{1}{k_E^2 + M_n^2} \frac{1}{(k+p_2)_E^2 + M_n^2} \equiv -iI(p_1, p_2; M_n) \end{aligned} \quad (\text{B.56})$$

とする。ここで、次の Feynman のパラメータ公式

$$\frac{1}{ABC} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \frac{2! \delta(x+y+z-1)}{(xA+yB+zC)^3} \quad (\text{B.57})$$

を用いて計算すると

$$I(p_1, p_2; M_n) = \frac{1}{32\pi^2} 2 \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \frac{1}{M_n^2 + \mu^2} \quad (\text{B.58})$$

となる。ただし、 $\mu^2 = y(1-y)p_1^2 + 2yzp_1p_2 + z(1-z)p_2^2$ とおいた。 $M_n \gg 0$ のとき、 $p/M_n \rightarrow 0$ であるため、 $\mu/M_n \rightarrow 0$ と近似できるので、

$$I(p_1, p_2; M_n) = \frac{1}{32\pi^2 M_n^2} \quad (\text{B.59})$$

を得る。したがって

$$\Gamma_{mn}^{\mu\nu} = \delta_{mn} \frac{8i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{1\rho} p_{2\sigma}}{32\pi^2 M_n} \quad (\text{B.60})$$

と求められる。 $\langle j_{5mn}(x) \rangle$ に戻ると、式 (B.51) より

$$\langle j_{5mn}(x) \rangle = \frac{i^2}{2} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_1(x-x_1)} e^{ip_2(x-x_2)} \quad (\text{B.61})$$

$$\times \frac{8i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{1\rho} p_{2\sigma}}{32\pi^2 M_n} A_\mu(x_1) A_\nu(x_2). \quad (\text{B.62})$$

ここで p_i 積分を実行すると $i\partial_\rho^{x_i} \delta(x-x_i)$ ($i=1,2$) となる。部分積分で微分をゲージ場に押し付けると、

$$\begin{aligned} \langle j_{5mn}(x) \rangle &= \delta_{mn} \frac{1}{2} \frac{8i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{32\pi^2 M_n} (\partial_\rho A_\mu)(\partial_\sigma A_\nu)(x) \\ &= -i\delta_{mn} \frac{1}{32\pi^2 M_n} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}(x) \end{aligned} \quad (\text{B.63})$$

となって、 $\langle j_{5mn}(x) \rangle$ が求められた。

B.5 無限和の公式について

本節では、式 (B.29) を計算するのに用いた公式 (B.30a), (B.30b), (B.30c) の導出について述べる。まず、式 (B.30b) が成り立つと、 $x=0$ を代入することで式 (B.30a), x について微分することで式 (B.30c) が得られる。そこで、式 (B.30b) について考える。式 (B.30b) は次のように変形できる:

$$\cosh[a(\pi-x)] = \frac{2a}{\pi} \sinh[a\pi] \left[\frac{1}{2a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[nx]}{a^2+n^2} \right]. \quad (0 \leq x \leq 2\pi) \quad (\text{B.64})$$

これは関数 $\cosh[a(\pi-x)]$ のフーリエ級数展開である。具体的に積分をして、係数を求める。

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} dx \cosh[a(\pi-x)] &= \frac{2}{a} \sinh(a\pi), \quad \int_0^{2\pi} dx \cosh[a(\pi-x)] \sin(nx) = 0, \\ \int_0^{2\pi} dx \cosh[a(\pi-x)] \cos(nx) &= \frac{2a \sinh(a\pi)}{a^2+n^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.65})$$

領域 $0 \leq x \leq 2\pi$ で定義された関数 $f(x)$ に対するフーリエ級数展開を

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \quad (\text{B.66})$$

とするとき、係数は

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dx f(x) \cos(nx), \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dx f(x) \sin(nx) \quad (\text{B.67})$$

なので、 $f(x) = \cosh[a(\pi-x)]$ のとき、上で求めた定積分 (B.65) から、

$$a_0 = \frac{2}{a\pi} \sinh(a\pi), \quad a_n = \frac{2a \sinh(a\pi)}{\pi} \frac{1}{a^2+n^2}, \quad b_n = 0 \quad (\text{B.68})$$

である。よって関数 $\cosh[a(\pi-x)]$ のフーリエ展開は式 (B.64) で表されることがわかった。

式 (B.30a) については, a を複素数に拡張することで, 公式を確かめることもできる。まず, 複素関数 $f(z), g(z)$ を,

$$f(z) = \frac{\pi}{z} \left[\frac{\cosh(\pi z)}{\sinh(\pi z)} - \frac{1}{\pi z} \right], \quad g(z) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + z^2} \quad (\text{B.69})$$

と定義する。これらの極が一致することを確認する。Liouville の定理より, 無限遠まで正則な関数は定数関数のみであることから, $f(z) = g(z)$ となる。 $g(z)$ は $z = \pm in$ で, 留数 $\pm \frac{1}{in}$ をもつ。 $f(z)$ も同じ点に同じ留数をもつことを示す。まず, $z = 0$ は極ではない:

$$f(z)|_{z=0} = \frac{\pi}{z} \left[\frac{\cosh(\pi z)}{\sinh(\pi z)} - \frac{1}{\pi z} \right] \Big|_{z=0} = \frac{\pi^2}{3}. \quad (\text{B.70})$$

次に, $z = \pm in$ での極を計算する。 $z = \pm in + y$ とおくと,

$$\sinh(\pi z) = (-1)^n \sinh(\pi y), \quad \cosh(\pi z) = (-1)^n \cosh(\pi y) \quad (\text{B.71})$$

であるので, $z = \pm in$ での極は

$$(z \mp in)f(z)|_{z=\pm in} = y \frac{\pi}{\pm in + y} \left(\frac{(-1)^n \cosh(\pi y)}{(-1)^n \sinh(\pi y)} - \frac{1}{\pi(\pm in + y)} \right) \Big|_{y=0} = \pm \frac{1}{in} \quad (\text{B.72})$$

である。したがって, $f(z)$ も $z = \pm in$ に留数 $\mp 1/(2n)$ をもつ。Liouville の定理より, $f(z) = g(z)$ となる。

さらに, 文献 [82] を参考に, 式 (B.30a) が複素関数の部分分数展開の例の 1 つであることをみる。複素関数の部分分数展開とは, 部分分数分解の一般化である。関数 $h(z)$ を極を除く全平面で 1 価正則な関数とする。これは有理型関数と呼ばれる。有理型関数 $h(z)$ は $z = a_1, a_2, \dots$ に極を持つとする。極 $z = a_k$ ($k = 1, 2, \dots$) まわりでローラン展開したときの, 負べきの部分 (主要部) は多項式 $P_k(1/(z - a_k))$ とする。 $z = 0$ で $h(z)$ が正則であるとすると, 次式が成り立つ²:

$$h(z) = h(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[P_k \left(\frac{1}{z - a_k} \right) - P_k \left(-\frac{1}{a_k} \right) \right]. \quad (\text{B.73})$$

特に, $h(z)$ の特異点がすべて 1 位の極である場合, 極 $z = a_k$ での留数を r_k とすると, 上の公式は

$$h(z) = h(0) + \sum_{k=1}^{\infty} r_k \left[\frac{1}{z - a_k} + \frac{1}{a_k} \right] \quad (\text{B.74})$$

と書ける。この公式を式 (B.69) の $f(z)$ に適用すると,

$$f(z) = f(0) + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{in} \left(\frac{1}{z - in} + \frac{1}{in} \right) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n>0} \left[\frac{2}{n^2 + z^2} - \frac{2}{n^2} \right]. \quad (\text{B.75})$$

最後の無限和は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{B.76})$$

なので, 第 1 項の $f(0) = \pi^2/3$ と打ち消し合う。したがって,

$$f(z) = \frac{\pi}{z} \left[\frac{\cosh(\pi z)}{\sinh(\pi z)} - \frac{1}{\pi z} \right] = 2 \sum_{n>0} \frac{1}{n^2 + z^2} = g(z) \quad (\text{B.77})$$

が成り立つ。

² 証明は文献 [82]pp.118 を参照。

付録 C

アノマリーの計算

S^1/\mathbb{Z}_2 オビフォルド上のアノマリーは固定点上に局在する [62]。この付録では、4次元のカイラルアノマリーの計算から始めて、 S^1/\mathbb{Z}_2 オビフォルド上のアノマリーの計算についてレビューする。

C.1 4次元のカイラルアノマリー

4次元の Euclid 空間上で $U(1)$ ゲージ場と結合する Dirac フェルミオンを考える。カイラル変換に対応するカレント保存則を破る項をカイラルアノマリーという。ここでは、カイラルアノマリーを経路積分のヤコビアンから導く藤川の方法 [83, 84] を紹介する。

■セットアップ ゲージ場は古典的な外場とする。分配関数は

$$\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left[\int d^4x \bar{\psi} (i\mathcal{D} - m) \psi \right] \quad (\text{C.1})$$

で与えられる。ここで γ 行列は反エルミートにとり、反交換関係を満たす:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\delta^{\mu\nu}, \quad (\gamma^\mu)^\dagger = -\gamma^\mu. \quad (\text{C.2})$$

γ_5 を

$$\gamma_5 = -\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4 \quad (\text{C.3})$$

で定義すると、次の性質を満たす:

$$(\gamma_5)^2 = 1, \quad \{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0. \quad (\text{C.4})$$

また、共変微分は

$$\mathcal{D} = \gamma^\mu (i\partial_\mu + A_\mu) \quad (\text{C.5})$$

と定義する。これはエルミートである。ただし、内積は Euclid 版の

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \int d^4x \Psi^\dagger(x) \Phi(x) \quad (\text{C.6})$$

と定義する。このように定義すると、Dirac 演算子 \mathcal{D} はエルミートになる。このことから、Dirac 演算子の固有値は実数で、その固有関数は正規直交系をなすように取ることができる:

$$\mathcal{D}\varphi_n(x) = \lambda_n \varphi_n(x), \quad \int d^4x \varphi_n^\dagger(x) \varphi_m(x) = \delta_{nm}. \quad (\text{C.7})$$

Dirac 場をこの固有関数を用いて、

$$\psi(x) = \sum_n a_n \varphi_n(x), \quad \bar{\psi}(x) = \sum_n b_n \varphi_n^\dagger(x) \quad (\text{C.8})$$

と展開する。ここで展開係数 a_n と b_n は Grassmann 数とする。経路積分の測度はこれらを用いて

$$\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi} = \prod_n da_n db_n \quad (\text{C.9})$$

と書ける。

■**カイラル変換とカレント保存則** 場を $\psi \rightarrow \psi'$ と変換したとき、変換後の作用を S' とおく。積分変数を変換しても分配関数は変わらないので

$$\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}e^S = \mathcal{D}\psi'\mathcal{D}\bar{\psi}'e^{S'} \quad (\text{C.10})$$

である。特に微小変換を考えると、作用は $S' = S + \delta S$ 、積分測度のヤコビアンは $J = 1 + \delta J$ と書けるので、

$$\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}(\delta S + \delta J)e^S = 0 \quad (\text{C.11})$$

が成り立つ。これがカレント保存則に対応する式である。 δS がカレントの発散、 δJ がアノマリーに対応することを以下で見ていく。具体的には、微小カイラル変換

$$\psi'(x) = (1 + i\alpha(x)\gamma_5)\psi(x), \quad (\text{C.12a})$$

$$\bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)(1 + i\alpha(x)\gamma_5) \quad (\text{C.12b})$$

を考える。

■ **δS の計算** 変換 (C.12) のもとでの作用 $S[\psi, \bar{\psi}] = \int d^4x \bar{\psi}(i\mathcal{D} - m)\psi$ の変化を考える:

$$\begin{aligned} S[\psi', \bar{\psi}'] &= \int d^4x \bar{\psi}(1 + i\alpha\gamma_5)[i\mathcal{D} - m](1 + i\alpha\gamma_5)\psi(x) \\ &= S[\psi, \bar{\psi}] + \int d^4x [-(\partial_\mu\alpha)\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi - 2i\alpha m\bar{\psi}\gamma_5\psi] \\ &= S[\psi, \bar{\psi}] + \int d^4x \alpha(x) [\partial_\mu j_5^\mu - 2imj_5]. \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

ここで、軸性カレントを $j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$ 、 $j_5 = \bar{\psi}\gamma_5\psi$ とおいた。したがって、

$$\delta S = \int d^4x \alpha(x) [\partial_\mu j_5^\mu - 2imj_5]. \quad (\text{C.14})$$

■**ヤコビアンの計算** 式 (C.12) を展開係数 $\{a_n, b_n\}$ の変換に直す。つまり $\psi' = \sum_n a'_n \varphi_n$ とおくと、

$$a'_n = \sum_m \left[\delta_{nm} + i \int d^4x \varphi_n^\dagger \alpha \gamma_5 \varphi_m \right] a_m = \sum_m U_{nm} a_m \quad (\text{C.15})$$

となる。ただし a の変換行列を U とおいた。同様に

$$b'_n = \sum_m b_m \left[\delta_{mn} + i \int d^4x \varphi_m^\dagger \alpha \gamma_5 \varphi_n \right] = \sum_m b_m V_{mn}. \quad (\text{C.16})$$

ここで b の変換行列 V は a の変換行列と $V = U^T$ の関係になっている。ヤコビアンは変換行列の行列式で表される。ただし積分変数は Grassmann 数なのでヤコビアンは行列式の逆数になることに注意する。つまり、

$$\prod_n da'_n db'_n = (\det U \det U^T)^{-1} \prod_n da_n db_n = (\det U)^{-2} \prod_n da_n db_n. \quad (\text{C.17})$$

公式 $\det M = \exp \text{tr} \ln M$ を使って、

$$\begin{aligned} (\det U)^{-2} &= \exp \left[\text{tr} \ln \left(\delta_n m + i \int d^4x \varphi_n^\dagger \alpha \gamma_5 \varphi_m \right) \right]^{-2} \\ &\sim \exp \left[-2i \sum_n \int d^4x \varphi_n^\dagger \alpha \gamma_5 \varphi_n \right] = e^{\delta J} \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

と書ける。ただし、 α は微小として近似をした。このトレースは発散しているため、正則化をする必要がある。収束因子として $e^{-\tau\lambda_n^2}$ ($\tau > 0$) を挿入し、最後に $\tau \rightarrow 0$ とする:

$$\begin{aligned} \sum_n \int d^4x \varphi_n^\dagger(x) \alpha \gamma_5 \varphi_n(x) &\rightarrow \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_n \int d^4x \varphi_n^\dagger(x) \alpha \gamma_5 e^{-\tau\lambda_n^2} \varphi_n(x) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_n \int d^4x \varphi_n^\dagger(x) \alpha \gamma_5 e^{-\tau \mathcal{D}^2} \varphi_n(x). \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

ここで基底を \mathcal{D} の固有関数 $\varphi_n(x) = \langle x|n\rangle$ から平面波 $e^{ikx} = \langle k|x\rangle$ に移したい。完全性関係を用いると

$$\sum_n \varphi_n(x) \mathcal{O} \varphi_n(x) = \text{tr} \langle x|\mathcal{O}|x\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \mathcal{O} e^{ikx} \quad (\text{C.20})$$

のように運動量積分に直せる。これを用いると

$$\begin{aligned} \sum_n \varphi_n^\dagger(x) \gamma_5 \varphi_n(x) &= \text{tr} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \gamma_5 e^{-\tau \mathcal{D}^2} e^{ikx} \\ &= \text{tr} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma_5 \exp \left[-\tau \left((-ik_\mu + D_\mu)^2 + \frac{i}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu F_{\mu\nu} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

と書ける。ただし、ここで

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^2 &= \frac{1}{2} \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} D_\mu D_\nu + \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] D_\mu D_\nu \\ &= D_\mu D^\mu + \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] [D_\mu, D_\nu] = D_\mu^2 + \frac{i}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu F_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

を用いた。被積分関数は

$$\exp \left[-\tau \left((-ik_\mu + D_\mu)^2 + \frac{i}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu F_{\mu\nu} \right) \right] = e^{\tau k^2} \exp \left[-\tau D_{mu}^2 + 2i\tau k^\mu D_\mu - \frac{i\tau}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu F_{\mu\nu} \right] \quad (\text{C.23})$$

と書ける。指数関数を展開して、 γ_5 を含むトレースを取ったあとに残るのは、 γ を4つ含む項である。公式 $\text{tr}(\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = -4\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ ($\epsilon^{1234} = +1$) を用いて、

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{\tau k^2} \text{tr} \left[\frac{1}{2!} \frac{-\tau^2}{4} \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \right] &= \frac{-\tau^2}{8} (-4\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}) F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{\tau k^2} \\ &= \frac{1}{32\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

と変形できる。(ここで用いたトレースの公式は Euclid 版である。Minkowski 時空に直すときは全体に $-i$ を掛ければよい。) 運動量積分は $k^2 = -(k^1)^2 - \dots$ となっていることに注意すると、ガウス積分になっていることが分かり、

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{\tau k^2} = \frac{1}{(2\pi)^4} \sqrt{\frac{\pi^{-4}}{\tau}} = \frac{1}{16\pi^2 \tau^2} \quad (\text{C.25})$$

を用いた。式 (C.18) に戻すと

$$\delta J = \int d^4x \alpha(x) \frac{-i}{16\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \quad (\text{C.26})$$

となる。結局、(Euclid 版の) 軸性カレントの保存則

$$\partial_\mu \langle j_5^\mu \rangle - 2mi \langle j_5 \rangle = \frac{i}{16\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \quad (\text{C.27})$$

が得られる。(Minkowski 版では $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \rightarrow -i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ とする。)

C.2 S^1/\mathbb{Z}_2 上のアノマリーの計算

S^1/\mathbb{Z}_2 オービフォールド上のアノマリーは固定点上に局在する [62]。本節では、付録 B.1 で与えた、5次元理論を KK モード展開して得られる 4次元的な描像を考え、藤川の方法を使ってアノマリーを計算する。ここでのアノマリーの計算は文献 [83, 84] を参考にした。

カレント保存則は、積分変数であるフェルミオン場を変換しても分配関数が不変であることから導ける。分配関数は次のように書ける：

$$Z[\mathcal{A}_\mu^{R/L}] = \int \mathcal{D}[\psi] e^{iS} \equiv \int \mathcal{D}\psi_R \mathcal{D}\bar{\psi}_R \mathcal{D}\psi_L \mathcal{D}\bar{\psi}_L e^{iS[\psi_{R/L}, \bar{\psi}_{R/L}, \mathcal{A}_{R/L}]} . \quad (\text{C.28})$$

変換として、形式的に y 依存な係数をもつものを考える：

$$\psi_{R/L}(x) \longrightarrow \psi'_{R/L}(x) = \psi_{R/L}(x) + i\epsilon(x)\Xi^{R/L}(y)\psi_{R/L}(x) , \quad (\text{C.29a})$$

$$\bar{\psi}_{R/L}(x) \longrightarrow \bar{\psi}'_{R/L}(x) = \bar{\psi}_{R/L}(x) - i\epsilon(x)\bar{\psi}_{R/L}(x)\Xi^{R/L}(y) . \quad (\text{C.29b})$$

これは $\Xi^R(y) = \Xi^L(y)$ のときベクトル的変換、 $\Xi^R(y) = -\Xi^L(y)$ のとき γ_5 変換に対応する。分配関数は積分変数を変換しても不変であるので、ヤコビアンを $e^{\delta J}$ と書くと、

$$\int \mathcal{D}[\psi] e^S = \int \mathcal{D}[\psi'] e^{S'} = \int \mathcal{D}[\psi] e^{\delta J} e^{S+\delta S} \quad (\text{C.30})$$

が成り立つ。したがって、 $\delta J + \delta S = 0$ であり、この式からカレント保存則が得られる。 $\delta S = 0$ が古典的なカレント保存則、 δJ がカレント保存則の量子論的な破れである、アノマリーに対応する。 δS はカレントの 5次元発散になる¹：

$$\delta S = \int d^4x \epsilon(x) [\partial_\mu J^\mu(x, y) + \partial_y J^5(x, y)] . \quad (\text{C.31})$$

$\partial_y J^5(x, y)$ は質量項の変分に対応している。この計算については後述する。一方ヤコビアンは、まず $\psi_{R/L}(x)$ を $\mathcal{D}\psi^\dagger$ 、 $\mathcal{D}\psi$ の固有関数で

$$\psi(x) = \sum_n a_n \varphi_n(x) , \quad \bar{\psi}(x) = \sum_m \phi^\dagger(x)_m b_m . \quad (\text{C.32})$$

と展開する。² ここで展開係数 a_n, b_n は Grassmann 数であり、 $\phi_n(x), \varphi_n(x)$ は次の固有値方程式を満たす：

$$\mathcal{D}^\dagger \mathcal{D} \varphi_n(x) = \lambda_n^2 \varphi_n(x) , \quad \mathcal{D} \mathcal{D}^\dagger \phi_n(x) = \lambda_n^2 \phi_n(x) . \quad (\text{C.33})$$

$\psi(x)$ の変換を係数 a_n, b_n の変換に直してヤコビアンを求める。この詳しい計算は後述する。結果は

$$\delta J = - \int d^4x \epsilon(x) \frac{1}{32\pi^2} \text{tr} \left[\Xi^R(y) \mathcal{F}_{\mu\nu}^R \tilde{\mathcal{F}}^{R\mu\nu} - \Xi^L(y) \mathcal{F}_{\mu\nu}^L \tilde{\mathcal{F}}^{L\mu\nu} \right] . \quad (\text{C.34})$$

となる。まとめると、 $\delta S + \delta J = 0$ からカレント保存則

$$\partial_\mu J^\mu + \partial_y J^5 = \frac{1}{32\pi^2} \text{tr} \left[\Xi^R(y) \mathcal{F}_{\mu\nu}^R \tilde{\mathcal{F}}^{R\mu\nu} - \Xi^L(y) \mathcal{F}_{\mu\nu}^L \tilde{\mathcal{F}}^{L\mu\nu} \right] \quad (\text{C.35})$$

が導ける。

次にアノマリーが固定点上に局在化すること [62] を示す。まず、モード関数の完全性関係から、

$$\Xi^{R/L}(y) \mathcal{A}_{R/L}^\mu(x) = A^\mu(x, y) \Xi^{R/L}(y) \quad (\text{C.36})$$

¹ ここで、4次元積分の中身に y 依存性が現れているが、これは式 (C.29a)、および式 (C.29b) の変換パラメータに現れる形式的な y 依存性であり、元の 5次元の作用における y 依存性とは関係ない。 δJ についても同様である。

² $\mathcal{A}^R \neq \mathcal{A}^L$ なので、Dirac 演算子 $\mathcal{D} = \not{\partial} + i\mathcal{A}^R P_R + i\mathcal{A}^L P_L$ はエルミートではないことに注意。C.1 節で扱った 4次元のカイラルアノマリーの計算では、 \mathcal{D} がエルミートなので、式 (C.7) のように \mathcal{D} の固有関数を考えれば良かった。

が成立する。右辺の $A^\mu(x, y)$ はもとの5次元作用 (B.1) に含まれるゲージ場だが、左辺の $A_{R/L}^\mu(x)$ は式 (B.14b) で定義したように、 $A^\mu(x, y)$ をモード関数で挟んで積分したものである。この関係式 (C.36) を用いるとアノマリーは次のように書ける:

$$\frac{1}{32\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}(x, y) \text{tr} [\Xi^R(y) - \Xi^L(y)] . \quad (\text{C.37})$$

ここで現れたトレースは $\Xi(y)$ の定義 (B.17a) から、

$$\text{tr} [\Xi^R(y) - \Xi^L(y)] = \sum_{n \geq 0} \phi_n^R(y)^2 - \sum_{n > 0} \phi_n^L(y)^2 \quad (\text{C.38})$$

と書ける。これを計算するために次の関数

$$\Delta(y, y') \equiv \sum_{n \geq 0} \phi_n^R(y) \phi_n^R(y') - \sum_{n > 0} \phi_n^L(y) \phi_n^L(y') \quad (\text{C.39})$$

を考える。これは $y = y'$ で考えたいトレースに一致する。 $\phi_n^L(y')$ は $y' = 0$ について反対称、 $\phi_n^R(y')$ は対称なので、 $y' \rightarrow -y'$ とすると、

$$\Delta(y, -y') = \sum_{n \geq 0} \phi_n^R(y) \phi_n^R(y') + \sum_{n > 0} \phi_n^L(y) \phi_n^L(y')$$

となる。 $\{\phi_n^R(y), \phi_n^L(y)\}$ は区間 $[-\pi R, \pi R]$ 上の周期境界条件をもつ関数の完全正規直交系をなすため、周期性を考慮した完全性関係

$$\Delta(y, -y') = \sum_{N=-\infty}^{\infty} \delta(y - y' - 2N\pi R) \quad (\text{C.40})$$

が成り立つ。ただし N は整数とする。 $-y' = y$ と置けば、 $\Delta(y, y)$ は

$$\Delta(y, y) = \sum_N \delta(2y - 2N\pi R) = \frac{1}{2} \sum_N \delta(y - N\pi R)$$

と求められる。したがって、アノマリーは最終的に次のように書ける:

$$\partial_\mu J^\mu + \partial_y J^5 = \frac{1}{2} [\delta(y) + \delta(y - \pi R)] Q(x, y), \quad Q(x, y) = \frac{1}{32\pi^2} F_{\mu\nu}(x, y) \tilde{F}^{\mu\nu}(x, y). \quad (\text{C.41})$$

アノマリーは5次元バルクにはなく、オビフォルドの固定点上に分裂して存在する。またアノマリーは5次元の形やモードに依存しないことがわかる。これは直感的には次のように解釈できる。一般に、奇数次元時空ではアノマリーがないことが知られており、確かにバルクにはアノマリーがない。一方、オビフォルドの固定点上は4次元面になっているため、アノマリーが存在しても良い。実際、5次元の S^1/\mathbb{Z}_2 オビフォルド上の理論は、4次元のカイラルな理論と等価である。

■作用の変分 省略した作用の変分 (C.31) の導出を示す。変換 (C.29a)、および (C.29b) の下での4次元作用 (B.15) の変分を求める。変換後の作用は、 $\epsilon(x)$ が微小として、

$$\begin{aligned} S[\psi'_{R/L}, \bar{\psi}'_{R/L}, A_{R/L}] &= S[\psi_{R/L}, \bar{\psi}_{R/L}, A_{R/L}] + \int d^4x [i^2 (\partial_\mu \epsilon(x)) \bar{\psi} \gamma^\mu (\Xi^R(y) P_R + \Xi^L(y) P_L) \psi] \\ &\quad - \int d^4x (-i\epsilon(x)) [\bar{\psi}_L (\Xi^L(y) M - M \Xi^R(y)) \psi_R + \bar{\psi}_R (\Xi^R(y) M - M \Xi^L(y)) \psi_L] \end{aligned} \quad (\text{C.42})$$

と書き下せる。まず第1項は、カレントを用いて

$$\int d^4x [i^2 (\partial_\mu \epsilon) \bar{\psi} \gamma^\mu (\Xi^R(y) P_R + \Xi^L(y) P_L) \psi] = \int d^4x (-\partial_\mu \epsilon(x)) J^\mu(x, y) \quad (\text{C.43})$$

と書ける。次に、第2項が $\partial_y J^5$ と書けることを示す。KKモードの運動方程式 (B.4) を用いると、 $[\Omega^{R/L}(y)]_{nm} = \phi_n^{L/R}(y) \phi_m^{R/L}(y)$ の微分は次のように変形できる:

$$\partial_y [\Omega^{R/L}]_{nm}(y) = [\partial_y \phi_n^{L/R}] \phi_m^{R/L} + \phi_n^{L/R} [\partial_y \phi_m^{R/L}] \quad (\text{C.44})$$

$$= \mp [M_n \phi_n^{R/L} - m(y) \phi_n^{L/R}] \phi_m^{R/L} \pm \phi_n^{L/R} [M_m \phi_m^{L/R} - m(y) \phi_m^{R/L}]. \quad (\text{C.45})$$

整理すると,

$$\partial_y \left[\Omega^{R/L} \right]_{nm} (y) = \pm \left[-M \Xi^{R/L}(y) + \Xi^{L/R}(y) M \right]_{nm} \quad (\text{C.46})$$

とまとめられる。 $\Omega(y) = \Omega^R(y) P_R + \Omega^L(y) P^L$ より, $\partial_y J^5$ は

$$\begin{aligned} \partial_y J^5 &= \bar{\psi} i \gamma_5 \left[\partial_y \Omega(y) \right] \psi = i \bar{\psi} \left[\partial_y \Omega^R(y) P_R - \partial_y \Omega^L(y) P_L \right] \psi \\ &= i \bar{\psi}_L \left[-M \Xi^R(y) + \Xi^L(y) M \right] \psi_R + i \bar{\psi}_R \left[-M \Xi^L(y) + \Xi^R(y) M \right] \psi_L \end{aligned} \quad (\text{C.47})$$

と変形できる。これは式 (C.42) 2 行目の被積分関数になっている。つまり質量項はカレントの余剰次元方向の発散で表される。カレントを用いると, 第 1 項もまとめて

$$\delta S = \int d^4 x \left[(-\partial_\mu \epsilon) J^\mu + \epsilon \partial_y J^5 \right] \quad (\text{C.48})$$

と書ける。第 1 項を部分積分すれば,

$$\delta S = \int d^4 x \epsilon \left(\partial_\mu J^\mu + \partial_y J^5 \right). \quad (\text{C.49})$$

被積分関数がカレントの 5 次元発散になっており, 式 (C.31) 式が導けた。

■ヤコビアンの計算 省略したヤコビアン (C.34) の導出を示す。変換を一度有限形に書き直し, あとで無限小変換を考える:

$$\psi_{R/L} \longrightarrow \psi'_{R/L} = e^{i\epsilon(x) \Xi^{R/L}(y)} \psi_{R/L} = e^{i\epsilon(x) \Xi^{R/L}(y) P_{R/L}} \psi, \quad (\text{C.50a})$$

$$\bar{\psi}_{R/L} \longrightarrow \bar{\psi}'_{R/L} = \bar{\psi}_{R/L} e^{-i\epsilon(x) \Xi^{R/L}(y)} = \bar{\psi} e^{-i\epsilon(x) P_{\mp} \Xi^{R/L}(y)}. \quad (\text{C.50b})$$

ψ に対する変換に直すと,

$$\psi \longrightarrow \psi' = \exp \left[i\epsilon(x) (\Xi^R(y) P_R + \Xi^L(y) P_L) \right] \psi = \exp \left[i(\alpha(x, y) + \beta(x, y) \gamma_5) \right] \psi, \quad (\text{C.51a})$$

$$\bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} \exp \left[-i\epsilon(x) (P_L \Xi^R(y) + P_R \Xi^L(y)) \right] = \bar{\psi} \exp \left[i(-\alpha(x, y) + \beta(x, y) \gamma_5) \right]. \quad (\text{C.51b})$$

ここで $\alpha(x, y) = \epsilon(x) [\Xi^R(y) + \Xi^L(y)] / 2$, $\beta(x, y) = \epsilon(x) [\Xi^R(y) - \Xi^L(y)] / 2$ とおいた。Dirac 演算子 $\mathcal{D} = \not{\partial} - i\mathcal{A}^R P_R - i\mathcal{A}^L P_L$ はエルミートではない。実際,

$$\mathcal{D}^\dagger = \not{\partial} + i\mathcal{A}^R P_L + i\mathcal{A}^L P_R \neq \mathcal{D}. \quad (\text{C.52})$$

\mathcal{D} に対する固有関数はそのままでは定義できないが, $\mathcal{D} \mathcal{D}^\dagger, \mathcal{D}^\dagger \mathcal{D}$ はエルミートなので, 次の固有関数は定義できる:

$$\mathcal{D}^\dagger \mathcal{D} \varphi_n(x) = \lambda_n^2 \varphi_n(x), \quad \mathcal{D} \mathcal{D}^\dagger \phi_n(x) = \lambda_n^2 \phi_n(x). \quad (\text{C.53})$$

ここで, 固有関数同士は

$$\mathcal{D} \varphi_n(x) = \lambda_n \phi_n(x), \quad \mathcal{D}^\dagger \phi_n(x) = \lambda_n \varphi_n(x) \quad (\text{C.54})$$

の関係がある。正確には, 上式のようになるように定数倍の自由度を決めた。 $\{\varphi_n\}, \{\phi_n\}$ はそれぞれ直交関数系をなす。 $\psi(x)$ と $\bar{\psi}(x)$ をこれらの固有関数を用いて,

$$\psi(x) = \sum_n a_n \varphi_n(x), \quad \bar{\psi}(x) = \sum_m \phi_m^\dagger(x) b_m \quad (\text{C.55})$$

と展開する。ここで a_n, b_n は Grassmann 数とする。 $\psi, \bar{\psi}$ に対する変換を係数 a_n, b_n の変換に直す:

$$a'_n = \sum_m U_{nm} a_m, \quad U_{nm} = \int d^4 x \phi_n^\dagger(x) e^{i[\alpha(x, y) + \beta(x, y) \gamma_5]} \varphi_m(x), \quad (\text{C.56a})$$

$$b'_m = \sum_n b_n V_{nm}, \quad V_{nm} = \int d^4 x \phi_n^\dagger(x) e^{i[-\alpha(x, y) + \beta(x, y) \gamma_5]} \phi_m(x). \quad (\text{C.56b})$$

積分変数を a_n, b_n から a'_n, b'_n としたときのヤコビアンを求めたいので、行列 U_{nm} と V_{nm} の行列式を計算する:

$$\begin{aligned} \det U &= \exp \operatorname{tr} \ln \left[\int d^4x \varphi_n^\dagger(x) e^{i[\alpha(x,y) + \beta(x,y)\gamma_5]} \varphi_m(x) \right] \\ &\sim \exp \operatorname{tr} \ln \left[\delta_{nm} + i \int d^4x \varphi_n^\dagger(x) [\alpha(x,y) + \beta(x,y)\gamma_5] \varphi_m(x) \right] \\ &\sim \exp \left[i \sum_n \int d^4x \varphi_n^\dagger(x) (\alpha(x,y) + \beta(x,y)\gamma_5) \varphi_n(x) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.57})$$

ここで $\alpha(x,y), \beta(x,y)$ が微小であることを用いた。同様に

$$\det V = \exp \left[i \sum_n \int d^4x \phi_n^\dagger(x) [-\alpha(x,y) + \beta(x,y)\gamma_5] \phi_n(x) \right] \quad (\text{C.58})$$

と変形できる。したがってヤコビアンは

$$\begin{aligned} J &= (\det U \det V)^{-1} \\ &\sim \exp \left[-i \int d^4x \sum_n \left\{ \varphi_n^\dagger (\alpha + \beta\gamma_5) \varphi_n(x) + \phi_n^\dagger (-\alpha + \beta\gamma_5) \phi_n(x) \right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.59})$$

と求められる。収束因子 $e^{-\tau\lambda_n^2}$ を挿入して、ヤコビアンを評価する。ただし、最後に $\tau \rightarrow 0$ とする:

$$\begin{aligned} &\lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_n e^{-\tau\lambda_n^2} \left\{ \varphi_n^\dagger (\alpha + \beta\gamma_5) \varphi_n(x) + \phi_n^\dagger (-\alpha + \beta\gamma_5) \phi_n(x) \right\} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_n \left\{ \varphi_n^\dagger (\alpha + \beta\gamma_5) \exp(-\tau \mathcal{D}^\dagger \mathcal{D}) \varphi_n(x) + \phi_n^\dagger (-\alpha + \beta\gamma_5) \exp(-\tau \mathcal{D} \mathcal{D}^\dagger) \phi_n(x) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.60})$$

ここで $\varphi_n(x) = \langle x | \phi_n \rangle$ と書けることを用いて、平面波の基底に移る:

$$\sum_n \varphi_n^\dagger(x) \mathcal{O} \varphi_n(x) = \operatorname{tr} \langle x | \mathcal{O} | x \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \operatorname{tr} \langle x | \mathcal{O} | k \rangle \langle k | x \rangle. \quad (\text{C.61})$$

これは $\{\phi_n\}$ に対しても同様に成り立つ。したがって、式 (C.60) は

$$\begin{aligned} &\lim_{\tau \rightarrow 0} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \operatorname{tr} \left[\alpha e^{-ikx} \left\{ \exp(-\tau \mathcal{D}^\dagger \mathcal{D}) - \exp(-\tau \mathcal{D} \mathcal{D}^\dagger) \right\} e^{ikx} \right. \\ &\quad \left. + \beta\gamma_5 e^{-ikx} \left\{ \exp(-\tau \mathcal{D}^\dagger \mathcal{D}) + \exp(-\tau \mathcal{D} \mathcal{D}^\dagger) \right\} e^{ikx} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.62})$$

と運動量積分の形に書ける。ここで $\mathcal{D} = \mathcal{D}_R P_R + \mathcal{D}_L P_L$, $\mathcal{D}^\dagger = \mathcal{D}_L P_R + \mathcal{D}_R P_L$ なので \exp の肩の上は

$$\mathcal{D}^\dagger \mathcal{D} = \mathcal{D}_R^2 P_R + \mathcal{D}_L^2 P_L, \quad \mathcal{D} \mathcal{D}^\dagger = \mathcal{D}_L^2 P_R + \mathcal{D}_R^2 P_L \quad (\text{C.63})$$

と書ける。 $P_R P_L = P_L P_R = 0$ に注意すると

$$\exp[-\tau \mathcal{D}^\dagger \mathcal{D}] = \exp[-\tau (\mathcal{D}_R^2 P_R + \mathcal{D}_L^2 P_L)] = \sum_{n>0} \frac{[-\tau (\mathcal{D}_R^2 P_R + \mathcal{D}_L^2 P_L)]^n}{n!} + 1$$

と L と R を分離できる。さらに、

$$\begin{aligned} \sum_{n>0} \frac{[-\tau (\mathcal{D}_R^2 P_R + \mathcal{D}_L^2 P_L)]^n}{n!} + 1 &= \sum_{n>0} \frac{(-\tau \mathcal{D}_R^2)^n P_R + (-\tau \mathcal{D}_L^2)^n P_L}{n!} + 1 \\ &= P_R \exp(-\tau \mathcal{D}_R^2) - P_R + P_L \exp(-\tau \mathcal{D}_L^2) - P_L + 1 \\ &= P_R \exp(-\tau \mathcal{D}_R^2) + P_L \exp(-\tau \mathcal{D}_L^2) \end{aligned} \quad (\text{C.64})$$

と変形できる。ここで3行目から4行目への変形では,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\tau \mathcal{D}_R^2 P_R)^n}{n!} = \sum_{n>0} \frac{(-\tau \mathcal{D}_R^2)^n P_R}{n!} + 1 \quad (\text{C.65})$$

となっていることに注意が必要である。つまり, $\exp(x P_R) \neq \exp(x) P_R$ である。 $\mathcal{D} \mathcal{D}^\dagger$ の場合も同様に計算できる。結局, 式 (C.62) の中の \exp は

$$\exp(-\tau \mathcal{D}^\dagger \mathcal{D}) = P_R \exp(-\tau \mathcal{D}_R^2) + P_L \exp(-\tau \mathcal{D}_L^2) \quad (\text{C.66a})$$

$$\exp(-\tau \mathcal{D} \mathcal{D}^\dagger) = P_R \exp(-\tau \mathcal{D}_R^2) + P_L \exp(-\tau \mathcal{D}_L^2) \quad (\text{C.66b})$$

と書ける。したがって

$$\begin{aligned} \exp(-\tau \mathcal{D}^\dagger \mathcal{D}) - \exp(-\tau \mathcal{D} \mathcal{D}^\dagger) &= (P_R - P_L) \exp(-\tau \mathcal{D}_R^2) + (P_L - P_R) \exp(-\tau \mathcal{D}_L^2), \\ &= \gamma_5 \left[\exp(-\tau \mathcal{D}_R^2) - \exp(-\tau \mathcal{D}_L^2) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.67a})$$

$$\begin{aligned} \exp(-\tau \mathcal{D}^\dagger \mathcal{D}) + \exp(-\tau \mathcal{D} \mathcal{D}^\dagger) &= (P_R + P_L) \exp(-\tau \mathcal{D}_R^2) + (P_L + P_R) \exp(-\tau \mathcal{D}_L^2) \\ &= \exp(-\tau \mathcal{D}_R^2) + \exp(-\tau \mathcal{D}_L^2) \end{aligned} \quad (\text{C.67b})$$

となる。式 (C.62) の被積分関数で平面波に挟まれた部分は

$$\begin{aligned} \text{tr} \left[\alpha \gamma_5 \left\{ \exp(-\tau \mathcal{D}_R^2) - \exp(-\tau \mathcal{D}_L^2) \right\} + \beta \gamma_5 \left\{ \exp(-\tau \mathcal{D}_R^2) + \exp(-\tau \mathcal{D}_L^2) \right\} \right] \\ = \text{tr} \left[(\alpha + \beta) \gamma_5 \exp(-\tau \mathcal{D}_R^2) + (-\alpha + \beta) \gamma_5 \exp(-\tau \mathcal{D}_L^2) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.68})$$

と整理できる。ここで, γ 行列の性質から

$$\mathcal{D}_{R/L}^2 = \left(D_{\mu}^{R/L} \right)^2 + \frac{i}{2} \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{R/L} \quad (\text{C.69})$$

と書けるので, 平面波の微分を実行すると,

$$D_{\mu}^{R/L} e^{ikx} = (\partial_{\mu} + i \mathcal{A}_{\mu}) e^{ikx} = e^{ikx} (-ik_{\mu} + D_{\mu}^{R/L}), \quad (\text{C.70a})$$

$$\left(D_{\mu}^{R/L} \right)^2 e^{ikx} = e^{ikx} (-ik_{\mu} + D_{\mu}^{R/L})^2 \quad (\text{C.70b})$$

となる。式 (C.62) の被積分関数は

$$\begin{aligned} e^{-ikx} \exp(-\tau \mathcal{D}_{R/L}^2) e^{ikx} &= \exp \left[-\tau \left(-ik_{\mu} + D_{\mu}^{R/L} \right)^2 - \frac{\tau}{2} \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{R/L} \right] \\ &= e^{\tau k_{\mu} k^{\mu}} \exp \left(-\tau D_{\mu R/L}^2 - 2i\tau k^{\mu} D_{\mu}^{R/L} - \frac{i\tau}{2} \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{R/L} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.71})$$

と書ける。 \exp を展開したとき, γ_5 を含むトレースを取ったあとに残るのは γ 行列を4つ含む項であるので

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} \text{tr} \left[c_{R/L} \gamma_5 \frac{1}{2!} \frac{-\tau^2}{4} \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\rho} \gamma^{\sigma} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{R/L} \mathcal{F}_{\rho\sigma}^{R/L} \right] \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{\tau k_{\mu} k^{\mu}} \\ = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{-\tau^2}{8} \text{tr} \left[c_{R/L} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{R/L} \mathcal{F}_{\rho\sigma}^{R/L} \right] (-4\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}) \frac{1}{16\pi^2 \tau^2} \\ = -\frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left[c_{R/L} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{R/L} \mathcal{F}_{\rho\sigma}^{R/L} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.72})$$

と計算できる。ここで $c_{R/L} = \pm\alpha + \beta$ とおいた。運動量積分は式 (C.25) を用いた。また, γ 行列のトレースはユークリッド版の公式

$$\text{tr} [\gamma_5 \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\rho} \gamma^{\sigma}] = -4\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (\text{C.73})$$

を用いた。ただし、 $\epsilon^{1234} = +1$ である。ミンコフスキー計量に戻すと、 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \rightarrow -i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ なので、ヤコビアンは最終的に

$$\delta J = - \int d^4x \epsilon(x) \frac{1}{32\pi^2} \text{tr} \left[\Xi^R(y) \mathcal{F}_{\mu\nu}^R \tilde{\mathcal{F}}^{R\mu\nu} - \Xi^L(y) \mathcal{F}_{\mu\nu}^L \tilde{\mathcal{F}}^{L\mu\nu} \right]. \quad (\text{C.74})$$

と書ける。したがって、式 (C.34) が得られた。

付録 D

CS 項の係数と Green 関数

変形された CS 項の係数に現れる関数

$$u(x) = \sum_n \frac{1}{m_n} \phi_n^R(x) \phi_n^L(x) \quad (\text{D.1})$$

は Green 関数と関係がある。これを確かめるために、次のような KK モード関数の “Dirac” 方程式を考える:

$$\begin{pmatrix} \partial + m & \\ -\partial + m & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{n,L} \\ \phi_{n,R} \end{pmatrix} = m_n \begin{pmatrix} \phi_{n,L} \\ \phi_{n,R} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.2})$$

境界条件として,

$$\begin{pmatrix} \phi_{n,L}(-x) \\ \phi_{n,R}(-x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \\ & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{n,L}(x) \\ \phi_{n,R}(x) \end{pmatrix} \quad (\text{D.3})$$

を考える。KK モード関数 $\phi_n^{L/R}(y)$ は次の Klein-Gordon(KG) 方程式も満たす:

$$(\partial^2 - m^2) \phi_n^{L/R}(x) = m_n^2 \phi_n^{L/R}(x). \quad (\text{D.4})$$

したがって、Green 関数の求め方として、Dirac 方程式の Green 関数を直接求める方法と、KG 方程式の Green 関数を利用する方法の 2 通りが考えられる。

ここでは、固有関数を用いた形式解を考える。微分演算子 \hat{D}_x に対して、固有値方程式

$$\hat{D}_x \phi_n(x) = \lambda_n \phi_n(x) \quad (\text{D.5})$$

が与えられ、固有関数 $\phi_n(x)$ が正規直交条件と完全性関係

$$\int dx \phi_n(x) \phi_m(x) = \delta_{nm}, \quad \sum_n \phi_n(x) \phi_n(y) = \delta(x-y) \quad (\text{D.6})$$

を満たすとき、次のように定義される Green 関数

$$\hat{D}_x G(x, y) = \delta(x-y) \quad (\text{D.7})$$

は形式的に次のように書ける:

$$G(x, y) = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} \phi_n(x) \phi_n(y). \quad (\text{D.8})$$

実際、 $G(x, y)$ に \hat{D} を掛けると

$$\hat{D}_x \sum_n \frac{1}{\lambda_n} \phi_n(y) \phi_n(x) = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} \phi_n(y) (\hat{D}_x \phi_n(x)) = \sum_n \phi_n(y) \phi_n(x) = \delta(x-y) \quad (\text{D.9})$$

となり、確かに Green 関数の定義を満たす¹。

¹ ただし、ここでの議論は $\lambda_n = 0$ のモードがない場合の議論である。本来はゼロモードについても考慮すべきであるが、ここでは、 $\lambda_n \neq 0$ モードのなす空間への射影を考えているものとする。

■定義から導出 Dirac 型の Green 関数を次のように定義する:

$$\begin{pmatrix} & \partial + m \\ -\partial + m & \end{pmatrix} G_D(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \delta(x - y), \quad G_D(x, y) = \begin{pmatrix} G_{L1} & G_{L2} \\ G_{R1} & G_{R2} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.10})$$

境界条件は式 (D.3) と同じ形に取り,

$$G_D(-x, y) = \begin{pmatrix} -1 & \\ & +1 \end{pmatrix} G_D(x, y) \quad (\text{D.11})$$

とする。各成分でみると,

$$G_{L1/L2}(-x, y) = -G_{L1/L2}(x, y), \quad (\text{D.12a})$$

$$G_{R1/R2}(-x, y) = +G_{R1/R2}(x, y) \quad (\text{D.12b})$$

となっている。各成分を, 同じ境界条件を満たす KK モード関数で展開する。\$G_{L1/L2}\$ は \$\phi_L\$ を使って,

$$G_{L1/L2}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,L1/L2}(y) \phi_{n,L}(x) \quad (\text{D.13})$$

と展開する。ここで, \$c_{n,L1/L2}(y)\$ は未定係数である。両辺に \$(-\partial + m)_x\$ を作用させると,

$$(\text{左辺}) = (-\partial + m)_x G_{L1/L2}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{for L1} \\ \delta(x - y) & \text{for L2} \end{cases}, \quad (\text{D.14a})$$

$$(\text{右辺}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,L1/L2}(y) (-\partial + m)_x \phi_{n,L}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n,L1/L2}(y) m_n \phi_{n,R}(x) \quad (\text{D.14b})$$

とそれぞれ計算できる。ここで, \$m_{n=0} = 0\$ なので, 和の範囲は \$n = 0\$ を除いて \$n = 1\$ から始まるとした。L1 に対しては,

$$0 = \sum_n c_{n,L1}(y) m_n \phi_{n,R}(x) \quad (\text{D.15})$$

となるから, \$c_{n,L1}(y) = 0\$ を得る。一方, L2 に対しては,

$$\delta(x - y) = \sum_n c_{n,L2}(y) m_n \phi_{n,R}(x) \quad (\text{D.16})$$

となる。両辺に \$\phi_{m,R}^*(x)\$ を掛けて積分すると,

$$(\text{左辺}) = \int dx \phi_{m,R}^*(x) \delta(x - y) = \phi_{m,R}^*(y), \quad (\text{D.17a})$$

$$(\text{右辺}) = \int dx \phi_{m,R}^*(x) \sum_n c_{n,L2}(y) m_n \phi_{n,R}(x) = c_{m,L2}(y) m_m \quad (\text{D.17b})$$

となる。ここでモード関数の直交性

$$\int dx \phi_{m,R}^*(x) \phi_{n,R}(x) = \delta_{mn} \quad (\text{D.18})$$

を用いた。よって係数は

$$c_{n,L2}(y) = \frac{\phi_{n,R}^*(y)}{m_n} \quad (\text{D.19})$$

と求められる。まとめると,

$$G_{L1}(x, y) = 0, \quad (\text{D.20a})$$

$$G_{L2}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n} \phi_{n,R}^*(y) \phi_{n,L}(x) \quad (\text{D.20b})$$

である。\$G_{R1/R2}\$ についても同様に計算できる:

$$G_{R1}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n} \phi_{n,L}^*(y) \phi_{n,R}(x), \quad (\text{D.20c})$$

$$G_{R2}(x, y) = 0. \quad (\text{D.20d})$$

行列の形でまとめると,

$$G_D(x, y) = \begin{pmatrix} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n} \phi_{n,R}^*(y) \phi_{n,L}(x) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n} \phi_{n,L}^*(y) \phi_{n,R}(x) & \end{pmatrix} \quad (\text{D.21})$$

が得られる。非対角成分について \$x \to y\$ の極限を取ると, 変形された CS 項の係数関数 (D.1) に一致する。

■KG 方程式の解を利用した導出 KG 方程式の Green 関数は固有関数 \$\phi_n(x)\$ を用いて次のように書ける:

$$G_{KG}(x, y) = \sum_n \frac{-1}{m_n^2} \phi_n^*(y) \phi_n(x). \quad (\text{D.22})$$

Dirac 方程式の KK モード関数 \$\phi_{n,L/R}\$ は KG 方程式を満たすので

$$G_{KG}(x, y) = \sum_{\chi=L,R} \sum_n \frac{-1}{m_n^2} \phi_{n,\chi}^*(y) \phi_{n,\chi}(x) \quad (\text{D.23})$$

と書ける。微分演算子の関係

$$\begin{pmatrix} & \partial + m \\ -\partial + m & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \partial + m \\ -\partial + m & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} (-\partial^2 + m^2) \quad (\text{D.24})$$

を \$G_{KG}\$ に作用させることを考える。そこで, KG 方程式の Green 関数を以下のように定義する:

$$(-\partial^2 + m^2) G_{KG}(x, y) = \delta(x - y). \quad (\text{D.25})$$

これに注意して \$G_{KG}\$ に式 (D.24) を作用させると,

$$\begin{pmatrix} & \partial + m \\ -\partial + m & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \partial + m \\ -\partial + m & \end{pmatrix} G_{KG}(x, y) = -\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \delta(x - y) \quad (\text{D.26})$$

となる。\$G_D(x, y)\$ の定義

$$\begin{pmatrix} & \partial + m \\ -\partial + m & \end{pmatrix} G_D(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \delta(x - y) \quad (\text{D.27})$$

と比較すると,

$$\begin{pmatrix} & \partial + m \\ -\partial + m & \end{pmatrix} G_{KG}(x, y) = -G_D(x, y) \quad (\text{D.28})$$

が得られる。この関係式を使って, \$G_{KG}\$ から \$G_D\$ を求める。

成分をあらわに書くと,

$$G_D(x, y) = \begin{pmatrix} G_{L1} & G_{L2} \\ G_{R1} & G_{R2} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} & (\partial + m)_x G_{KG} \\ (-\partial + m)_x G_{KG} & \end{pmatrix} \quad (\text{D.29})$$

である。各成分を求めていく。まず, 対角成分は \$G_{L1} = G_{R2} = 0\$ である。\$G_{R1}\$ について考えると,

$$G_{R1} = \sum_n \frac{-1}{m_n^2} [\phi_{n,L}^*(y) (-\partial + m)_x \phi_{n,L}(x) + \phi_{n,R}^*(y) (-\partial + m)_x \phi_{n,R}(x)] \quad (\text{D.30})$$

である。第 1 項は運動方程式を使って

$$(-\partial + m)_x \phi_{n,L}(x) = m_n \phi_{n,R}(x) \quad (\text{D.31})$$

と変形できる。一方で、第2項は境界条件を満たさない。したがって

$$G_{R1} = \sum_n \frac{1}{m_n} \phi_{n,L}^*(y) \phi_{n,R}(x) \quad (\text{D.32})$$

となる。同様に、 G_{L2} は

$$G_{L2} = \sum_n \frac{1}{m_n} \phi_{n,R}^*(y) \phi_{n,L}(x) \quad (\text{D.33})$$

と求められる。まとめると、

$$G_D(x, y) = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n} \phi_{n,L}^*(y) \phi_{n,R}(x) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n} \phi_{n,R}^*(y) \phi_{n,L}(x) \end{pmatrix} \quad (\text{D.34})$$

と書ける。これは定義から求めた形 (D.21) と一致する。

■ Green 関数の具体形 KK モード関数の具体形として、

$$\phi_{n,L}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi R}} \sin\left(\frac{n}{R}x\right), \quad (\text{D.35a})$$

$$\phi_{n,R}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi R}} \frac{1}{m_n} \left[m(x) \sin\left(\frac{n}{R}x\right) + \frac{n}{R} \cos\left(\frac{n}{R}x\right) \right] \quad (\text{D.35b})$$

を考える。ただし、 $m_n^2 = m^2 + \left(\frac{n}{R}\right)^2$, $m(x) = -m(-x) = m$ である。このモード関数を用いて、Green 関数に現れる形

$$\frac{1}{m_n} \phi_{n,R}(y) \phi_{n,L}(x) = \frac{2}{m_n^2 \pi R} \left[m \sin\left(\frac{n}{R}x\right) \sin\left(\frac{n}{R}y\right) + \frac{n}{R} \sin\left(\frac{n}{R}x\right) \cos\left(\frac{n}{R}y\right) \right] \quad (\text{D.36})$$

を求める。式 (B.30) で示した無限和の公式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^2} = \frac{\pi \sinh(a(\pi - x))}{2 \sinh(a\pi)}, \quad (\text{B.30b})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{m_n^2} = \frac{\pi \cosh(a(\pi - x))}{2a \sinh(a\pi)} - \frac{1}{2a^2} \quad (\text{B.30c})$$

をここでも用いる。まず式 (D.36) の右辺第1項は

$$\sum_n \frac{2m}{m_n^2 \pi R} \sin\left(\frac{n}{R}x\right) \sin\left(\frac{n}{R}y\right) = \frac{2m}{\pi R} \sum_n \frac{1}{m^2 + \left(\frac{n}{R}\right)^2} \frac{1}{2} \left[\cos\left(n \frac{x-y}{R}\right) - \cos\left(n \frac{x+y}{R}\right) \right] \quad (\text{D.37})$$

と変形できる。無限和の公式 (B.30b) を使うと、

$$\begin{aligned} \sum_n \frac{2m}{m_n^2 \pi R} \sin\left(\frac{n}{R}x\right) \sin\left(\frac{n}{R}y\right) &= \frac{1}{2 \sinh(\pi m R)} \left(\cosh m R \left(\pi - \frac{x-y}{R} \right) - \cosh m R \left(\pi - \frac{x+y}{R} \right) \right) \\ &= \frac{\sinh(m(\pi R - x)) \sinh(my)}{\sinh(\pi m R)} \end{aligned} \quad (\text{D.38})$$

と計算できる。式 (D.36) の右辺第2項は

$$\sum_n \frac{2}{m_n^2 \pi R} \frac{n}{R} \sin\left(\frac{n}{R}x\right) \cos\left(\frac{n}{R}y\right) = \frac{1}{\pi} \sum_n \frac{n}{(mR)^2 + n^2} \left[\sin\left(n \frac{x-y}{R}\right) - \sin\left(n \frac{x+y}{R}\right) \right] \quad (\text{D.39})$$

と変形できる。無限和の公式 (B.30c) を用いると、

$$\begin{aligned} \sum_n \frac{2}{m_n^2 \pi R} \frac{n}{R} \sin\left(\frac{n}{R}x\right) \cos\left(\frac{n}{R}y\right) &= \frac{1}{2 \sinh(\pi m R)} \left(\sinh m R \left(\pi - \frac{x-y}{R} \right) - \sinh m R \left(\pi - \frac{x+y}{R} \right) \right) \\ &= \frac{\sinh(m(\pi R - x)) \cosh(my)}{\sinh(\pi m R)} \end{aligned} \quad (\text{D.40})$$

と書ける。したがって,

$$\begin{aligned}
 G_{L2}(x, y) &= \sum_n \frac{1}{m_n} \phi_{n,R}(y) \phi_{n,L}(x) = \frac{\sinh(m(\pi R - x))}{\sinh(\pi m R)} (\cosh(my) + \sinh(my)) \\
 &= \frac{\sinh(m(\pi R - x))}{\sinh(\pi m R)} e^{my}
 \end{aligned} \tag{D.41}$$

と求められる。 G_{R1} は G_{L2} で x, y を入れ替えたものに等しくなる:

$$\begin{aligned}
 G_{R1}(x, y) &= \sum_n \frac{1}{m_n} \phi_{n,L}(y) \phi_{n,R}(x) = \frac{\sinh(m(\pi R - y))}{\sinh(\pi m R)} (\cosh(mx) + \sinh(mx)) \\
 &= \frac{\sinh(m(\pi R - y))}{\sinh(\pi m R)} e^{mx} .
 \end{aligned} \tag{D.42}$$

以上, 具体的な Green 関数が得られた。

付録 E

アノマリー流入

第 4.3.1 節では、ゼロモードの広がりから CS 項の係数を求めた。ここでは、ゼロモードの電荷分布 ρ が $y = \pi R/2$ で反対称であることを利用してアノマリーの流入を考えた。この付録では、電荷分布 ρ が $y = \pi R/2$ で反対称でない場合にも適用できる計算を示す。また、第 4.3.1 節との対応について議論する。

■**矩形関数の一般化** 第 4.3.1 節において、バルクに広がったアノマリーを相殺するような CS 項の係数を求めた。そのために、区間 $[y, \pi R - y]$ でのみ非ゼロで値を持つような CS 項 (4.39) を考えた。区間 $[y, \pi R - y]$ でのみ値を持たせるために、式 (4.39) では次のような矩形関数

$$\Theta_y(x^5) = \theta(x^5 - y) - \theta(x^5 - (\pi R - y)) = \begin{cases} 1 & \text{for } x^5 \in [y, \pi R - y] \\ 0 & \text{other} \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

を用いた。これは $y = \pi R/2$ に対して反対称である。これを一般化して次の矩形関数を定義する：

$$\Theta(x^5; y_1, y_2) = \theta(x^5 - y_1) - \theta(x^5 - y_2) = \begin{cases} 1 & \text{for } x^5 \in [y_1, y_2] \\ 0 & \text{other} \end{cases} . \quad (\text{E.2})$$

あとの計算で必要になる矩形関数の性質は以下の 3 つである：

$$\Theta(x^5; y_1, y_2) + \Theta(x^5; y_2, y_3) = \Theta(x^5; y_1, y_3) , \quad (\text{E.3a})$$

$$\Theta(-x^5; -y_1, -y_2) = \Theta(x^5; y_2, y_1) = -\Theta(x^5; y_1, y_2) , \quad (\text{E.3b})$$

$$\Theta(X, Y_1, Y_2) + \Theta(X, Y_3, Y_4) = \Theta(X, Y_1, Y_4) + \Theta(X, Y_3, Y_2) . \quad (\text{E.3c})$$

それぞれの性質について、簡単に導出を示す。性質 (E.3a) について、左辺を変形すると、

$$\begin{aligned} \Theta(x^5; y_1, y_2) + \Theta(x^5; y_2, y_3) &= \theta(x^5 - y_1) - \theta(x^5 - y_2) + \theta(x^5 - y_2) - \theta(x^5 - y_3) \\ &= \theta(x^5 - y_1) - \theta(x^5 - y_3) = \Theta(x^5; y_1, y_3) \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

と右辺が導ける。これは図を書くと明らかである。性質 (E.3b) について、階段関数の性質 $\theta(-x) = 1 - \theta(x)$ を用いて左辺を変形すると、

$$\begin{aligned} \Theta(-x^5; -y_1, -y_2) &= \theta(-x^5 + y_1) - \theta(-x^5 + y_2) \\ &= -\theta(x^5 - 1) + \theta(x^5 - y_2) \\ &= \Theta(x^5; y_2, y_1) = -\Theta(x^5; y_1, y_2) \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

となり、右辺が導ける。性質 (E.3c) について、左辺を展開して組み替えると、

$$\begin{aligned} \Theta(X, Y_1, Y_2) + \Theta(X, Y_3, Y_4) &= \theta(X - Y_1) - \theta(X - Y_2) + \theta(X - Y_3) - \theta(X - Y_4) \\ &= \Theta(X, Y_1, Y_4) + \Theta(X, Y_3, Y_2) \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

と右辺が得られる。

■CS 項の係数の計算 いま、ゼロモードの絶対値二乗に比例してバルクに広がったアノマリーを、2つの固定点 $y_0 = 0$ と $y_1 = \pi R$ に等しく流入させることを考える。そのためには、ある点 y におけるアノマリーを、半分は固定点 y_0 へ流入させ、もう半分は y_1 へと流入させればよい。このとき、2つの流入は互いに逆向きである。最後に y について積分すれば、ゼロモードのアノマリーを相殺するような CS 項の係数が得られる。したがって、ゼロモードの分布を $\rho(y)$ と書くと、計算すべき CS 項の係数は次のように書ける:

$$F(x^5) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi R} dy [\Theta(x^5; 0, y) - \Theta(x^5; y, \pi R)] \rho(y). \quad (\text{E.7})$$

ここで、 $\Theta(x^5; 0, y)$ 、 $\Theta(x^5; y, \pi R)$ はそれぞれ $x^5 = 0$ から $x^5 = y$ と、 $x^5 = y$ から $x^5 = \pi R$ の流入を表し、互いに逆向きとしている。式 (E.7) の矩形関数部分を展開すると、

$$\Theta(x^5; 0, y) - \Theta(x^5; y, \pi R) = \theta(x^5) + \theta(x^5 - \pi R) - 2\theta(x^5 - y) \quad (\text{E.8})$$

と書ける。 $\theta(x^5) + \theta(x^5 - \pi R)$ は $0 \leq y \leq \pi R$ において 1 である。一方、 $\theta(x^5 - y)$ は $x^5 > y$ のときのみ 1 であり、それ以外では 0 であるので、式 (E.7) は

$$F(x^5) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi R} dy \rho(y) - \int_0^{x^5} dy \rho(y) \quad (\text{E.9})$$

と表せる。

いま、電荷密度 $\rho(y)$ の具体例として、第 4.3 節のセットアップにおけるゼロモード $\xi_{L,0}^{(1)}$ の分布を考える:

$$\rho^{(1)}(y) = \left| \xi_{L,0}^{(1)}(y) \right|^2 = N^2 e^{2my} = \frac{m e^{-m\pi R}}{\sinh(m\pi R)} e^{2my}. \quad (\text{E.10})$$

このとき、式 (E.9) の第 1 項の積分はゼロモード波動関数の規格化条件から 1 となる:

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi R} dy \rho^{(1)}(y) = \frac{1}{2}. \quad (\text{E.11})$$

一方、第 2 項の積分は

$$\int_0^{x^5} dy \rho(y) = \frac{N^2}{2m} [e^{2my}]_0^{x^5} = \frac{e^{-m\pi R}}{2 \sinh(m\pi R)} (e^{2mx^5} - 1) \quad (\text{E.12})$$

と計算できる。以上より、 $F^{(1)}(x^5)$ は

$$\begin{aligned} F^{(1)}(x^5) &\equiv \frac{1}{2} \int_0^{\pi R} dy [\Theta(x^5; 0, y) - \Theta(x^5; y, \pi R)] \rho^{(1)}(y) \\ &= \frac{1}{2 \sinh(m\pi R)} \left[\sinh(m\pi R) + e^{-m\pi R} - e^{2m(x^5 - \pi R/2)} \right] \\ &= \frac{1}{2 \sinh(m\pi R)} \left[\cosh(m\pi R) - e^{2m(x^5 - \pi R/2)} \right] \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

と求められる。

次に、KK モードの和から CS 項の係数を求め、上述のアノマリー流入から求めた係数 (E.13) と一致することを確かめる。KK モードの和で表した CS 項の係数関数 (4.50) は

$$u^{(1)}(y) = \sum_n \frac{1}{m_n} \xi_{n,R}^{(i)}(y) \xi_{n,L}^{(i)}(y) \quad (\text{E.14})$$

である。式 (4.54) で求めたように、KK モード関数は

$$\xi_{n,R}^{(i)} = \sqrt{\frac{2}{\pi R}} \sin\left(\frac{n}{R}y\right), \quad (\text{E.15})$$

$$\xi_{n,L}^{(i)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi R} m_n} \left[m_i \sin\left(\frac{n}{R}y\right) + \frac{n}{R} \cos\left(\frac{n}{R}y\right) \right] \quad (\text{E.16})$$

であり, $m_n^2 = m^2 + (n/R)^2$ である。KK モード関数を公式 (E.14) に代入すると,

$$\begin{aligned} u^{(1)}(y) &= \frac{2}{\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 + (n/R)^2} \left[m \sin^2\left(\frac{n}{R}y\right) + \frac{n}{R} \cos\left(\frac{n}{R}y\right) \sin\left(\frac{n}{R}y\right) \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(mR)^2 + n^2} \left[\frac{mR}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2n}{R}y\right)\right) + \frac{n}{2} \sin\left(\frac{2n}{R}y\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

と書ける。ここで, 無限和の公式 [78]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + n^2} = \frac{\pi}{2a} \coth(a\pi) - \frac{1}{2a^2}, \quad (\text{E.18a})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{a^2 + n^2} = \frac{\pi}{2a} \frac{\cosh(a(\pi - x))}{\sinh(a\pi)} - \frac{1}{2a^2} \quad [0 \leq x \leq 2\pi], \quad (\text{E.18b})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin(nx)}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2} \frac{\sinh(a(\pi - x))}{\sinh(a\pi)} \quad [0 < x < 2\pi] \quad (\text{E.18c})$$

を用いると, 各項はそれぞれ

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \frac{mR}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(mR)^2 + n^2} &= \frac{mR}{\pi} \left[\frac{\pi}{2mR} \coth(\pi mR) - \frac{1}{2(mR)^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\coth(\pi mR) - \frac{1}{2\pi mR} \right], \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

$$\begin{aligned} -\frac{2}{\pi} \frac{mR}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{2n}{R}y\right)}{(mR)^2 + n^2} &= -\frac{mR}{\pi} \left[\frac{\pi}{2mR} \frac{\cosh[mR(\pi - 2y/R)]}{\sinh(\pi mR)} - \frac{1}{2(mR)^2} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\cosh[mR(\pi - 2y/R)]}{\sinh(\pi mR)} - \frac{1}{2\pi mR} \right], \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

$$\begin{aligned} -\frac{2}{\pi} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin\left(\frac{2n}{R}y\right)}{(mR)^2 + n^2} &= \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2} \frac{\sinh[mR(\pi - 2y/R)]}{\sinh(\pi mR)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sinh[mR(\pi - 2y/R)]}{\sinh(\pi mR)} \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

と計算できる。よって

$$\begin{aligned} u^{(1)}(y) &= \frac{1}{2 \sinh(\pi mR)} \left[\cosh(\pi mR) - \cosh[mR(\pi - 2y/R)] + \sinh[mR(\pi - 2y/R)] \right] \\ &= \frac{1}{2 \sinh(\pi mR)} \left[\cosh(\pi mR) - e^{[2m(y - \pi R/2)]} \right] \end{aligned} \quad (\text{E.22})$$

とまとめられる。これは KK モードの和で計算した式 (E.13) の $F^{(1)}$ と一致する。したがって, CS 項の係数について, 式 (E.7) で考えたアノマリー流入から求めたものと, KK モード関数の和から求めたものが一致することが, 具体的な場合について確かめられた。 $\rho^{(2)}(y)$ の場合についても同様の結果を得る。

■本文の計算との関係 5次元のフェルミオンゼロモードがバルクに広がっているときに生成される CS 項は (係数は除いて) 次のように与えられる:

$$\mathcal{L} = \int dx^5 F(x^5) A_5 F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (\text{E.23})$$

$$F(x^5) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi R} dy [\Theta(x^5; 0, y) - \Theta(x^5; y, \pi R)] \rho(y). \quad (\text{E.24})$$

ここで, $A_5 F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$ が全てゼロモードを持つ場合を考えると, $F(x^5)$ を積分して残るのは $x^5 = \pi R/2$ 周りで対称な部分である。このあと示すが, $F(x^5)$ に含まれる矩形関数のうち, $x^5 = \pi R/2$ について対称な部分 (以下では

“ x^5 -even” と表現する) は $y = \pi R/2$ 周りについて反対称 (y -odd) である。反対に, x^5 -odd な部分は y -even である。 x^5 積分をして残るのは x^5 -even な部分である。さらに, x^5 -even な矩形関数を掛けた上で y 積分をして残るのは, $\rho(y)$ の y -odd な部分である。第 4.3.1 節での計算に用いた, 式 (4.37) における $\rho(y)$ は, ちょうど y -odd であった。以上の議論から, $\rho(y)$ が y -odd でなくても, $A_5 F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$ が全てゼロモードを持つならば, $\rho(y)$ の y -odd な部分のみが CS 項の係数に寄与することが分かる。矩形関数については, x^5 -even (y -odd) な部分がちょうど, 第 4.3.1 節での計算に用いた矩形関数 (4.40) であることを確認する。

$F(x^5)$ に含まれる矩形関数の $x^5 = \pi R/2$ 周りの偶奇性を考えるために, 座標を $X = x^5 - \pi R/2, Y = y - \pi R/2$ と座標変換する。この座標変換の下で, 矩形関数は

$$\begin{aligned}\Theta(x^5; 0, y) &= \Theta(X + \pi R/2; 0, Y + \pi R/2) \\ &= \theta(X + \pi R/2 - 0) - \theta(X + \pi R/2 - (Y + \pi R/2)) \\ &= \theta(X - (-\pi R/2)) - \theta(X - Y) = \Theta(X; -\pi R/2, Y),\end{aligned}\tag{E.25}$$

$$\begin{aligned}\Theta(x^5; y, \pi R) &= \Theta(X + \pi R/2; Y + \pi R/2, \pi R) \\ &= \theta(X + \pi R/2 - Y + \pi R/2) - \theta(X + \pi R/2 - \pi R) \\ &= \theta(X - Y) - \theta(X - \pi R/2) = \Theta(X; Y, \pi R/2)\end{aligned}\tag{E.26}$$

と書ける。つまり, $F(x^5)$ に含まれる矩形関数部分は

$$\Theta(x^5; 0, y) - \Theta(x^5; y, \pi R) = \Theta(X; -\pi R/2, Y) - \Theta(X; Y, \pi R/2)\tag{E.27}$$

と書き換えられる。この関数は変換 $(X, Y) \rightarrow (-X, -Y)$ のもとで符号が反転する (奇である) ことが, 次の関係式から確かめられる:

$$\Theta(-X; -\pi R/2, -Y) = \Theta(X; Y, \pi R/2), \quad \Theta(-X; -Y, \pi R/2) = \Theta(X; -\pi R/2, Y).\tag{E.28}$$

$(X, Y) \rightarrow (-X, -Y)$ と 2 つの変換を同時にすると奇であるので, それぞれの変換に分けて考えると, $P_X: X \rightarrow -X$ で偶かつ $P_Y: Y \rightarrow -Y$ で奇な部分と, $P_X: X \rightarrow -X$ で奇かつ $P_Y: Y \rightarrow -Y$ で偶な部分に分けられる¹。以上のことは, 以下のようにまとめられる:

$$(P_X \times P_Y)\text{-odd} = (P_X\text{-odd}, P_Y\text{-even}) + (P_X\text{-even}, P_Y\text{-odd}).\tag{E.29}$$

上の主張を具体的に確かめるために, $F(x^5)$ の矩形関数部分を

$$f(X, Y) = \Theta(X; -\pi R/2, Y) - \Theta(X; Y, \pi R/2)\tag{E.30}$$

と書き, Y について (反) 対称部分を考える:

$$\begin{aligned}f_{Y\text{-even/odd}}(X, Y) &= \frac{1}{2}[f(X, Y) \pm f(X, -Y)] \\ &= \frac{1}{2}\left[\Theta(X; -\pi R/2, Y) \pm \Theta(X; -\pi R/2, -Y)\right]\end{aligned}\tag{E.31a}$$

$$- \frac{1}{2}\left[\Theta(X; Y, \pi R/2) \pm \Theta(X; -Y, \pi R/2)\right].\tag{E.31b}$$

上式 2 行目 (E.31a) で $X \rightarrow -X$ としたものは,

$$\begin{aligned}\Theta(-X; -\pi R/2, Y) \pm \Theta(-X; -\pi R/2, -Y) &= \Theta(X; -Y, \pi R/2) \pm \Theta(X; Y, \pi R/2) \\ &= \pm\left[\Theta(X; Y, \pi R/2) \pm \Theta(X; -Y, \pi R/2)\right]\end{aligned}\tag{E.32}$$

¹ 一般には, 2 つの変換を合わせて奇なものも考えられるが, あとで見るように, 式 (E.27) にはそのような項は含まれない。

と変形できて、式 (E.31b) と符号を除いて一致する。同様に式 (E.31b) で $X \rightarrow -X$ としたものは、

$$\begin{aligned}\Theta(-X; Y, \pi R/2) \pm \Theta(-X; -Y, \pi R/2) &= \Theta(X; -\pi R/2, -Y) \pm \Theta(X; -\pi R/2, Y) \\ &= \pm \left[\Theta(X; -\pi R/2, Y) \pm \Theta(X; -\pi R/2, -Y) \right]\end{aligned}\quad (\text{E.33})$$

と変形できて、式 (E.31a) と符号を除いて一致する。したがって、 $f_{Y\text{-even/odd}}(X, Y)$ の $X \rightarrow -X$ の下での偶奇性が分かる。式 (E.31b) の前のマイナス符号に気をつけると、

$$f_{Y\text{-even/odd}}(-X, Y) = \mp f_{Y\text{-even/odd}}(X, Y) \quad (\text{E.34})$$

である。つまり、 $Y = 0$ について偶 (奇) な部分は $X = 0$ について奇 (偶) となっている。さらに、 $P_X \times P_Y$ を同時に作用させたときのみ奇になる項はないことがわかる。

そこで改めて $f_{Y\text{-even/odd}}(X, Y)$ を

$$f_{(\mp, \pm)}(X, Y) = \frac{1}{2} [f(X, Y) \pm f(X, -Y)] \quad (\text{E.35})$$

と書くことにする。ここで添字の (\mp, \pm) は (P_X, P_Y) に対応させることにする。

具体的に、 $f_{(\mp, \pm)}(X, Y)$ を求める。まず、 $f_{(+, -)}(X, Y)$ は

$$f_{(+, -)}(X, Y) = \frac{1}{2} \left[\Theta(X, -\pi R/2, Y) - \Theta(X; -\pi R/2, -Y) - \Theta(X; Y, \pi R/2) + \Theta(X; -Y, \pi R/2) \right] \quad (\text{E.36})$$

と書き下せる。第 1, 2 項は

$$\begin{aligned}\Theta(X, -\pi R/2, Y) - \Theta(X; -\pi R/2, -Y) &= \Theta(X, -\pi R/2, Y) + \Theta(X; -Y, -\pi R/2) \\ &= \Theta(X, -Y, Y)\end{aligned}\quad (\text{E.37})$$

とまとめられる。ここで 1 つ目の等式では性質 (E.3b) を、2 つ目の等式では性質 (E.3a) を用いた。同様に、第 3 項と第 4 項は

$$-\Theta(X; Y, \pi R/2) + \Theta(X; -Y, \pi R/2) = +\Theta(X; \pi R/2, Y) + \Theta(X; -Y, \pi R/2) = \Theta(X, -Y, Y) \quad (\text{E.38})$$

とまとめられる。したがって、 $f_{(+, -)}(X, Y)$ は次のように変形できる:

$$f_{(+, -)}(X, Y) = \Theta(X, -Y, Y) . \quad (\text{E.39})$$

ここで $\Theta(X, -Y, Y)$ の座標をもとに戻すと

$$\begin{aligned}\Theta(X, -Y, Y) &= \Theta(x^5 - \pi R/2; -y + \pi R/2, y - \pi R/2) \\ &= \theta(x^5 - \pi R/2 - (-y + \pi R/2)) - \theta(x^5 - \pi R/2 - (y - \pi R/2)) \\ &= \theta(x^5 + y - \pi R) - \theta(x^5 - y) = \Theta(x^5; \pi R - y, y)\end{aligned}\quad (\text{E.40})$$

となる。これは本文で用いている矩形関数 (4.40) (または式 (E.1)) に一致する。

同様に、 $f_{(+, -)}(X, Y)$ について考える:

$$f_{(-, +)}(X, Y) = \frac{1}{2} \left[\Theta(X, -\pi R/2, Y) + \Theta(X; -\pi R/2, -Y) - \Theta(X; Y, \pi R/2) - \Theta(X; -Y, \pi R/2) \right] . \quad (\text{E.41})$$

第 2 項と第 3 項は

$$\begin{aligned}\Theta(X; -\pi R/2, -Y) - \Theta(X; Y, \pi R/2) &= \Theta(X; -\pi R/2, -Y) + \Theta(X; \pi R/2, Y) \\ &= \Theta(X; -\pi R/2, Y) + \Theta(X; \pi R/2, -Y)\end{aligned}\quad (\text{E.42})$$

と変形できる。ここで 1 つ目の等式では性質 (E.3b), 2 つ目の等式では性質 (E.3c) を用いた。式 (E.42) の右辺第 1 項は式 (E.41) の右辺第 1 項, 式 (E.42) の右辺第 2 項は式 (E.41) の第 4 項と一致している。したがって、

$$f_{(-, +)}(X, Y) = \Theta(X; -\pi R/2, Y) + \Theta(X; \pi R/2, -Y) \quad (\text{E.43})$$

とまとめられる。

以上、ゼロモードの分布が $y = \pi R/2$ 周りで反対称でないような分布に対しても適用できるような矩形関数について議論した。本文に現れたゼロモードの分布 $\rho(y)$ は $y = \pi R/2$ 周りで反対称であったが、そうでない場合に対しても、 $y = \pi R/2$ 周りで反対称な成分のみが CS 項の係数に寄与することがわかる。

参考文献

- [1] G. Degrandi, S. Di Vita, J. Elias-Miro, J. Espinosa, G. Giudice, G. Isidori, and A. Strumia, *JHEP* **08**, 098 (2012), [arXiv: 1205.6497 [hep-ph]].
- [2] D. Buttazzo, G. Degrandi, P. Giardino, G. Giudice, F. Sala, A. Salvio, and A. Strumia, *JHEP* **12**, 089 (2013), [arXiv: 1307.3536 [hep-ph]].
- [3] F. Bezrukov, M. Kalmykov, B. Kniehl, and M. Shaposhnikov, *JHEP* **10**, edited by G. Moortgat-Pick, 140 (2012), [arXiv: 1205.2893 [hep-ph]].
- [4] N. Manton, *Nucl. Phys. B* **158**, 141–153 (1979).
- [5] D. Fairlie, *J. Phys. G* **5**, L55 (1979).
- [6] D. Fairlie, *Phys. Lett. B* **82**, 97–100 (1979).
- [7] B. He, N. Okada, and Q. Shafi, *Phys. Lett. B* **716**, 197–202 (2012), [arXiv: 1205.4038 [hep-ph]].
- [8] P. Fayet, *Phys. Lett. B* **78**, 417–420 (1978).
- [9] J. Polchinski and L. Susskind, *Phys. Rev. D* **26**, 3661 (1982).
- [10] P. Fox, A. Nelson, and N. Weiner, *JHEP* **08**, 035 (2002), [arXiv: hep-ph/0206096].
- [11] J. Unwin, *Phys. Rev. D* **86**, 095002 (2012), [arXiv: 1210.4936 [hep-ph]].
- [12] P. Fox, G. Kribs, and A. Martin, *Phys. Rev. D* **90**, 075006 (2014), [arXiv: 1405.3692 [hep-ph]].
- [13] Y. Hosotani, *Phys. Lett. B* **126**, 309–313 (1983).
- [14] Y. Hosotani, *Phys. Lett. B* **129**, 193–197 (1983).
- [15] Y. Hosotani, *Phys. Rev. D* **29**, 731 (1984).
- [16] Y. Hosotani, *Annals Phys.* **190**, 233 (1989).
- [17] N. Haba, S. Matsumoto, N. Okada, and T. Yamashita, *JHEP* **02**, 073 (2006), [arXiv: hep-ph/0511046].
- [18] N. Haba, S. Matsumoto, N. Okada, and T. Yamashita, *Prog. Theor. Phys.* **120**, 77–98 (2008), [arXiv: 0802.3431 [hep-ph]].
- [19] S. Choi, M. Drees, A. Freitas, and P. Zerwas, *Phys. Rev. D* **78**, 095007 (2008), [arXiv: 0808.2410 [hep-ph]].
- [20] G. Kribs and A. Martin, *Phys. Rev. D* **85**, 115014 (2012), [arXiv: 1203.4821 [hep-ph]].
- [21] G. Chalons, M. Goodsell, S. Kraml, H. Reyes-González, and S. Williamson, *JHEP* **04**, 113 (2019), [arXiv: 1812.09293 [hep-ph]].
- [22] M. Goodsell, S. Kraml, H. Reyes-González, and S. Williamson, *SciPost Phys.* **9**, 047 (2020), [arXiv: 2007.08498 [hep-ph]].
- [23] L. Carpenter, *JHEP* **09**, 102 (2012), [arXiv: 1007.0017 [hep-th]].
- [24] C. Csaki, J. Goodman, R. Pavesi, and Y. Shirman, *Phys. Rev. D* **89**, 055005 (2014), [arXiv: 1310.4504 [hep-ph]].
- [25] D. M. Alves, J. Galloway, M. McCullough, and N. Weiner, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 161801 (2015), [arXiv: 1502.03819 [hep-ph]].
- [26] D. M. Alves, J. Galloway, M. McCullough, and N. Weiner, *Phys. Rev. D* **93**, 075021 (2016), [arXiv: 1502.05055 [hep-ph]].

- [27] E. Bertuzzo, C. Frugiuele, T. Gregoire, and E. Ponton, *JHEP* **04**, 089 (2015), [arXiv: 1402.5432 [hep-ph]].
- [28] P. Dießner, J. Kalinowski, W. Kotlarski, and D. Stöckinger, *JHEP* **12**, 124 (2014), [arXiv: 1410.4791 [hep-ph]].
- [29] P. Diessner, J. Kalinowski, W. Kotlarski, and D. Stöckinger, *Adv. High Energy Phys.* **2015**, 760729 (2015), [arXiv: 1504.05386 [hep-ph]].
- [30] H. Nakano and M. Yoshikawa, *PTEP* **2016**, 033B01 (2016), [arXiv: 1512.02377 [hep-ph]].
- [31] H. Georgi and S. Glashow, *Phys. Rev. Lett.* **32**, 438–441 (1974).
- [32] E. Witten, *Nucl. Phys. B* **188**, 513 (1981).
- [33] S. Dimopoulos, S. Raby, and F. Wilczek, *Phys. Rev. D* **24**, 1681–1683 (1981).
- [34] S. Dimopoulos and H. Georgi, *Nucl. Phys. B* **193**, 150–162 (1981).
- [35] N. Sakai, *Z. Phys. C* **11**, 153 (1981).
- [36] K. Kojima, K. Takenaga, and T. Yamashita, *Phys. Rev. D* **84**, 051701 (2011), [arXiv: 1103.1234 [hep-ph]].
- [37] K. Kojima, K. Takenaga, and T. Yamashita, *Phys. Rev. D* **95**, 015021 (2017), [arXiv: 1608.05496 [hep-ph]].
- [38] T. Yamashita, *Phys. Rev. D* **84**, 115016 (2011), [arXiv: 1106.3229 [hep-ph]].
- [39] M. Kakizaki, S. Kanemura, H. Taniguchi, and T. Yamashita, *Phys. Rev. D* **89**, 075013 (2014), [arXiv: 1312.7575 [hep-ph]].
- [40] K. Dienes and J. March-Russell, *Nucl. Phys. B* **479**, 113–172 (1996), [arXiv: hep-th/9604112].
- [41] D. Lewellen, *Nucl. Phys. B* **337**, 61–86 (1990).
- [42] G. Aldazabal, A. Font, L. Ibanez, and A. Uranga, *Nucl. Phys. B* **452**, 3–44 (1995), [arXiv: hep-th/9410206].
- [43] J. Erler, *Nucl. Phys. B* **475**, 597–626 (1996), [arXiv: hep-th/9602032].
- [44] Z. Kakushadze and S. Tye, *Phys. Rev. D* **55**, 7878–7895 (1997), [arXiv: hep-th/9610106].
- [45] Z. Kakushadze and S. Tye, *Phys. Rev. D* **55**, 7896–7908 (1997), [arXiv: hep-th/9701057].
- [46] M. Ito, S. Kuwakino, N. Maekawa, S. Moriyama, K. Takahashi, K. Takei, S. Teraguchi, and T. Yamashita, *Phys. Rev. D* **83**, 091703 (2011), [arXiv: 1012.1690 [hep-ph]].
- [47] M. Ito, S. Kuwakino, N. Maekawa, S. Moriyama, K. Takahashi, K. Takei, S. Teraguchi, and T. Yamashita, *JHEP* **12**, 100 (2011), [arXiv: 1104.0765 [hep-th]].
- [48] C. Lim and N. Maru, *Phys. Lett. B* **653**, 320–324 (2007), [arXiv: 0706.1397 [hep-ph]].
- [49] Y. Hosotani and N. Yamatsu, *PTEP* **2015**, 111B01 (2015), [arXiv: 1504.03817 [hep-ph]].
- [50] A. Furui, Y. Hosotani, and N. Yamatsu, *PTEP* **2016**, 093B01 (2016), [arXiv: 1606.07222 [hep-ph]].
- [51] N. Maru and Y. Yatagai, *Eur. Phys. J. C* **80**, 933 (2020), [arXiv: 1911.03465 [hep-ph]].
- [52] N. Maru and Y. Yatagai, *PTEP* **2019**, 083B03 (2019), [arXiv: 1903.08359 [hep-ph]].
- [53] K. Kojima, K. Takenaga, and T. Yamashita, *JHEP* **06**, 018 (2017), [arXiv: 1704.04840 [hep-ph]].
- [54] Y. Kawamura, *Prog. Theor. Phys.* **103**, 613–619 (2000), [arXiv: hep-ph/9902423].
- [55] Y. Kawamura, *Prog. Theor. Phys.* **105**, 691–696 (2001), [arXiv: hep-ph/0012352].
- [56] Y. Kawamura, *Prog. Theor. Phys.* **105**, 999–1006 (2001), [arXiv: hep-ph/0012125].
- [57] L. Hall and Y. Nomura, *Phys. Rev. D* **64**, 055003 (2001), [arXiv: hep-ph/0103125].
- [58] L. Hall and Y. Nomura, *Phys. Rev. D* **65**, 125012 (2002), [arXiv: hep-ph/0111068].
- [59] L. Hall and Y. Nomura, *Phys. Rev. D* **66**, 075004 (2002), [arXiv: hep-ph/0205067].
- [60] N. Arkani-Hamed, T. Gregoire, and J. Wacker, *JHEP* **03**, 055 (2002), [arXiv: hep-th/0101233].
- [61] C. Callan Jr. and J. Harvey, *Nucl. Phys. B* **250**, 427–436 (1985).

- [62] N. Arkani-Hamed, A. Cohen, and H. Georgi, Phys. Lett. B **516**, 395–402 (2001), [arXiv: hep-th/0103135].
- [63] C. Scrucca, M. Serone, L. Silvestrini, and F. Zwirner, Phys. Lett. B **525**, 169–174 (2002), [arXiv: hep-th/0110073].
- [64] L. Pilo and A. Riotto, Phys. Lett. B **546**, 135–142 (2002), [arXiv: hep-th/0202144].
- [65] H. Nakano, M. Sato, O. Seto, and T. Yamashita, to be published in PTEP, <https://doi.org/10.1093/ptep/ptac031> (2022), [arXiv: 2201.04428 [hep-ph]].
- [66] J. Wess and J. A. Bagger, *Supersymmetry and supergravity; 2nd ed.* Princeton Series in Physics (Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1992).
- [67] S. P. Martin, Adv. Ser. Direct. High Energy Phys. **18**, edited by G. L. Kane, 1–98 (1998), [arXiv: hep-ph/9709356].
- [68] N. Arkani-Hamed, A. Cohen, and H. Georgi, Phys. Rev. Lett. **86**, 4757–4761 (2001), [arXiv: hep-th/0104005].
- [69] N. Haba, M. Harada, Y. Hosotani, and Y. Kawamura, Nucl. Phys. B **657**, [Erratum: Nucl.Phys.B 669, 381–382 (2003)], 169–213 (2003), [arXiv: hep-ph/0212035].
- [70] S. Dimopoulos and F. Wilczek, Report. No. NSF-ITP-82-07 (1981).
- [71] M. Srednicki, Nucl. Phys. B **202**, 327–335 (1982).
- [72] K. Babu and S. Barr, Phys. Rev. D **48**, 5354–5364 (1993), [arXiv: hep-ph/9306242].
- [73] S. Barr and S. Raby, Phys. Rev. Lett. **79**, 4748–4751 (1997), [arXiv: hep-ph/9705366].
- [74] N. Maekawa, Prog. Theor. Phys. **106**, 401–418 (2001), [arXiv: hep-ph/0104200].
- [75] N. Maekawa and T. Yamashita, Prog. Theor. Phys. **107**, 1201–1233 (2002), [arXiv: hep-ph/0202050].
- [76] N. Maekawa and T. Yamashita, Prog. Theor. Phys. **110**, 93–105 (2003), [arXiv: hep-ph/0303207].
- [77] H. Nakano, M. Sato, O. Seto, and T. Yamashita, in preparation.
- [78] 森口, 宇田川, 一松, 岩波数学公式 II 級数・フーリエ解析 (岩波書店, 1987).
- [79] R. Barbieri, L. J. Hall, and Y. Nomura, Nucl. Phys. B **624**, 63–80 (2002), [arXiv: hep-th/0107004].
- [80] 林, 素粒子の標準模型を超えて, 現代理論物理学シリーズ (丸善出版, 2015).
- [81] 細谷, ゲージヒッグス統合理論: 素粒子標準理論のその先へ, SGC ライブラリ (サイエンス社, 2018).
- [82] 神部, 有馬, 物理のための数学入門 複素関数論 (共立出版, 1991).
- [83] K. Fujikawa and H. Suzuki, *Path integrals and quantum anomalies*, International Series of Monographs on Physics (Clarendon Press, 2004).
- [84] K. Fujikawa, Phys. Rev. Lett. **42**, 1195–1198 (1979).