

慣性質量要素を有する振動制御デバイスを
取付けた構造系の動的最適設計に関する研究

令和 3 年 8 月

山崎 一生

新潟大学大学院自然科学研究科博士後期課程

材料生産システム専攻

目次

第1章 緒論	3
1.1 慣性質量要素とその歴史的背景	3
1.2 配管系の動的設計と IMD	8
1.3 IMD に関するセミアクティブ制御	10
1.4 本研究の目的および論文構成	11
参考文献	12
第2章 IMD 付配管系の動的最適設計：1 台適用 1 型式選定の場合	17
2.1 緒言	17
2.2 IMD を設置した配管系のモデル化	17
2.3 最適設計問題の定式化	25
2.4 設計例	28
2.4.1 全長 13 m のはりの場合（固有振動数が低い場合）	29
2.4.2 全長 9 m のはりの場合（固有振動数が高い場合）	31
2.5 結言	32
参考文献	32
第3章 IMD 付配管系の動的最適設計：多台適用多型式選定の場合	33
3.1 緒言	33
3.2 IMD を設置した配管系のモデル化	33
3.3 最適設計問題の定式化	39
3.4 設計例	44
3.4.1 $w_c = 10^3$ の場合（経済性を重視する場合）	44
3.4.2 $w_c = 0$ の場合（振動抑制性能のみを考慮する場合）	46
3.4.3 $w_c = 1$ の場合（振動抑制性能と経済性の両方を考慮する場合）	48
3.4.4 周波数応答に基づく考察	50
3.5 結言	55
参考文献	55
第4章 可変 IMD を適用した構造系のセミアクティブ制御	57
4.1 緒言	57
4.2 記号の定義	57
4.3 構造系と可変 IMD のモデル	58
4.4 可変 IMD によるセミアクティブ制御	59
4.5 シミュレーション	64
4.6 結言	73
参考文献	73
第5章 結論	75
付録 A w_p および w_c の設定の目安	77
付録 B IMD 付三次元配管系のモデル化のまとめ	81
B.1 内容説明	81
B.2 記号の定義	81
B.3 IMD を設置した三次元配管系のモデル化	85
参考文献	103
謝辞	105

第1章 緒論

1.1 慣性質量要素とその歴史的背景

機械力学の力学モデル上の要素として、質量（もしくは、物体の空間における代表点としての質点）、ばね、ダッシュポット等があり、これらは、良く知られている。これらの要素を組み合わせることで実際の構造の特性を近似した力学モデルが作成される。ばねとダッシュポットは、他の要素と相互接続できる両端を備えるものであり、それぞれ、自身の両端間の相対変位と相対速度に比例した力を発生する要素であり、質量は、他の要素と相互接続できる一つの点を備えるものであり、絶対加速度に比例した力を発生する要素である。

上記の要素と比較すると新しい概念である、力学モデルという同じ枠組の中で用いることのできるもう一つの要素がある。それは、他の要素と相互接続できる両端を備えるものであり、それぞれ、自身の両端間の相対加速度に比例した力を発生する要素であり、「慣性質量」と呼ばれる（様々な名称で呼ばれることがあるが、これについては後で補足する）。この慣性質量要素は、力学モデルとして例えば図 1-1 のように描かれる。

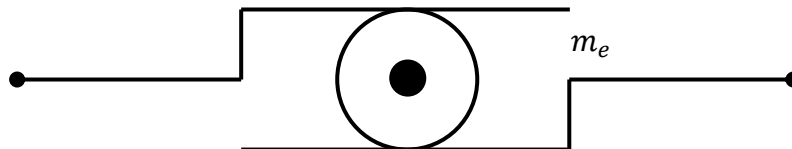


図 1-1 慣性質量要素の力学モデル図示例

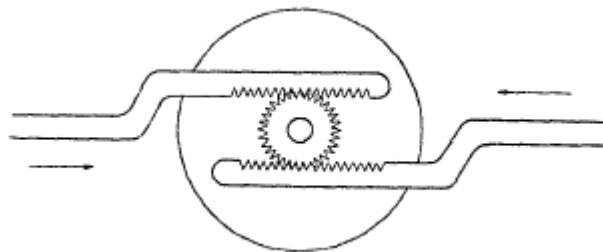


図 1-2 ラック・アンド・ピニオンとフライホイールからなる慣性質量効果を発揮する機構（文献[5]の第 7 図を引用）

本図は、両端を有する要素であることを直接的に表しており、また、その両端から伸びる2対の直線部はラックを、中央の円はピニオン付きのフライホイールのようなものを具象している。図 1-1 で具象した構成部品をより明確にするならば図 1-2 のように表せる。

物理量としての慣性質量[kg]（要素の両端間の相対加速度に乗ずることで力を与える係数）は、回転体の回転運動による運動エネルギーと要素両端間の並進運動による運動エネルギーの等価性から導出される（この等価性を考慮したものであるという文脈の中で、もしくは、そのようなものであるという含意を帯びた表現として、慣性質量は等価質量と呼ばれることもある）。この導出の詳細は、図 1-2 のラック・アンド・ピニオンによる方式とは異なるが、同様に回転体を具備する、ボールねじによって並進運動を回転運動に変換する方式のデバイスの場合について、Sunakoda and Yamazaki の 2017 年の文献[1]で確認できる。

また、文献[1]では、慣性質量を有する振動制御デバイスは、inertia mass damper（慣性質量ダンパ）の略として I.M.D. と呼ばれており、本論文では、これに倣い、このようなデバイスを「IMD」と総称する（そのピリオドは省略）。IMD の回転体周りの摺動の存在を近似的に考慮した、または、回転体周りに積極的に大きな減衰を付加した場合を表現するモデルとして、図 1-3 (a) 「単純モデル (simple model)」が考えられる。更には、より現実的には荷重伝達部材の変形が考えられるため、（特段に実際の付加的なばねを IMD に直列に接続することはないとしても）変形を考慮したばねが直列に接続される図 1-3 (b) 「より現実的なモデル (more realistic model)」を考慮することの重要性が示唆された。本論文では、このより現実的なモデルを前提とした IMD を配管系や建屋系のような構造系に適用することを考える。

図 1-3 (a) の単純モデルは (b) のより現実的なモデルのばねがない場合である。そのようなモデルは、デバイスの荷重伝達部材の剛性が大きく、これと慣性質量から決定さ

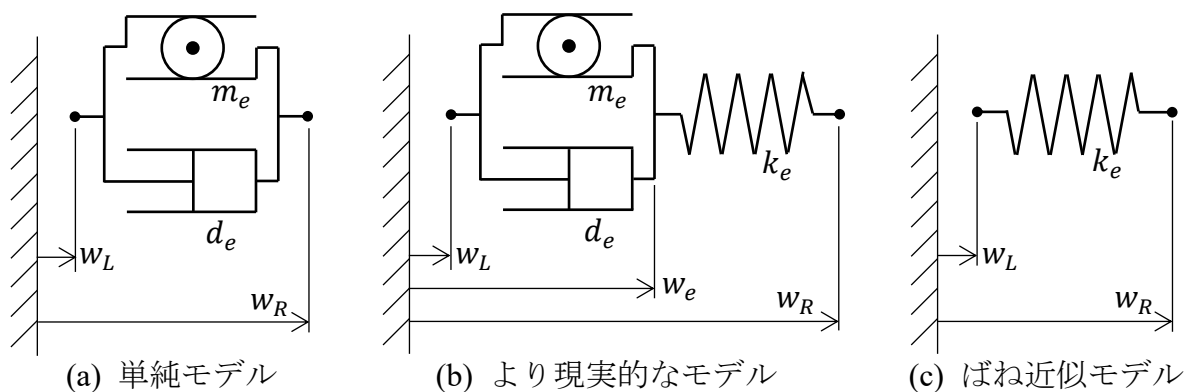


図 1-3 IMD の力学モデル

れる IMD 単体が持つ固有振動数に対して、使用する振動数域が明らかに低い場合には近似的に正当化される。しかし、著者のいくつかのボールねじ式 IMD の装置設計、試作試験、簡単な机上検討の経験からは、例えば、慣性質量を大きくすればするほど、理論上応答低減の高い性能が得られるような場合があっても、実際にはばね要素を無視することはできず、そのばね要素と慣性質量の値から決まる IMD 単体固有振動数が小さくなることから、構造系の振動抑制で使用される振動数域が IMD 単体固有振動数よりも小さいという条件が破綻する場合がしばしばあった。これは、現実的に妥当なコスト制限の下では剛性を大きく高めることが困難であることに起因している。このことから、少なくともボールねじ式 IMD の場合、(a)の単純モデルで現実的な振動問題のための設計検討を行うことは、適用できる場合が限られると考える。

慣性質量を有する振動制御装置に対する注目は、2000 年代より徐々に高まり、現在も精力的に研究されている。強い関心が集まっている理由の一つには、ケンブリッジ大学の Smith らによる 2000 年初頭からの一連の慣性質量に関する研究の存在が挙げられる。Smith は、2002 年の文献[2]で、従来の機械回路網と電気回路網とのアナロジーにおいて、機械系における単純な質量に対する電気系の類比物 (analogue) が片方の端子が接地されているという特殊な場合のコンデンサ (キャパシタとも) にしかない事実を指摘し、この不合理な関係を正すものとして、一般的な場合の電気系のコンデンサに対する正当な機械系の類比物が存在することを論じ、この存在によって電気系のインピーダンス合成についての既存の手法を広く機械系に利用できることを指摘した。その類比物は前述の慣性質量要素であるが、彼はその (理想の) 慣性質量を持つデバイスにイナータ (inertor) という造語を、また、その物理量としての慣性質量にイナータンス (inertance) という造語を与えた。また、いくつかのイナータを適用した機械系の振動問題の具体的な検討についても論じられている。Smith and Wang の 2004 年の文献[3]では、自動車の既存のサスペンションストラットへのイナータの適用が論じられている。イナータの適用により、従来のばね要素とダッシュポット要素からなるサスペンションストラットでは実現できない特性が得られ、これによって各種の性能改善が図られることが示された。関連して、Chen らの 2009 年の文献[4]等では、イナータが、「J-Damper」のコードネームでフォーミュラ 1 用の競技自動車のサスペンションストラットに秘密裡に適用され、その性能改善に寄与していたということが発表され、これ以降、慣性質量要素およびその適用への一層の関心が集まっているようである。ところで、前述の図 1-2 は、1957 年の高橋と藤村の日本物理学会誌の連載記事[5]で用いられた図を引用したものであるが、これは、電気回路と機械

回路の類比を解説すると共に、電気回路におけるアースされていない一般の場合のコンデンサに対応する機械回路の類比物が欲しいがそれはどうなるだろうかという文脈の中で提示された機構であった。本機構を用いた具体的な適用例は示されていないものの、Smith [2]と同様の電気-機械の類比検討の展開によって、慣性質量要素が導入されていたことが理解できる（この存在は2011年の北森の指摘[6]から知り得た）。

Smith がイナータを提唱する以前より、実際には、多くの慣性質量に関する研究が行われていた。奥村は、1995年から2000年において、慣性質量を構造物に適用して特定の振動数の加振源の影響を完全に遮断もしくは抑制できること（完全となる場合は不減衰が仮定される場合）を理論的に示し、それを実現するデバイスを振動遮断接続装置と呼んだ[7][8]。ここでは、慣性質量は、「2つの変位成分間を結ぶ要素であることを強調したいため」として慣性接続要素という名称で呼ばれた（同じ文脈の中で、ばねとダッシュポットの要素は、それぞれ、弾性接続要素と粘性接続要素と呼ばれることもあった）。関連して、古橋らは、構造系の各層間に調整した慣性接続要素を設置することで、構造系が持つ全ての高次モードの刺激係数を0にできることを理論的に示した[9][10]。柴田らは、振動遮断接続装置を実際に製作し単体試験の結果を示すと共に、通常の免震層の上部に振動遮断接続装置の設置層を設けた二層構造からなる効果的な免震構造を提案した[11]。

これらの研究とは別に、川口らは、1970年代初頭より配管系の振動を抑制する装置である回転体の慣性モーメントを利用したメカニカルスナッパ（メカニカル防振器とも呼ばれる）を開発し、現在まで原子力発電所等で広く用いられている[12][13][14][15][1]（図1-4および図1-5参照）。東北地方太平洋沖地震以降には、山崎らは、増

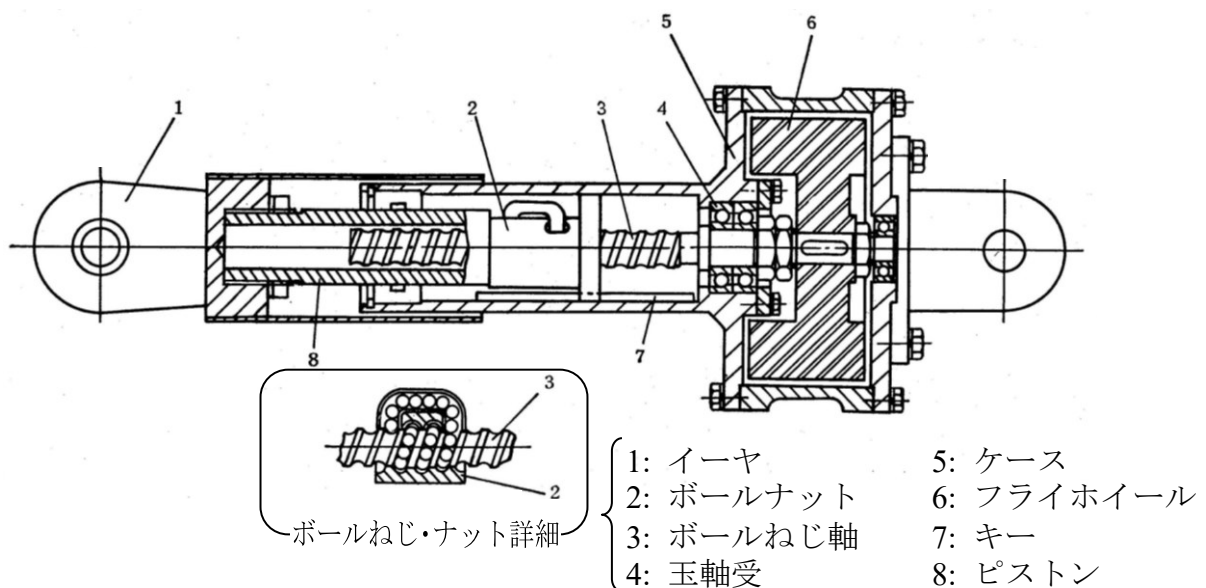


図1-4 ボールねじ式 IMD の例1（初期型メカニカル防振器の一例）

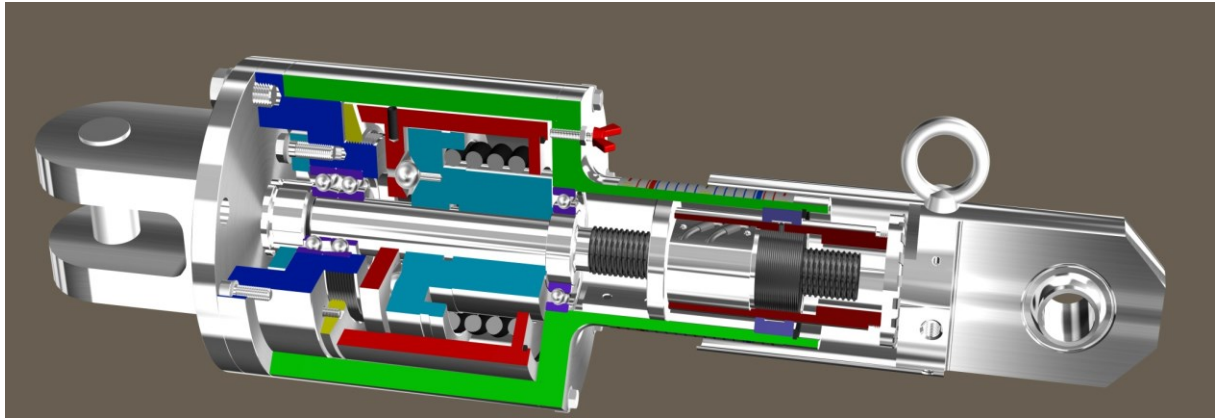


図 1-5 ボールねじ式 IMD の例 2 (メカニカル防振器の一例)

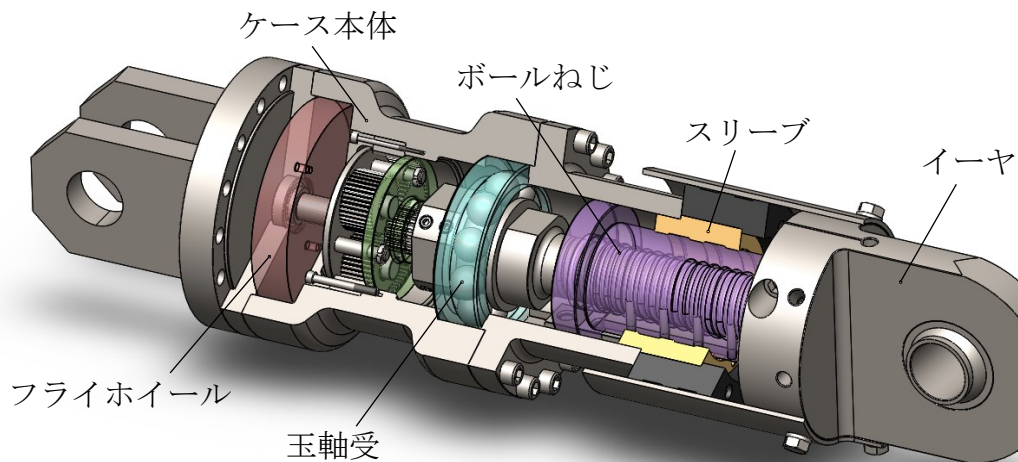


図 1-6 ボールねじ式 IMD の例 3 (コンパクトメカニカル防振器の一例)

速機によって回転体の慣性モーメントを増大させコンパクト化したタイプのメカニカルスナッパを開発し、これも実用化されている[16][17] (図 1-6 参照) . ただし、米国等の海外で実用化されたメカニカルスナッパには、回転体の慣性を利用するもののブレーキ力を積極的に利用して配管系の拘束を行うような、機構と作動原理が異なるものが存在することには注意が必要である[14][15][1].

機械式の IMD の他に、流体を利用した IMD に関する研究も多く存在する. 川股らは、1973 年に、流体が管路を通過する際の慣性を利用した慣性ポンプダンパと呼ばれる流体式の IMD を提案し、これに慣性質量効果があることを明らかにした[18][19]. これは構造系と一体の構成であったが、砂子田らは、ピン等によって容易に構造物に取付けることができる可搬な流体式 IMD を提案し[20][21], 松岡らは、さらに、流体に水や一般的な作動油等と比較して比重の大きい磁気粘性流体を用いることで流体の密度を高めて大きな慣性質量を取得できるタイプの流体式 IMD を提案した[22][23].

また、最近では、渡井らは、2 台の流体式 IMD を管路で連結して慣性質量効果の他にリンク効果（リンク式オイルダンパ[24]で効果が確認されているような、設置される2 層の層間変形量を同程度に保とうとする効果）が得られるリンク式流体慣性ダンパを提案している[25].

ボールねじ式の IMD においても、慣性質量効果に加えて減衰効果を同時に発揮させるようなデバイスの研究も多く行われている。一部、当初は減衰効果だけを主体的に得る目的で提案された、すなわち、わずかな慣性質量による影響は無視できるものとして取り扱ったデバイスについての研究もあるが、それらも、後に、その慣性質量効果をも積極的に振動制御に活かすための検討に舵を切っているようである[26][27][28][29][30][31][32][33][34][35].

以上で示したように、配管系や車両、構造系の振動制御に慣性質量を有するデバイス IMD を適用することについての多くの研究が行われている。

1.2 配管系の動的設計と IMD

わが国は世界有数の地震大国であり、地震による配管系の振動抑制は重要な課題となっている。図 1-7 に示すような配管系は通常熱膨脹，自重，地震等の影響を考慮してその健全性が保たれるように各種の支持装置が適用される。仮に、配管系が熱膨脹の影響を全く受けないならば、配管の各部にレストレイント（高剛性なばねとなる部材）を多数設置し、配管系全体を剛に近づけていく設計を行えば良い。しかし、ほと

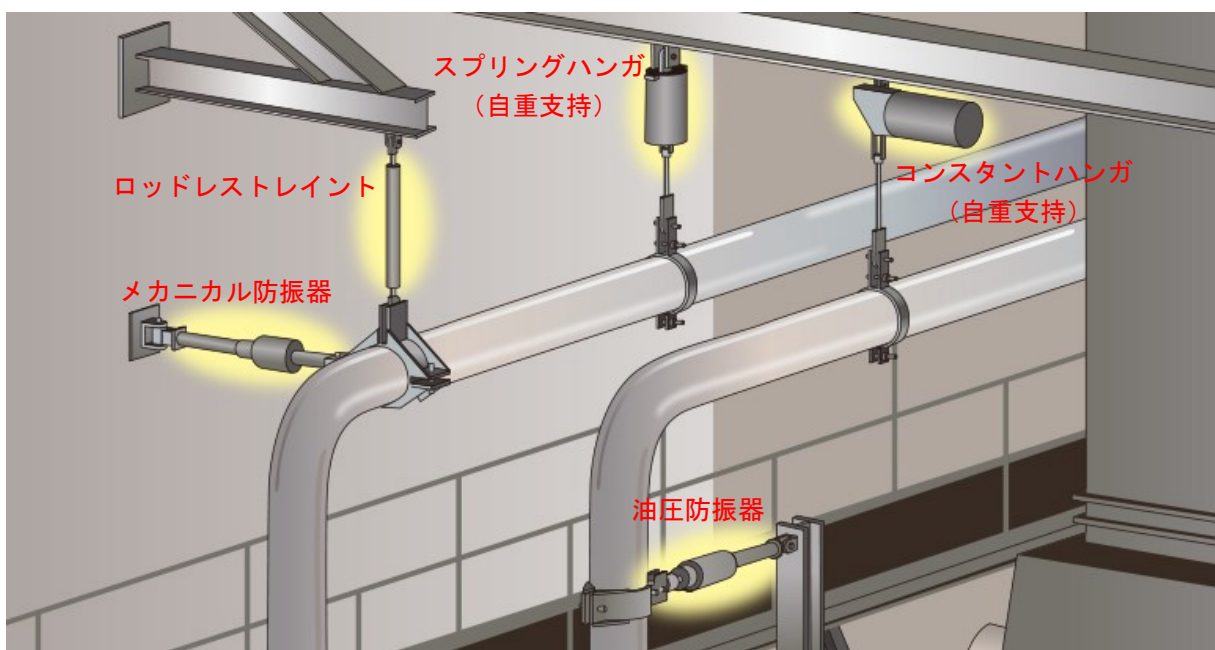


図 1-7 各種支持装置付の配管系の例

多くの配管系では熱膨張の影響を無視することはできない。この時、配管はレストレイントの影響によって自由な変形が妨げられ、各部に応力が生じる。そのため、実際の配管系では、油圧防振器やメカニカル防振器のような、熱膨張時の配管の変形には自由に追従し、地震等により急激な配管の移動が生じるような時には拘束効果を発揮する装置が必要とされる。特に原子力発電所内の配管系では、長期的な使用や放射線環境下においても性能が著しく変化することがないメカニカル防振器が多く使用される。従来の実務的な配管応力解析では、メカニカル防振器の取付部は熱膨張等の準静的な解析の場合には非拘束な点としてモデル化され、地震時のような動的な場合は高剛性なばね支持点としてモデル化されることが多い（図 1-3 (c)参照）。しかし、メカニカル防振器は、近年建築構造や自動車競技の分野等で注目されている慣性質量ダンパやイナータ等[7][2][9][36][37][38]と呼ばれるものと本質的には同等の作動原理を有するものであり、その力学モデルはばね要素と慣性質量要素との直列モデル（より一般的には、慣性質量要素に並列な減衰要素が存在する）として取り扱った方がより現実的（図 1-3 (b)参照）である。

IMD の配管への適用における、上記で述べたより現実的なモデルを考慮した検討は、IMD 開発の黎明期における基礎研究では見られた[13]が、地震時における実務的な配管解析では、配管系への IMD の設置をその取付部での固定支持もしくは単純なばね支持とみなすということが通常行われた。このような近似が行われたのは、主に自由度増加に伴う解析に要する計算時間の増大によるものであった。現在の多くの配管解析の実務でも、配管解析のためのパッケージソフトウェアを用いて実際の配管系を考慮した系のモデリングを行い、その後、解析実務者の経験に基づいていくつかの点を選定し、そこを固定とみなして一連の評価を行っている。その結果に基づき、適用される設計規格に照らしながら各種の判定項目を評価し、健全性が確認されれば、更に、一部をより詳細なばね支持モデルに変更して、また一連の評価を行うということが行われている。このプロセスは、配管系の健全性が確保されるまで支持位置や支持条件を変えて繰り返し行われる。

他方、近年は次のような配管系の解析および設計に関する研究が行われている。Itoらは、弾塑性ダンパを適用した配管系に対する最適化設計の手法を提案している[39][40]。高山らは、より合理的に保守性が考慮できる新しい多入力問題の床応答スペクトル解析手法を提案している[41]。中村らは、原子力発電施設での設計基準外の事象への対応の重要性が認識されるつつある中で極限荷重下における配管系の破損モードを調査する実験的検討を継続している[42]。藤田らは、中国電力株式会社の依頼

の下、海外の原子力発電所を含む発電プラントに使用される並進三方向に作用する粘性ダンパを配管系に適用するための設計法の確立を目的とした試験および検討を報告している[43].

以上のように、配管系設計を高度化するための様々な研究が行われているが、配管系を対象に慣性質量要素のモデルを直接考慮した検討はいまだ少ない。昨今他分野において慣性質量要素に大きな関心が集まり、その利用による多くの効果的事例が確認されている状況を鑑みれば、従来から存在するメカニカル防振器等の IMD を設置した配管系においても、IMD のより現実的なモデルを前提に慣性質量効果を考慮することは意義深く、これによる配管系の対振動設計の精度向上や高度化が期待される。また、今後より精緻化すると予測される配管系に対する設計仕様に対し、配管系への IMD 等の適用に関して、Ito ら[39][40]で見られるような最適設計の手法を活用した、人間による試行錯誤の回数を少なくするような設計手法の確立が求められる。

1.3 IMD に関するセミアクティブ制御

前節までに、パッシブ制御装置として IMD を利用した数々の研究が存在し、広い分野で、慣性質量要素を取り扱わなかった従来の場合では達成できない優れた効果が見出されていることを紹介した。

一方で、応用分野を拡大し、IMD の振動抑制の制御性能を高めるために、装置が持つ慣性質量値を可変とする IMD (以降、可変 IMD と呼ぶ) に関するいくつかの研究が存在する。Chen らは、セミアクティブな粘性減衰とセミアクティブな慣性質量の要素を適用した車両サスペンション部材を仮定し、自動車モデルについてのセミアクティブ制御検討を行い、パッシブなサスペンションの場合およびそれにパッシブな粘性減衰だけを適用した場合と比べて、優れた性能改善効果が得られることをシミュレーションによって示した[44]。松岡は、車両用の無段変速機を応用した連続的に慣性質量が可変なボールねじ式 IMD を提案し、試作試験を行っていくつかの理想的な状況についての特性を確認した[45]。佐藤らは、連続的に慣性質量が可変なボールねじ式 IMD をいくつかの実施形態を示しつつ提案した[46]。連続的に慣性質量が可変な IMD では、IMD の抵抗力を決定する慣性質量は何からの指令信号でリアルタイムに変更できる。可変 IMD は、セミアクティブ制振装置として使用できるものであり、何らかのセミアクティブ制御の方法論 (例えば、Dyke ら[47]) を用いて可変 IMD の可変慣性質量を制御することによる制御性能の更なる向上が期待される。

1.4 本研究の目的および論文構成

以上を踏まえ、本論文では、慣性質量要素を有する振動制御装置に関する技術の高度化および将来的な配管解析・設計の高度化を目的として、配管系へのより現実的なモデルを前提とした IMD 適用に関する各種設計変数を最適化する設計手法を提案し、さらに、可変な慣性質量要素を持つより現実的なモデルとしての可変 IMD を適用した構造系についてのセミアクティブ制御設計手法を提案する。本論文は、以下の全 5 章から構成される。

第 1 章「緒論」では、本研究を考察するために必要な慣性質量要素、IMD、配管系の動的設計およびセミアクティブ制御に関する基礎的な知識、背景、意義および目的を述べた。

第 2 章「IMD 付配管系の動的最適設計：1 台適用 1 型式選定の場合」では、配管系を模擬した単純なものとして単一断面のはり（連続体モデル）を対象に、まずは 1 台の IMD の適用についての最適設計手法を提案する。最適設計は、IMD の取付位置と慣性質量の値を設計変数とし、振動抑制性能を示す指標としての評価関数を設け、これを最小化する問題を定義し、遺伝的アルゴリズムを適用して IMD に関する最適な設計変数を決定するという手順で行われる。設計例として 2 種類の固有振動数（高い場合と低い場合）の単純支持ばりを題材に実際に最適設計が行えることを示す。

第 3 章「IMD 付配管系の動的最適設計：多台適用多型式選定の場合」では、前章の拡張として、配管系（これは前章と同様に単一断面の単純支持ばり）への多数台かつ多型式の IMD の適用を考慮した最適設計手法を検討する。ここで、型式とは、同種のデバイスの装置容量もしくは許容荷重の大きさによって分類される型を意味する、産業機器としての実態を踏まえたものである（装置の設計開発や検証作業等の工数削減を目的に、大小様々の荷重負担能力を持つ装置を予め型式展開しておくことが一般的）。多型式が存在するという事は、それに紐付いた IMD 諸元やコストを考慮する必要がある、最適設計は、この型式の概念を前提に振動抑制性能の他に経済性をも考慮できるものとして提案する。また、提案手法によって最適設計が行えることをいくつかの設計例をもって示す。さらに、IMD をより現実的なモデルで考慮した場合とばねとみなしたモデルで考慮した場合について時間領域と周波数領域の両面で応答結果を比較することで、IMD のばね近似モデルとより詳細なモデルについての振動抑制性能の類似点と差異を明らかにする。

第 4 章「可変 IMD を適用した構造系のセミアクティブ制御」では、実現可能と想定される一つのボールねじ式可変 IMD の構造を提案すると共に、指令信号に対して

現実的な程度の時定数で表される遅延特性（1次遅れ系）を仮定した可変 IMD が設置された構造系のセミアクティブ制御を検討する．セミアクティブ制御には，出力模倣アプローチに基づくセミアクティブ制御法[48]を採用し，これに従って可変 IMD の可変慣性質量値が適切に変更される．既存ベンチマーク建屋モデルを構造系とした上記可変 IMD によるセミアクティブ制御のシミュレーションを行い，非制御時および非可変 IMD（慣性質量値を最大値に固定）適用時の場合と結果を比較する．

第5章「結論」では，本研究で得られた結果を総括する．

参考文献

- [1] Sunakoda, K. and Yamazaki, I., Inertia mass damper and its application, Proceedings of the ASME 2017 Pressure Vessels and Piping Conference, No. PVP2017-65192 (2017).
- [2] Smith, M. C., Synthesis of mechanical networks: The inerter, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 47, No. 10 (2002), pp. 1648-1662.
- [3] Smith, M. C. and Wang, F. C., Performance benefits in passive vehicle suspensions employing inerters, Vehicle System Dynamics, Vol. 42, No. 4 (2004), pp. 235-257.
- [4] Chen, M. Z. Q., Papageorgiou, C., Scheibe, F., Wang, F. C. and Smith, M. C., The missing mechanical circuit element, IEEE Circuits and Systems Magazine, Vol. 9, No. 1 (2009), pp. 10-26.
- [5] 高橋秀俊, 藤村靖, 〈講義〉物理学汎論 (VII), 日本物理学会誌, Vol. 12, No. 4, doi: [10.11316/butsuri1946.12.144](https://doi.org/10.11316/butsuri1946.12.144) (1957).
- [6] 北森俊行, 〈寄書〉電気回路論とアナロジー, 応用科学学会誌, Vol. 24, No. 1 (2011).
- [7] 奥村敦史, 振動遮断接続装置及び構造物の振動遮断接続方法, 特許第 3718683 号 (出願 1995, 公開 1997).
- [8] 奥村敦史, 振動遮断接続機構, 早稲田大学技術シーズ, No. TLO 2000-002 (2000).
- [9] 古橋剛, 石丸辰治, 慣性接続要素によるモード分離: 慣性接続要素による応答制御に関する研究 その 1, 日本建築学会構造系論文集, Vol. 69, No. 576, doi: [10.3130/aijs.69.55_1](https://doi.org/10.3130/aijs.69.55_1) (2004).
- [10] 古橋剛, 石丸辰治, 慣性接続要素による多失点振動系の応答制御: 慣性接続要素による応答制御に関する研究 その 2, 日本建築学会構造系論文集, Vol. 71, No. 601, doi: [10.3130/aijs.71.83_2](https://doi.org/10.3130/aijs.71.83_2) (2006).
- [11] 柴田和彦, 飯山文也, 五十幡直文, 袖山博, 奥村敦史, 久田俊明, 慣性接続要素を用いた免制震装置の開発: その 1 からその 4, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (2006), pp. 732-738.

- [12] Kawaguchi, O., Watabe, M., Sasaki, S., Akino, K. and Kato, M., Special aseismic design engineering and development for fast reactor, International Conference on Engineering of Fast Reactors for Safe and Reliable Operation, Karlsruhe, Oct. 9-13 (1972), pp. 251-270.
- [13] 川口修, 秋野金次, 白木万博, 本間敏秋, 楮修, メカニカルスナッパで支持された配管の地震応答特性, 三菱重工技報, Vol. 15, No. 1 (1978), pp. 26-34.
- [14] 川口修, 加納巖, 秋野金次, 加藤宗明, 砂子田勝昭, メカニカル防振器の研究開発 (I), 日本原子力学会誌, Vol. 33, No. 1, doi: [10.3327/jaesj.33.76](https://doi.org/10.3327/jaesj.33.76) (1991).
- [15] 袖山博, 砂子田勝昭, メカニカル防振器の開発の歴史, 配管技術, Vol. 59, No. 14 (2017).
- [16] 山崎一生, 袖山博, コンパクト・メカニカル防振器, 配管技術, Vol. 57, No. 9 (2015), pp. 68-73.
- [17] 山崎一生, コンパクトメカニカル防振器の開発, 三和テッキ技報, No. 67 (2018), pp. 61-66.
- [18] 川股重也, 米田護, 半谷裕彦, 耐震ダンパーに関する研究: 第 1 報 自由振動試験および起振実験, 生産研究, Vol. 25, No. 3, doi: [2261/34553](https://doi.org/2261/34553) (1973).
- [19] 川股重也, 大沼正昭, 慣性ポンプダンパーによる構造物の振動制御: その 1 理論モデルと正弦波応答特性, 日本建築学会大会学術講演梗概集, B, 構造 I (1986), pp. 771-772.
- [20] 砂子田勝昭, 松岡太一, 飯山文也, 柴田和彦, 流体の質量効果を用いた振動遮断方法に関する研究, Dynamics & Design Conference, doi: [10.1299/jsmedmc.2005.319-1](https://doi.org/10.1299/jsmedmc.2005.319-1) (2005).
- [21] Sunakoda, K. and Matsuoka, T., Vibration tests of a cut-off system using water and functional Fluids, Proceedings of the ASME 2006 Pressure Vessels and Piping/ICPVT-11 Conference, ASME, Paper No. PVP2006-ICPVT-11-93532 (2006).
- [22] 松岡太一, 砂子田勝昭, 機能性流体の質量移動を利用したダンパの研究, Dynamics & Design Conference, doi: [10.1299/jsmedmc.2009.472-1](https://doi.org/10.1299/jsmedmc.2009.472-1) (2009).
- [23] 松岡太一, 砂子田勝昭, 流体の慣性質量を利用した振動低減装置, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 75, No. 759, doi: [10.1299/kikaic.75.2893](https://doi.org/10.1299/kikaic.75.2893) (2009).
- [24] 曾田五月也, 安田拓也, リンク式オイルダンパの制振効果に関する研究, 日本建築学会大会学術講演梗概集, B-2, 構造 II (2007), pp. 821-822.
- [25] 渡井一樹, 曾田五月也, リンク式流体慣性ダンパの性能設計法に関する実験的研究, 日本建築学会構造系論文集, Vol. 82, No. 737, doi: [10.3130/aijs.82.991](https://doi.org/10.3130/aijs.82.991) (2017).

- [26]Sunakoda, K., Iiyama, F. and Ikahata, N., Study of a high damping device based on electricity generating system, Proceedings of the ASME 1992 Pressure Vessels and Piping Conference, No. 229 (1992), pp. 133-137.
- [27]Ohtake, T., Sunakoda, K. and Matsuoka, T., Study on vibration control device using power generator, Proceedings of the ASME 2006 Pressure Vessels and Piping/ICPVT-11 Conference, Paper No. PVP2006-ICPVT-11-93534 (2006).
- [28]松岡太一, 砂子田勝昭, 平元和彦, 大竹隆文, 発電式振動抑制装置に関する研究, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 73, No. 735, doi: [10.1299/kikaic.73.2926](https://doi.org/10.1299/kikaic.73.2926) (2007).
- [29]Nakamura, Y., Fukukita, A., Tamura, K., Yamazaki, I., Matsuoka, T., Hiramoto, K. and Sunakoda, K., Seismic response control using electromagnetic inertial mass dampers, Earthquake Engineering & Structural Dynamics, Vol. 43, No. 4 (2014), pp. 507-527.
- [30]大亦絢一郎, 下田博一, 細谷淳, 磁気減衰器付ボールねじ式防振器の特性, Vol. 51, No. 471, doi: [10.1299/kikaic.51.3034](https://doi.org/10.1299/kikaic.51.3034) (1985).
- [31]来田義弘, 磁石を利用した制振装置の研究: その 2 ボールねじ式磁気ダンパーの基本性能実験, 日本建築学会大会学術講演梗概集, B, 構造 I (1990), pp. 967-968.
- [32]渡邊鉄也, 鈴木浩平, 飯山文也, 袖山博, 回転型磁気摩擦ダンパの基本特性に関する研究, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 67, No. 659, doi: [10.1299/kikaic.67.2136](https://doi.org/10.1299/kikaic.67.2136) (2001).
- [33]砂子田勝昭, 松岡太一, 銭谷政紀, 増磁および減磁効果によるハイブリッド磁気ダンパに関する研究, Dynamics & Design Conference, doi: [10.1299/jsmedmc.2006.413-1](https://doi.org/10.1299/jsmedmc.2006.413-1) (2006).
- [34]新垣忠志, 黒田英二, 有馬文昭, 井上豊, 馬場研介, ボールネジを用いた制震装置の開発: その 1 制震チューブ・制震ディスクの性能試験, 日本建築学会技術報告集, Vol. 5, No. 8, doi: [10.3130/aijt.5.239_1](https://doi.org/10.3130/aijt.5.239_1) (1999).
- [35]中南滋樹, 鈴木亨, 木田英範, 古橋剛, 田中久也, 慣性質量要素を有する粘性減衰装置の開発, 三井住友建設技術研究所報告, No. 3 (2005), pp. 157-164.
- [36]斉藤賢二, 栗田哲, 井上範夫, 慣性接続要素を利用した線形粘性ダンパーによる一質点構造の最適応答制御と Kelvin モデル化手法に関する考察, 構造工学論文集, Vol. 53B (2007), pp. 53-66.
- [37]Hiramoto, K., Matsuoka, T., Sunakoda, K., Fukukita, A. and Yamazaki, I., Bang-bang type semi-active control of civil structures: a prediction-based approach, Journal of System Design and Dynamics, Vol. 4, No. 1 (2010), pp. 103-114.
- [38]Nakamura, Y. and Hanzawa, T., Performance-based placement design of tuned electromagnetic inertial mass dampers, frontiers in Built Environment, doi: [10.3389/fbuil.2017.00026](https://doi.org/10.3389/fbuil.2017.00026) (2017).

- [39] Ito, T., Michiue, M. and Fujita, K., Investigation of optimal seismic design methodology for piping systems supported by elasto-plastic dampers (Part 1: Evaluation functions), *Journal of System Design and Dynamics*, Vol. 3, No. 1 (2009), pp. 59-69.
- [40] Ito, T., Michiue, M. and Fujita, K., Investigation of optimal seismic design methodology for piping systems supported by elasto-plastic dampers (Part 2: Applicability for seismic waves with various frequency characteristics), *Journal of System Design and Dynamics*, Vol. 4, No. 2 (2010), pp. 348-359.
- [41] 高山義博, 吉田恵華, 入木信好, 前田栄一, 多入力を受ける配管系の時刻歴応答解析支援による床応答スペクトル解析法, *Vol. 86, No. 888*, doi: [10.1299/transjsme.20-00129](https://doi.org/10.1299/transjsme.20-00129) (2020).
- [42] 中村いずみ, 笠原直人, 模擬材料を使用した配管系の地震時破損モード調査, *Vol. 86, No. 888*, doi: [10.1299/transjsme.20-00187](https://doi.org/10.1299/transjsme.20-00187) (2020).
- [43] 藤田聡, 久保哲夫, 原文雄, 中村いずみ, 三方向粘性ダンパを適用した機器・配管系の地震応答解析法に関する確性試験, 一般財団法人 発電設備技術検査協会 (2016), 入手先 <<https://www.japeic.or.jp/gyoumu/kakusei/gyoumuichiran/ichiran.htm>> (参照日 2021 年 6 月 16 日).
- [44] Chen, M. Z. Q., Hu, Y., Li, C. and Chen, G., Application of semi-active inerter in semi-active suspensions via force tracking, *Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 138, No. 4 (2016).
- [45] 松岡太一, 無段変速機を用いた可変慣性をもつ振動抑制装置, *日本機械学会論文*, Vol. 83, No. 584, doi: [10.1299/transjsme.17-00292](https://doi.org/10.1299/transjsme.17-00292) (2017).
- [46] 佐藤友祐, 富澤徹弥, 藤谷秀雄, 回転慣性制振装置及び構造物の振動抑制装置, 特許第 6498467 号 (出願 2015, 公開 2016).
- [47] Dyke, S. J., Spencer, B. F., Sain, M. J. and Carlson, J. D., An experimental study of MR dampers for seismic protection, *Smart Materials and Structures*, Vol. 7 (1996), pp. 693-703.
- [48] Hiramoto, K., Matsuoka, T. and Sunakoda, K., Semi-active vibration control of structural systems based on a reference active control law: output emulation approach, *Structural Control and Health Monitoring*, Vol. 23 (2016), pp. 423-445.

第2章 IMD 付配管系の動的最適設計：1 台適用 1 型式選定の場合

2.1 緒言

わが国は世界有数の地震大国であり，地震による配管系の振動の抑制は重要な課題となっている．配管系は通常，熱膨脹，自重，地震等の影響を考慮してその健全性が保たれるように各種の支持装置が適用される．油圧防振器やメカニカル防振器のような，熱膨脹時の配管の変形には自由に追従し，地震等により急激な配管の移動が生じるような時には拘束効果を発揮する装置が必要とされる．特に原子力発電所内の配管系では，長期的な使用や放射線環境下においても性能が著しく変化することがないメカニカル防振器が多く使用される．従来の実務的な配管応力解析では，その取付部は熱膨脹等の準静的な解析の場合には非拘束な点としてモデル化され，地震時のような動的な解析の場合はばね支持点としてモデル化されることが多い．メカニカル防振器は，慣性質量ダンパやイナータなどと呼ばれるもの[1][2][3][4]と本質的には同等の作動原理を持つものであったので以降 IMD と呼び，その力学モデルはより現実的なモデル（第 1 章の図 1-3 参照）として考慮する．

配管系への慣性質量要素を有するデバイス IMD の適用による動的解析の高度化を目的に，配管系を模擬した単純なものとして単一断面のはり（連続体モデル）を対象に，1 台の IMD を設置するはりおよびその IMD の健全性を保ちつつ，はりの各種の動的応答を最適化する設計変数の探索について検討した結果を示す．

2.2 IMD を設置した配管系のモデル化

図 2-1 に検討対象のはりおよび付加装置のモデル（基礎励振を受ける長さ L の単純支持ばり）を示す．まず，図 2-1 の(i)はり単体の場合について考える．ダランベールの原理に注意し，図 2-2 に示すはりの微小要素の上下方向の力の釣合いを考えると，次式が得られる．

$$f(x, t) + \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dx - f(x, t) + \left(-\rho A dx \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (2-1)$$

ここで， $f(x, t)$ は剪断力[N]， ρ は密度[kg/m³]， A は断面積[m²]， $w(x, t)$ は絶対変位[m]（図 2-1 に示す通り，たわみとしての相対変位 $u(x, t)$ と基礎変位 $w_0(t)$ の和）であり，上式を整理すると次式となる．

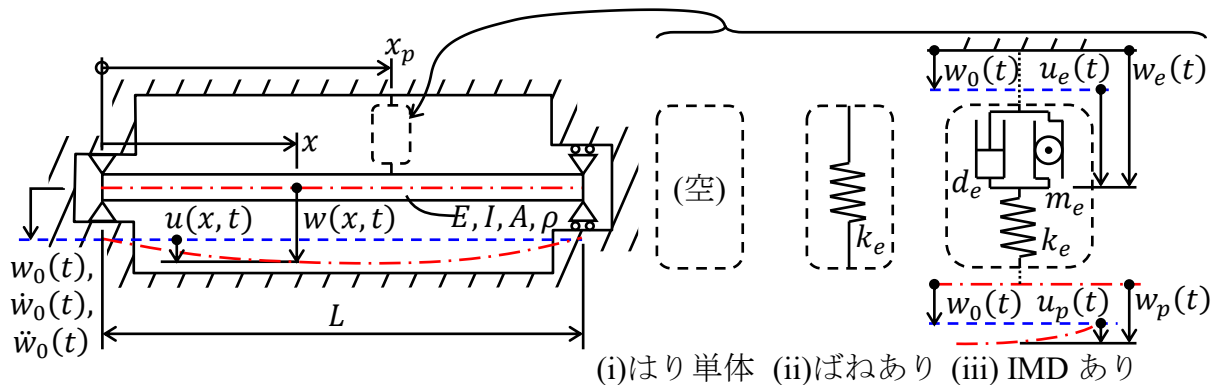


図 2-1 単体のはりおよびばねまたは IMD を 1 台取付けたはりの概略モデル

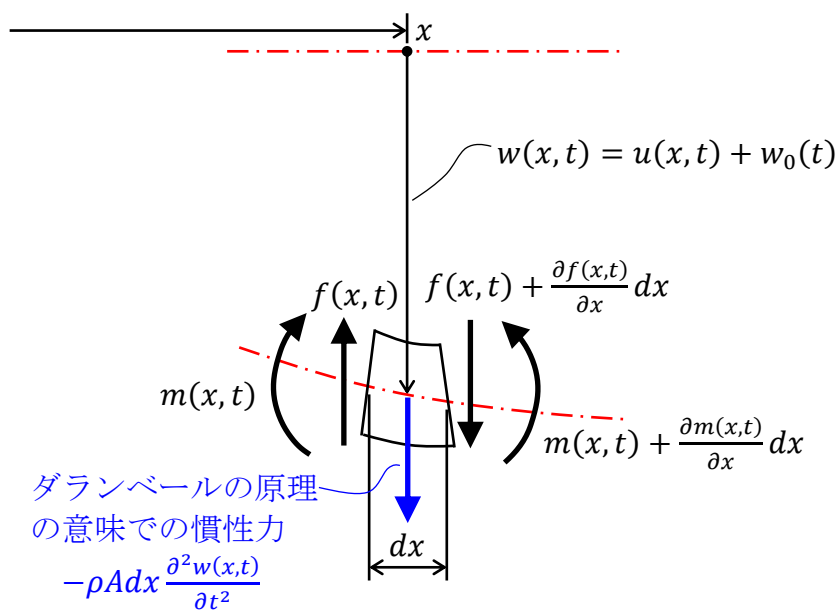


図 2-2 はりの微小要素

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (2-2)$$

また、微小要素について慣性モーメントは無視できると仮定して左端周りでモーメントの釣合いを考えると、次式が得られる。

$$m(x,t) + \frac{\partial m(x,t)}{\partial x} dx - m(x,t) - \left(f(x,t) + \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dx \right) dx - \frac{1}{2} \left(-\rho A dx \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \right) dx = 0 \quad (2-3)$$

ここで、 $m(x,t)$ は曲げモーメント[Nm]であり、上式を高次の微小を持つ項を無視して整理すれば次式となる。

$$f(x, t) = \frac{\partial m(x, t)}{\partial x} \quad (2-4)$$

また，材料力学より，曲げモーメント $m(x, t)$ と回転角 $\theta(x, t)$ の関係および回転角 $\theta(x, t)$ とたわみ（相対変位） $u(x, t)$ の関係は次のようになる．ただし，今回ののはりは剪断力による変形は小さくたわみは曲げモーメントによってのみ発生すると仮定（いわゆるオイラーばりを仮定）する．

$$m(x, t) = -EI \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \quad (2-5)$$

ここで， E は縦弾性係数[Pa]， I は断面二次モーメント[m⁴]である．

$$\theta(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (2-6)$$

式(2-2)に式(2-4)から式(2-6)を適用することで次式が得られる．

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} &= 0 \\ \therefore \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} &= -\rho A \ddot{w}_0(t) \end{aligned} \quad (2-7)$$

ここで， $\ddot{w}_0(t)$ は基礎加速度[m/s²]である．上式において， $u(x, t)$ を低次 n 次モードで以下のように近似する．

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^n \phi_j(x) q_j(t), \quad j = 1, \dots, n \quad (2-8)$$

ここで， $\phi_j(x)$ ， $j = 1, \dots, n$ は，はり単体の場合についての正規固有関数であり，境界条件および $\int_0^L \phi_j^2(x) dx = 1$ の条件を適用することで求められる．また，この際に得られる固有値を λ_i とする．

式(2-8)を式(2-7)に代入し，いずれの境界条件でも $\phi_i''''(x) = (\lambda_i/L)^4 \phi_i(x)$ の関係が成り立つことに注意すれば，次式が得られる．

$$\rho A \sum_{j=1}^n \phi_j(x) \ddot{q}_j(t) + EI \sum_{j=1}^n \left(\frac{\lambda_j}{L}\right)^4 \phi_j(x) q_j(t) = -\rho A \ddot{w}_0(t) \quad (2-9)$$

式(2-9)の両辺に $\phi_j(x), j = 1, \dots, n$ を掛け、 x について区間 $[0, L]$ で積分すると、直交性より、 j 次モードについて、

$$\rho A \ddot{q}_j(t) + EI \left(\frac{\lambda_j}{L}\right)^4 q_j(t) = -\rho A \ddot{w}_0(t) \int_0^L \phi_j(x) dx \quad (2-10)$$

が得られる。ベクトル $\mathbf{q}(t) = [q_1(t) \ q_2(t) \ \dots \ q_n(t)]^T$ を用いると、はり単体の系の n 次モード近似運動方程式は、以下のように表される。

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}_0 \mathbf{q}(t) = \rho A \mathbf{F} \ddot{w}_0(t),$$

$$\mathbf{M} = \rho A \mathbf{I}_n, \quad \mathbf{K}_0 = \frac{EI}{L^4} \begin{bmatrix} \lambda_1^4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\int_0^L \phi_1(x) dx \\ -\int_0^L \phi_2(x) dx \\ \vdots \\ -\int_0^L \phi_n(x) dx \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

ここで、 \mathbf{I}_n は n 次の単位行列である。

上記の運動方程式は、減衰行列 $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n), d_j \geq 0, j = 1, \dots, n$ を導入すれば、より一般的な表現として以下のようなになる。

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}_0 \mathbf{q}(t) = \rho A \mathbf{F} \ddot{w}_0(t) \quad (2-12)$$

これより、状態ベクトルを $\mathbf{z}_0(t) = [\mathbf{q}^T(t) \ \dot{\mathbf{q}}^T(t)]^T$ とすれば、はり単体の系の状態方程式は、以下のようなになる。

$$\dot{\mathbf{z}}_0(t) = \mathbf{A}_0 \mathbf{z}_0(t) + \mathbf{B}_0 \ddot{w}_0(t),$$

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}_0 & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n \\ \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (2-13)$$

ここで、 $\mathbf{0}_{n \times n}$ は $n \times n$ 零行列、 $\mathbf{0}_n = \mathbf{0}_{n \times 1}$ は n 次の0のみからなる縦ベクトルである。ただし、記号の下付文字0は、はり単体の場合を明示するものである（以降、他の記号

に対しても同様) . 式(2-13)に対して, 何らかの数値積分法を適用することで, 外乱 $\ddot{w}_0(t)$ に対する時刻歴シミュレーションを行うことができる.

観測位置 (はりの左端からの距離) $\mathbf{x}_s = [x_1 \dots x_{n_s}]^T$ に対応するはりの変位 $\mathbf{u}_{s0}(t) = [u_0(x_1, t) \dots u_0(x_{n_s}, t)]^T$ および曲げ応力 (縁部の応力) $\boldsymbol{\sigma}_{s0}(t) = [\sigma_0(x_1, t) \dots \sigma_0(x_{n_s}, t)]^T$ は, それぞれ次式となる.

$$\mathbf{u}_{s0}(t) = \mathbf{C}_{s0} \mathbf{z}_0(t), \quad \mathbf{C}_{s0} = [\mathbf{C}_s \quad \mathbf{0}_{n_s \times n}],$$

$$\mathbf{C}_s = \begin{bmatrix} \phi_1(x_1) & \dots & \phi_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(x_{n_s}) & \dots & \phi_n(x_{n_s}) \end{bmatrix} \quad (2-14)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{s0}(t) = \mathbf{C}_{\sigma s0} \mathbf{z}_0(t), \quad \mathbf{C}_{\sigma s0} = [\mathbf{C}_{\sigma s} \quad \mathbf{0}_{n_s \times n}],$$

$$\mathbf{C}_{\sigma s} = -\frac{EI}{Z} \begin{bmatrix} \phi_1''(x_1) & \dots & \phi_n''(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1''(x_{n_s}) & \dots & \phi_n''(x_{n_s}) \end{bmatrix} \quad (2-15)$$

ここで, Z は断面係数 [m^3] である. 上記の 2 種の応答は, 式(2-13) $\mathbf{z}_0(t)$ を用いて導出できる.

次に, 図 2-1 (ii) に示すようなばね支持 (以下ばねありと呼ぶ) の場合について考える. これは, 実際に単純なばねを使用することを想定しているのではなく, 従来の配管解析において通常行われる IMD を単純なばねモデルとみなす場合を想定したものである. この場合のはりの微小要素は, $x \neq x_p$ であれば図 2-2 と同様に表現できるが, $x = x_p$ に限って微小要素上部にばねが接続されるものとなる. これを考慮した上で, 微小要素の上下方向の力および左端周りでのモーメントの釣合いを立て, 同様に関係式を組合せると, 次式が得られる.

$$\rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + k_e u_p(t) \delta(x - x_p) = -\rho A \ddot{w}_0(t), \quad (2-16)$$

$\delta(\)$: ディラックのデルタ関数

ここで, k_e は設置するばねのばね定数 [N/m], $u_p(t)$ は取付位置 x_p でのはりの基礎に対する相対変位 (はりのたわみ) [m] である.

式(2-8)を式(2-16)に代入すれば, 次式が得られる.

$$\rho A \sum_{j=1}^n \phi_j(x) \ddot{q}_j(t) + EI \sum_{j=1}^n \left(\frac{\lambda_j}{L}\right)^4 \phi_j(x) q_j(t) + k_e u_p(t) \delta(x - x_p) = -\rho A \ddot{w}_0(t) \quad (2-17)$$

式(2-17)の両辺に $\phi_j(x), j = 1, \dots, n$ を掛け, x について区間 $[0, L]$ で積分すると, 直交性より, j 次モードについて,

$$\rho A \ddot{q}_j(t) + EI \left(\frac{\lambda_j}{L}\right)^4 q_j(t) + k_e u_p(t) \phi_j(x_p) = -\rho A \ddot{w}_0(t) \int_0^L \phi_j(x) dx \quad (2-18)$$

が得られる. ベクトル $\mathbf{q}(t) = [q_1(t) \quad q_2(t) \quad \dots \quad q_n(t)]^T$ をおくと,

$$u_p(t) = u(x_p, t) = \sum_{j=1}^n \phi_j(x_p) q_j(t) = \mathbf{C}_p \mathbf{q}(t), \quad (2-19)$$

$$\mathbf{C}_p = [\phi_1(x_p) \quad \phi_2(x_p) \quad \dots \quad \phi_n(x_p)]$$

となり, この関係を用いると, 本系の n 次モード近似運動方程式は, 以下のように表される.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_s) \mathbf{q}(t) = \rho A \mathbf{F} \ddot{w}_0(t),$$

$$\mathbf{K}_s = k_e \mathbf{C}_p^T \mathbf{C}_p = k_e \begin{bmatrix} \phi_1^2(x_p) & \phi_1(x_p)\phi_2(x_p) & \dots & \phi_1(x_p)\phi_n(x_p) \\ \phi_2(x_p)\phi_1(x_p) & \phi_2^2(x_p) & \dots & \phi_2(x_p)\phi_n(x_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_n(x_p)\phi_1(x_p) & \phi_n(x_p)\phi_2(x_p) & \dots & \phi_n^2(x_p) \end{bmatrix} \quad (2-20)$$

上記の運動方程式は, 減衰行列 \mathbf{D} を導入すると, 以下のようになる.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_s) \mathbf{q}(t) = \rho A \mathbf{F} \ddot{w}_0(t) \quad (2-21)$$

これより, 状態ベクトルを $\mathbf{z}_s(t) = [\mathbf{q}^T(t) \quad \dot{\mathbf{q}}^T(t)]^T$ とすれば, 本系の状態方程式は, 以下のようになる.

$$\dot{\mathbf{z}}_s(t) = \mathbf{A}_s \mathbf{z}_s(t) + \mathbf{B}_s \ddot{w}_0(t),$$

$$\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_s) & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_n \\ \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (2-22)$$

ただし, 記号の下付文字 s は, ばねありの場合を明示するものである (以降, 他の記号に対しても同様) .

観測位置 $\mathbf{x}_s = [x_1 \ \dots \ x_{n_s}]^T$ に対応するはりの変位 $\mathbf{u}_{ss}(t) = [u_s(x_1, t) \ \dots \ u_s(x_{n_s}, t)]^T$ および曲げ応力 $\boldsymbol{\sigma}_{ss}(t) = [\sigma_s(x_1, t) \ \dots \ \sigma_s(x_{n_s}, t)]^T$ ならびにばねの反力 $f_s(t)$ は、それぞれ次式となる。

$$\mathbf{u}_{ss}(t) = \mathbf{C}_{ss}\mathbf{z}_s(t), \quad \mathbf{C}_{ss} = [\mathbf{C}_s \ \mathbf{0}_{n_s \times n}] \quad (2-23)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{ss}(t) = \mathbf{C}_{\sigma ss}\mathbf{z}_s(t), \quad \mathbf{C}_{\sigma ss} = [\mathbf{C}_{\sigma s} \ \mathbf{0}_{n_s \times n}] \quad (2-24)$$

$$f_s(t) = k_e[\mathbf{C}_p \ \mathbf{0}_{1 \times n}]\mathbf{z}_s(t) \quad (2-25)$$

ここで、 $f_s(t)$ はばねのばね定数とその変形量の積となっている。上記の3種の応答は、式(2-22) $\mathbf{z}_s(t)$ を用いて導出できる。

最後に、図 2-1 の(iii) IMD ありの場合、すなわち、IMD が 1 台設置されている場合を考える。この場合のはりの微小要素を(ii)ばねありの場合と同様に考慮すれば、次式が得られる。

$$\rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + k_e (u_p(t) - u_e(t)) \delta(x - x_p) = -\rho A \ddot{w}_0(t) \quad (2-26)$$

ここで、 k_e は IMD のばね定数[N/m]、 $u_p(t)$ は取付位置 x_p でのはりの基礎に対する相対変位[m]、 $u_e(t)$ は IMD のばね要素と慣性質量要素とが直列に結合している点の基礎に対する相対変位[m]である。

式(2-8)を式(2-26)に代入すれば、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \rho A \sum_{j=1}^n \phi_j(x) \ddot{q}_j(t) + EI \sum_{j=1}^n \left(\frac{\lambda_j}{L}\right)^4 \phi_j(x) q_j(t) \\ + k_e (u_p(t) - u_e(t)) \delta(x - x_p) = -\rho A \ddot{w}_0(t) \end{aligned} \quad (2-27)$$

式(2-27)の両辺に $\phi_j(x)$ 、 $j = 1, \dots, n$ を掛け、 x について区間 $[0, L]$ で積分すると、直交性より、 j 次モードについて、

$$\rho A \ddot{q}_j(t) + EI \left(\frac{\lambda_j}{L}\right)^4 q_j(t) + k_e (u_p(t) - u_e(t)) \phi_j(x_p) = -\rho A \ddot{w}_0(t) \int_0^L \phi_j(x) dx \quad (2-28)$$

が得られる. また, $\mathbf{q}(t) = [q_1(t) \ q_2(t) \ \dots \ q_n(t)]^T$ を用いると, 本系の n 次モード近似運動方程式は, 以下のように表される.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_s)\mathbf{q}(t) - k_e \mathbf{C}_p^T u_e(t) = \rho A \mathbf{F} \ddot{w}_0(t) \quad (2-29)$$

上記の運動方程式は, 減衰行列 \mathbf{D} を導入すると, 以下のようになる.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_s)\mathbf{q}(t) - k_e \mathbf{C}_p^T u_e(t) = \rho A \mathbf{F} \ddot{w}_0(t) \quad (2-30)$$

また, IMD についての運動方程式は, 次式となる[5].

$$m_e \ddot{u}_e(t) + d_e \dot{u}_e(t) + k_e (u_e(t) - u_p(t)) = 0 \quad (2-31)$$

ここで, m_e は IMD の慣性質量[kg], d_e は IMD の減衰係数[Ns/m]である. 上式は式(2-19)を用いれば次式となる.

$$m_e \ddot{u}_e(t) + d_e \dot{u}_e(t) + k_e u_e(t) - k_e \mathbf{C}_p \mathbf{q}(t) = 0 \quad (2-32)$$

はりと IMD の運動方程式より, ベクトル $[\mathbf{q}^T(t) \ u_e(t)]^T$ を用いれば, 全体の系の運動方程式は次式となる.

$$\mathbf{M}_a \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}(t) \\ \ddot{u}_e(t) \end{bmatrix} + \mathbf{D}_a \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \dot{u}_e(t) \end{bmatrix} + \mathbf{K}_a \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ u_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{w}_0, \quad (2-33)$$

$$\mathbf{M}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0}_{n \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times n} & m_e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0}_{n \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times n} & d_e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_s & -k_e \mathbf{C}_p^T \\ -k_e \mathbf{C}_p & k_e \end{bmatrix}$$

これより, 状態ベクトルを $\mathbf{z}_a(t) = [\mathbf{q}^T(t) \ u_e(t) \ \dot{\mathbf{q}}^T(t) \ \dot{u}_e(t)]^T$ とすれば, 全体の系の状態方程式は, 以下のようになる.

$$\dot{\mathbf{z}}_a(t) = \mathbf{A}_a \mathbf{z}_a(t) + \mathbf{B}_a \ddot{w}_0(t),$$

$$\mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n+1) \times (n+1)} & \mathbf{I}_{n+1} \\ -\mathbf{M}_a^{-1} \mathbf{K}_a & -\mathbf{M}_a^{-1} \mathbf{D}_a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n \\ 0 \\ \mathbf{F} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-34)$$

ただし, 記号の下付文字 a は, IMD ありの場合を明示するものである (以降, 他の記号に対しても同様) .

観測位置 $\mathbf{x}_s = [x_1 \ \dots \ x_{n_s}]^T$ に対応するはりの変位 $\mathbf{u}_{sa}(t) = [u_a(x_1, t) \ \dots \ u_a(x_{n_s}, t)]^T$ および曲げ応力 $\boldsymbol{\sigma}_{sa}(t) = [\sigma_a(x_1, t) \ \dots \ \sigma_a(x_{n_s}, t)]^T$ ならびに IMD の反力 $f_a(t)$ は、それぞれ次式となる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{sa}(t) &= \mathbf{C}_{sa} \mathbf{z}_a(t), \\ \mathbf{C}_{sa} &= [\mathbf{C}_s \ \mathbf{0}_{n_s \times 1} \ \mathbf{0}_{n_s \times n} \ \mathbf{0}_{n_s \times 1}] = [\mathbf{C}_s \ \mathbf{0}_{n_s \times (n+2)}] \end{aligned} \quad (2-35)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{sa}(t) &= \mathbf{C}_{\sigma sa} \mathbf{z}_a(t), \\ \mathbf{C}_{\sigma sa} &= [\mathbf{C}_{\sigma s} \ \mathbf{0}_{n_s \times 1} \ \mathbf{0}_{n_s \times n} \ \mathbf{0}_{n_s \times 1}] = [\mathbf{C}_{\sigma s} \ \mathbf{0}_{n_s \times (n+2)}] \end{aligned} \quad (2-36)$$

$$f_a(t) = k_e [\mathbf{C}_p \ -1 \ \mathbf{0}_{1 \times n} \ 0] \mathbf{z}_a(t) = k_e [\mathbf{C}_p \ -1 \ \mathbf{0}_{1 \times (n+1)}] \mathbf{z}_a(t) \quad (2-37)$$

上記の 3 種の応答は、式(2-34) $\mathbf{z}_a(t)$ を用いて導出できる。

2.3 最適設計問題の定式化

これまでに示したはりおよび IMD のモデルについての最適な設計変数を遺伝的アルゴリズムによって求める。本検討での遺伝的アルゴリズムの設定は、個体数を 20、最大世代数を 100、エリート選択数を 1、交叉率および突然変異率（いずれも個体数からエリート選択数を除いた分に対する割合）をそれぞれ 80% および 20% とする。設計変数としては、装置容量（型式・許容荷重）、台数、取付位置、慣性質量、ばね定数等様々なものが考えられるが、本検討では、式(2-19)の \mathbf{C}_p に変化を（ひいては、式(2-33)の \mathbf{K}_a および式(2-37)に変化を）与える取付位置 x_p および式(2-33)の \mathbf{M}_a に変化を与える慣性質量 m_e の 2 つを設計変数とし、検討を行う。

設計変数は、ある上下限值（それらの記号は、設計変数の記号に、それぞれ、上線または下線を付けて表現する）を持ち、最適化問題においてその最適値が探索される。それらは、以下のように定義される。

取付位置 x_p は、次のように表せる。

$$0 = \underline{x}_p \leq x_p \leq \overline{x}_p = \frac{1}{2}L \quad (2-38)$$

取付位置 x_p は、図 2-1 に示す通り、はりの左端からの距離である。今回のはり単支持であり、形状と境界条件が対称の関係にあるため、はりの中央から左右にある同じ距離だけ離れた点を支持するような場合には、それぞれの各種応答が対称な結

表 2-1 IMD の諸元

許容荷重 f_{al} [N]	慣性質量 m_e [kg]	減衰係数 d_e [Ns/m]	ばね定数 k_e [N/m]
10×10^3	0.5-100% of 135×10^3	0	17×10^6

果となることが明らかであり、この対称である結果の一方を省略するため、 x_p の下限と上限は、それぞれ、0 とはりの中央までの距離としている。

慣性質量 m_e は、次のように表せる。

$$\underline{m_e} \leq m_e \leq \overline{m_e} = m_{emax} \quad (2-39)$$

ただし、最適設計プログラムの実装の観点から、慣性質量 m_e は、慣性質量倍率（1 以下の正の実数） ρ_{me} と最大慣性質量 m_{emax} との積として次式で表現する。

$$m_e = \rho_{me} m_{emax}, \quad \underline{\rho_{me}} \leq \rho_{me} \leq \overline{\rho_{me}} = 1 \quad (2-40)$$

ここで、 m_{emax} は表 2-1 の第 2 列の 100%の時の値である。また、IMD の構造を考えた場合、慣性質量を小さくしようとしても、部品の存在によりそれには限度がある。つまり、最大慣性質量の内の数%分の慣性質量値は設計上排除できない。倍率の下限値は、このような設計上の制約により設定されるものであり、本章の例では、表 2-1 の通り 0.005 (0.5%) とした。

前述のはりと IMD のモデルに上記の設計変数を適用し、基礎の入力加速度として各種の記録または人工の地震波加速度が与えられた場合における、各種応答の改善の程度を考慮した最適設計を行う。今回の最適化問題は、性能の指標となる次式の評価関数を最小化する問題として定式化する。

$$J = \sum_{h=1}^{n_w} (J_1^h + J_2^h + J_3^h + J_4^h), \quad h = 1, \dots, n_w \quad (2-41)$$

ここで、 n_w は、はりの応答計算に使用される地震波の数であり、本章の例では表 2-2 に示す地震波を考慮する。図 2-3 にこの地震波加速度のパワースペクトルを示す。なお、パワースペクトルの定義およびそこで用いた平滑化の手法については、大崎[3]に従った。評価関数 J は、地震波ごとに算出される $J_1^h + J_2^h + J_3^h + J_4^h$, $h = 1, \dots, n_w$ の総和

として与えられる。 J_1^h は、はりの各観測位置での変位を全体的に抑制させるための項であり、以下のように定義される。

$$J_1^h = \sum_{k=1}^{n_s} \left(\frac{\text{RMS}(u_{sa_k}^h(t))}{\text{RMS}(u_{s0_k}^h(t))} \right) + \sum_{k=1}^{n_s} \left(\frac{\text{Peak}(u_{sa_k}^h(t))}{\text{Peak}(u_{s0_k}^h(t))} \right) \quad (2-42)$$

ここで、 $\text{RMS}(X(t))$ および $\text{Peak}(X(t))$ は、それぞれ、 $X(t)$ の地震継続時間全体についての二乗平均平方根およびピーク値を表す。 J_2^h は、IMD の反力のレベルを抑制させるた

表 2-2 考慮される地震波のリスト

地震番号 h	地震名
1	El Centro NS (1940)
2	BCJ-L1 (人工)
3	BCJ-L2 (人工)
4	Hachinohe NS (1968)
5	Kobe NS (1995)
6	Akita NS (1983)
7	Taft NS (1952)

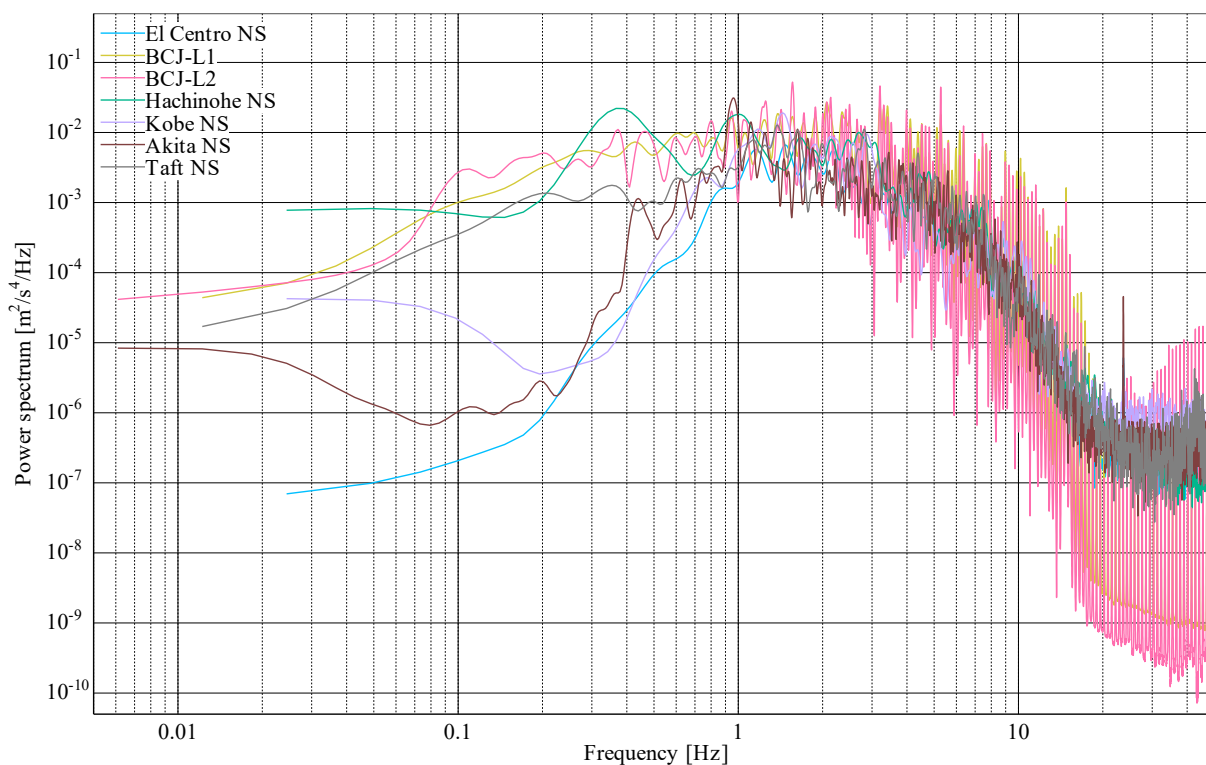


図 2-3 地震波加速度のパワースペクトル（各地震波の基礎加速度ピーク値 PGA を 1 m/s^2 に揃え、Parzen 窓を使用して平滑化したもの。いずれの地震波も大略の傾向として振動数成分の大部分は 1 Hz から 10 Hz の間に収まっている）

めの項であり、特にデバイスの反力が許容荷重 f_{al} を超過する場合には、ペナルティとしての係数 w_p （適当な明らかに大きな値として、ここでは $w_p = 10^3$ 。 w_p の設定の目安については、付録 A を参照のこと）が掛けられ、その時の個体（設計変数の組合せ）の評価が悪化するように働くものであり、以下のように定義される。

$$J_2^h = \begin{cases} \rho_{\text{force}}^h & (\rho_{\text{force}}^h \leq 1) \\ w_p \rho_{\text{force}}^h & (\rho_{\text{force}}^h > 1) \end{cases}, \quad \rho_{\text{force}}^h = \frac{\text{Peak}(f_a^h(t))}{f_{al}} \quad (2-43)$$

J_3^h は、はりの各観測位置での曲げ応力を全体的に抑制させるための項であり、以下のように定義される。

$$J_3^h = \sum_{k=1}^{n_s} \left(\frac{\text{RMS}(\sigma_{sa_k}^h(t))}{\text{RMS}(\sigma_{s0_k}^h(t))} \right) + \sum_{k=1}^{n_s} \left(\frac{\text{Peak}(\sigma_{sa_k}^h(t))}{\text{Peak}(\sigma_{s0_k}^h(t))} \right) \quad (2-44)$$

J_4^h は、曲げ応力ピーク値の全観測位置中での最大値を抑制させるための項であり、特に、応力がはりの許容応力 σ_{al} を超過する場合には、 J_2^h の場合と同様にペナルティとしての係数 w_p が掛けられるものであり、以下のように定義される。

$$J_4^h = \begin{cases} \rho_{\text{stress}}^h & (\rho_{\text{stress}}^h \leq 1) \\ w_p \rho_{\text{stress}}^h & (\rho_{\text{stress}}^h > 1) \end{cases}, \quad \rho_{\text{stress}}^h = \max_{1 \leq k \leq n_s} \frac{\text{Peak}(\sigma_{sa_k}^h(t))}{\sigma_{al}} \quad (2-45)$$

ここで、 $u_{sa_k}^h$ 、 $u_{s0_k}^h$ および $\sigma_{sa_k}^h$ 、 $\sigma_{s0_k}^h$ は、それぞれ、観測位置 x_k 、 $k = 1, \dots, n_s$ に対応する変位および曲げ応力である（下付文字 a および 0 は、それぞれ、IMD ありおよびはり単体の場合を明示するもの）。

2.4 設計例

前節で設定した問題に対し、ある諸元を持つはりに対して最適設計を行った例を示す。はりの諸元を表 2-3 および表 2-4 に示す。はりは、外径 60.5 mm、厚さ 8.7 mm（50A×Sch160）の鋼製配管を仮定したものであり、全長は 13 m と 9 m の 2 種とした。はりの諸元は、その 1 次固有振動数が実際の配管解析での配管系の 1 次固有振動数として取り得るような値（それは相当に幅広い場合が考えられるが）に設定した。適用

表 2-3 はりの諸元

全長	許容応力	密度	縦弾性係数	断面二次 モーメント	断面係数	断面積
L [m]	σ_{al} [Pa]	ρ [kg/m ³]	E [Pa]	I [m ⁴]	Z [m ³]	A [m ²]
13 or 9	215×10^6	7.85×10^3	200×10^9	$4.882\ 58 \times 10^{-7}$	$1.614\ 08 \times 10^{-5}$	$1.415\ 79 \times 10^{-3}$

表 2-4 はり (IMD 等を取付けていない単体のはり) の固有振動数

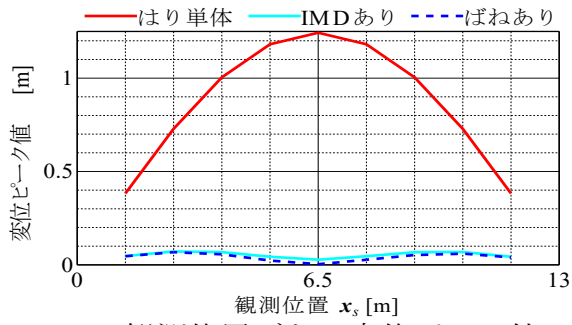
全長	1 次	2 次	3 次	4 次	5 次	6 次	7 次	8 次	9 次	10 次
L [m]	[Hz]	[Hz]	[Hz]	[Hz]	[Hz]	[Hz]	[Hz]	[Hz]	[Hz]	[Hz]
13	0.871	3.485	7.841	13.940	21.781	31.365	42.691	55.759	70.571	87.124
9	1.818	7.271	16.360	29.084	45.444	65.440	89.071	116.338	147.240	181.778

対象の IMD の許容荷重 f_{al} 、ばね定数 k_e 、慣性質量 m_e は、10 kN クラスの実用装置として実現可能であると想定される表 2-1 の諸元に従うものとする。

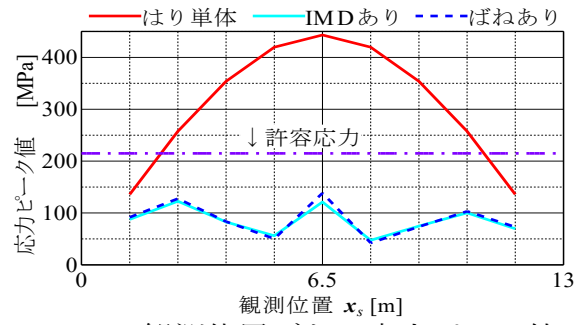
これらの諸元を持つモデルについて最適化の計算を行い、設計変数の最適値としての取付位置 x_p および慣性質量 m_e を求める。また、IMD を取付けたはりの各観測位置（全長を 10 等分した時の 9 節点とする）での変位（式(2-35)）、曲げ応力（式(2-36)）および装置反力（式(2-37)）の 3 種の応答を計算し、はり単体の場合の応答結果との比較を示す。同様に、単純なばね（IMD のばね定数と同じ値を持つ）を取付けたはりについても 3 種の応答を計算し、この結果との比較も行う。入力は、表 2-2 に示す 7 種の地震波加速度を用いることとし、全て最大加速度を 7.5 m/s^2 に基準化する。はりのモデルのモードの最大次数 n は 20 とした。以下に得られた結果を示す。

2.4.1 全長 13 m のはりの場合（固有振動数が低い場合）

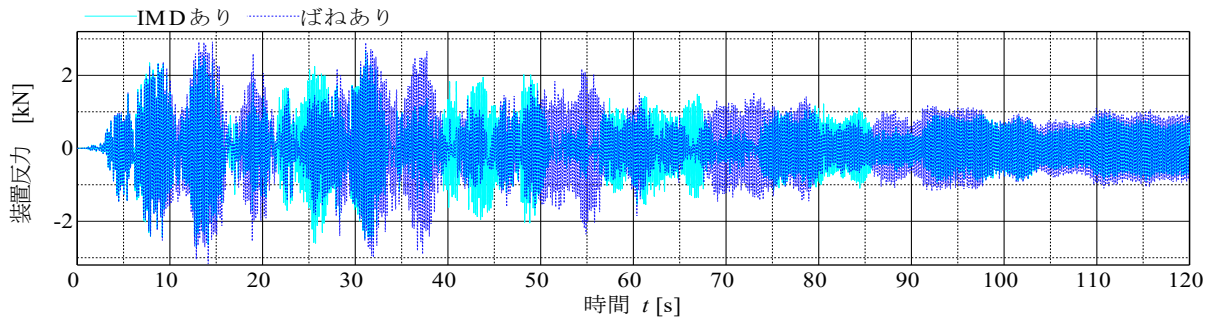
計算の結果、最適設計変数として、取付位置 $x_p = 6.262$ [m]（はりの左端より全長の 48.168%の点）、慣性質量 $m_e = 11.454 \times 10^3$ [kg]（最大慣性質量 $m_{e\max}$ の 8.485%分）の組合せを得た。この場合の応答を図 2-4 に示す（代表で地震波 BCJ-L2 の場合）。また、地震波ごとに算出される各種応答のピーク値を表 2-5 ($L = 13$ [m]の場合)に示す。表では、ピーク値の比（「IMD あり÷はり単体」および「IMD あり÷ばねあり」とその範囲（比の最良から最悪）についてもまとめている。「IMD あり÷はり単体」の比は、全て 100%を下回っていることから、全地震波を考慮した最適化が有効に働いたと考えられる。「IMD あり÷ばねあり」の各種の比は、100%を下回る場合もあれば上回る場合もあるという結果となった。全ての場合で慣性質量を調整した IMD 取付けの方が単純なばね取付けよりも良好という結果ではなかったが、いくつかの地震波については、IMD 取付けの方が単なるばね取付けよりも明確に応答を低減できており、



(a) 観測位置ごとの変位ピーク値



(b) 観測位置ごとの応力ピーク値



(c) 装置反力の時刻歴

図 2-4 応答結果 ($L = 13$ [m], BCJ-L2)

表 2-5 $L = 13$ [m]の場合の各種応答のピーク値

応答	はりの条件	El Centro	BCJ-L1	BCJ-L2	Hachinohe	Kobe	Akita	Taft	最良	最悪
変位 ピーク 値	はり単体 [mm]	331	1 086	1 243	1 153	386	940	513	-	-
	IMD あり [mm]	23.0	75.2	71.8	39.4	17.4	87.8	82.1	-	-
	ばねあり [mm]	31.2	73.8	67.9	38.7	16.0	87.3	68.0	-	-
	IMD あり ÷ はり単体	6.95%	6.92%	5.77%	3.42%	4.49%	9.33%	16.0%	3.42%	16.0%
	IMD あり ÷ ばねあり	73.8%	102%	106%	102%	108%	101%	121%	73.8%	121%
応力 ピーク 値	はり単体 [MPa]	145	387	443	412	137	333	186	-	-
	IMD あり [MPa]	56.0	124	123	73.3	33.8	150	166	-	-
	ばねあり [MPa]	68.3	143	138	71.2	35.9	156	147	-	-
	IMD あり ÷ はり単体	38.6%	32.0%	27.7%	17.8%	24.8%	45.0%	89.4%	17.8%	89.4%
	IMD あり ÷ ばねあり	81.9%	86.7%	88.6%	103%	94.3%	96.5%	113%	81.9%	113%
反力 ピーク 値	IMD あり [kN]	1.28	2.84	2.69	1.75	0.855	3.17	3.68	-	-
	ばねあり [kN]	1.54	3.26	3.16	1.72	0.874	2.94	3.32	-	-
	IMD あり ÷ ばねあり	82.9%	87.2%	84.9%	102%	97.8%	108%	111%	82.9%	111%

設計変数を調整した IMD を適用することで単純なばねの適用では得られない応答低減の効果が得られる場合もあることが分かる（より詳しい考察は次章で行う）。

2.4.2 全長 9 m のはりの場合（固有振動数が高い場合）

計算の結果，最適設計変数として，取付位置 $x_p = 4.5$ [m]（はりの中央），慣性質量 $m_e = 135 \times 10^3$ [kg]（最大慣性質量 $m_{e\max}$ の 100%分）の組合せを得た．はりの中央部に設計変数の上限としての慣性質量を持つ IMD を取付けるという結果である．前項と同様に地震波ごとに算出される各種応答のピーク値等を表 2-6（ $L = 9$ [m]の場合）に示す．「IMD あり÷はり単体」の比は，前項と同様に 100%を大きく下回っている．また，「IMD あり÷ばねあり」の比は，全て 100%に近い値となった．大きな慣性質量を持つ IMD の適用では，ばね単体を適用した結果と近似した結果となることが再確認できた[5]．ただし，IMD の慣性質量とはりの質量との大小関係により近似程度は変化するものであるため[5]，実際の配管系の動的解析においても，より現実的なモデルでの IMD を考慮することは，より精密な計算につながると考えられる．

表 2-6 $L = 9$ [m]の場合の各種応答のピーク値

応答	はりの条件	El Centro	BCJ-L1	BCJ-L2	Hachinohe	Kobe	Akita	Taft	最良	最悪
変位 ピーク 値	はり単体 [mm]	289	663	782	320	332	518	296	-	-
	IMD あり [mm]	3.53	6.02	5.47	3.56	6.92	8.21	5.84	-	-
	ばねあり [mm]	3.50	5.92	5.16	3.29	6.55	7.45	6.01	-	-
	IMD あり÷ はり単体	1.22%	0.908%	0.699%	1.11%	2.09%	1.58%	1.98%	0.699%	2.09%
	IMD あり÷ ばねあり	101%	102%	106%	108%	106%	110%	97.2%	97.2%	110%
応力 ピーク 値	はり単体 [MPa]	212	489	576	235	245	381	218	-	-
	IMD あり [MPa]	19.8	34.0	29.9	19.9	37.8	43.9	35.2	-	-
	ばねあり [MPa]	19.9	34.2	29.9	19.5	37.3	42.3	34.7	-	-
	IMD あり÷ はり単体	9.32%	6.95%	5.18%	8.47%	15.4%	11.5%	16.1%	5.18%	16.1%
	IMD あり÷ ばねあり	99.6%	99.4%	99.8%	102%	101%	104%	101%	99.4%	104%
反力 ピーク 値	IMD あり [kN]	0.681	1.15	1.02	0.714	1.21	1.39	1.18	-	-
	ばねあり [kN]	0.682	1.15	1.02	0.709	1.21	1.35	1.18	-	-
	IMD あり÷ ばねあり	99.9%	99.7%	99.9%	101%	100.5%	103%	101%	99.7%	103%

2.5 結言

IMD を適用したはりに対する最適化検討を行い、デバイスの取付位置および慣性質量の 2 つの設計変数の最適値の探索が行えることを示した。ここでは、2 種の諸元のモデルについて検討し、慣性質量値を調整した IMD 適用には、単なるばね適用では得られない応答低減効果が得られる場合があること、および、ある程度固有振動数の高い系に対しては慣性質量値の大きい IMD の適用が最も有効な応答低減対策となり、そのような IMD の適用は単純なばね適用の場合に近似した応答結果となることを確認した。

本章の検討は、適用される IMD を 1 台のある 1 種の装置容量（型式・許容荷重）であると仮定した最も基礎的な場合のものであった。しかし、より実際的な設計としては複数の IMD が適用候補となるべきであるため、次章では、本章の内容を拡張し、適用される IMD が多数台かつ複数型式であると仮定したより一般的な場合について検討を行う。

参考文献

- [1] 奥村敦史, 振動遮断接続装置及び構造物の振動遮断接続方法, 特許第 3718683 号 (出願 1995, 公開 1997).
- [2] Smith, M. C. and Wang, F. C., Performance benefits in passive vehicle suspensions employing inerters, *Vehicle System Dynamics*, Vol. 42, No. 4 (2004), pp. 235-257.
- [3] Hiramoto, K., Matsuoka, T., Sunakoda, K., Fukukita, A. and Yamazaki, I., Bang-bang type semi-active control of civil structures: a prediction-based approach, *Journal of System Design and Dynamics*, Vol. 4, No. 1 (2010), pp. 103-114.
- [4] Nakamura, Y. and Hanzawa, T., Performance-based placement design of tuned electromagnetic inertial mass dampers, *frontiers in Built Environment*, doi: [10.3389/fbuil.2017.00026](https://doi.org/10.3389/fbuil.2017.00026) (2017).
- [5] Sunakoda, K. and Yamazaki, I., Inertia mass damper and its application, *Proceedings of the ASME 2017 Pressure Vessels and Piping Conference*, No. PVP2017-65192 (2017).
- [6] 大崎順彦, 新・地震動のスペクトル解析入門, 鹿島出版会 (1994), pp. 81-109.

第3章 IMD 付配管系の動的最適設計：多台適用多型式選定の場合

3.1 緒言

本章では、前章の検討を拡張したものとして、配管系への多数台かつ多型式（ここで、型式とは、同種のデバイスの装置容量もしくは許容荷重の大きさによって分類される型を意味する）の IMD（より現実的なモデルでの考慮を前提とする）の適用による振動抑制効果や設置コストの系統的な最適設計手法の確立を目的とし、配管系を模擬した単純なものとして単一断面のはりの連続体モデルを対象に、そのはりおよび取付デバイスの健全性を保ちつつ、はりの各種の動的応答を最適化する設計手法を提案する。はじめに、対象のモデルおよび応答の計算式を示す。得られた配管系のモデルに対して、最適設計問題を IMD が設置された配管系に地震外乱が作用した場合の健全性を表す種々の仕様に加え、IMD 設置に伴うデバイスの数量と型式に依存したコストも考慮できるような形で定式化する。モデル化した配管系に対して最適設計を行い、その結果を示し、提案手法が、課された仕様を満足するよう設計変数を探索可能なことを示す。この結果は、従来行われてきた IMD をばねとみなしたモデルで考えた場合の結果と比較され、IMD をより現実的なモデルとみなして最適設計を行うことの重要性が認識される。

3.2 IMD を設置した配管系のモデル化

本節では、配管系の最も単純なモデルとして、図 3-1 に示すようなはりおよび n_d 台付加された IMD のモデル（基礎励振を受ける長さ L の単純支持ばり）を考える。まず、図 3-1 の(i)はり単体の場合について考える。これは前章で示した場合と同様であり、

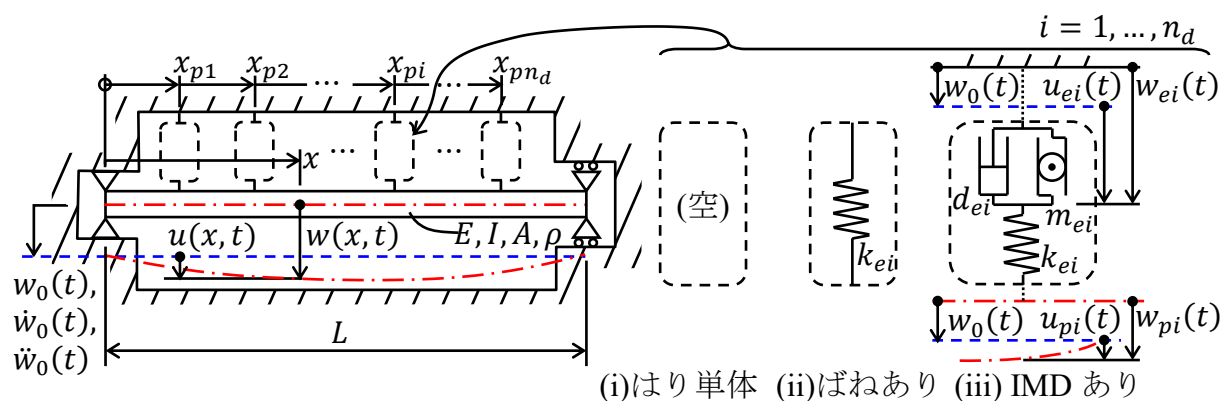


図 3-1 単体のはりおよびばねまたは IMD を n_d 台取付けたはりの概略モデル

運動方程式および状態方程式は、それぞれ、式(2-12)および式(2-13)によって、また、観測位置に対応する変位および曲げ応力は、それぞれ、式(2-14)および式(2-15)によって表現される。

次に、図 3-1 (ii) に示すようなばね支持（以下ばねありと呼ぶ）の場合について考える。これは、実際に単純なばねを使用することを想定しているのではなく、従来の配管解析において通常行われる IMD を単純なばねモデルとみなす場合を想定したものである。IMD 等の設置に関する実務的な配管設計において、1980 年代までは、主に解析に用いるコンピュータの能力の限界という理由から、IMD をばねとみなした簡易な配管応力解析が行われてきた。コンピュータの高性能化により IMD 本来の動特性を考慮可能な環境の整った現在においても、この考え方に基づく解析・設計は継続して行われている[1]。前述のばねありの条件とは、従来行われている IMD をばねとみなした場合と IMD を慣性質量を考慮したより現実的なモデルで考慮した場合とを比較検討するために導入したものである。この場合のはりの微小要素は、 $x \neq x_{pi}, i = 1, \dots, n_d$ であれば前章で示した図 2-2 と同様に表現できるが、 $x = x_{pi}, i = 1, \dots, n_d$ に限って微小要素上部にばねが接続されるものとなる。これを考慮した上で、微小要素の上下方向の力および左端周りでのモーメントの釣合いを立て、同様に関係式を組合せると、次式が得られる。

$$\rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + \sum_{i=1}^{n_d} k_{ei} u_{pi}(t) \delta(x - x_{pi}) = -\rho A \ddot{w}_0(t), \quad (3-1)$$

$\delta(\)$: ディラックのデルタ関数

ここで、 k_{ei} は i 番目 ($i = 1, \dots, n_d$) のばねのばね定数[N/m]、 $u_{pi}(t)$ は i 番目の取付位置 x_{pi} でのはりの基礎に対する相対変位（はりのたわみ）[m]である。

式(2-8)を式(3-1)に代入すれば、次式が得られる。

$$\rho A \sum_{j=1}^n \phi_j(x) \ddot{q}_j(t) + EI \sum_{j=1}^n \left(\frac{\lambda_j}{L}\right)^4 \phi_j(x) q_j(t) + \sum_{i=1}^{n_d} k_{ei} u_{pi}(t) \delta(x - x_{pi}) = -\rho A \ddot{w}_0(t) \quad (3-2)$$

式(3-2)の両辺に $\phi_j(x), j = 1, \dots, n$ を掛け、 x について区間 $[0, L]$ で積分すると、直交性より、 j 次モードについて、

$$\rho A \ddot{q}_j(t) + EI \left(\frac{\lambda_j}{L} \right)^4 q_j(t) + \sum_{i=1}^{n_d} k_{ei} u_{pi}(t) \phi_j(x_{pi}) = -\rho A \ddot{w}_0(t) \int_0^L \phi_j(x) dx \quad (3-3)$$

が得られる. ベクトル $\mathbf{q}(t) = [q_1(t) \quad q_2(t) \quad \cdots \quad q_n(t)]^T$ をおくと,

$$u_{pi}(t) = u(x_{pi}, t) = \sum_{j=1}^n \phi_j(x_{pi}) q_j(t) = \mathbf{C}_{pi} \mathbf{q}(t), \quad i = 1, \dots, n_d, \quad (3-4)$$

$$\mathbf{C}_{pi} = [\phi_1(x_{pi}) \quad \phi_2(x_{pi}) \quad \cdots \quad \phi_n(x_{pi})]$$

となり, この関係を用いると, 本系の n 次モード近似運動方程式は, 以下のように表される.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_s) \mathbf{q}(t) = \rho A \mathbf{F} \ddot{w}_0(t),$$

$$\mathbf{K}_s = \sum_{i=1}^{n_d} k_{ei} \mathbf{C}_{pi}^T \mathbf{C}_{pi} = \mathbf{C}_p^T \mathbf{K}_e \mathbf{C}_p, \quad \mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} k_{e1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_{e2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k_{en_d} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{p1} \\ \mathbf{C}_{p2} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{pn_d} \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

上記の運動方程式は, 減衰行列 $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n), d_j \geq 0, j = 1, \dots, n$ を導入すれば, より一般的な表現として以下のようなになる.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_s) \mathbf{q}(t) = \rho A \mathbf{F} \ddot{w}_0(t) \quad (3-6)$$

これより, 状態ベクトルを $\mathbf{z}_s(t) = [\mathbf{q}^T(t) \quad \dot{\mathbf{q}}^T(t)]^T$ とすれば, 本系の状態方程式は, 以下のようなになる.

$$\dot{\mathbf{z}}_s(t) = \mathbf{A}_s \mathbf{z}_s(t) + \mathbf{B}_s \ddot{w}_0(t),$$

$$\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_s) & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n \\ \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

ここで, $\mathbf{O}_{n \times n}$ は $n \times n$ 零行列, $\mathbf{0}_n = \mathbf{O}_{n \times 1}$ は n 次の 0 のみからなる縦ベクトルである. ただし, 記号の下付文字 s は, ばねありの場合を明示するものである (以降, 他の記号に対しても同様) .

観測位置 $\mathbf{x}_s = [x_1 \quad \cdots \quad x_{n_s}]^T$ に対応するはりの変位 $\mathbf{u}_{ss}(t) = [u_s(x_1, t) \quad \cdots \quad u_s(x_{n_s}, t)]^T$ および曲げ応力 $\boldsymbol{\sigma}_{ss}(t) = [\sigma_s(x_1, t) \quad \cdots \quad \sigma_s(x_{n_s}, t)]^T$ ならびにばねの反力 $\mathbf{f}_s(t) = [f_{s1}(t) \quad \cdots \quad f_{sn_d}(t)]^T$ は, それぞれ以下のようなになる.

$$\mathbf{u}_{ss}(t) = \mathbf{C}_{ss}\mathbf{z}_s(t), \quad \mathbf{C}_{ss} = [\mathbf{C}_s \quad \mathbf{0}_{n_s \times n}],$$

$$\mathbf{C}_s = \begin{bmatrix} \phi_1(x_1) & \cdots & \phi_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(x_{n_s}) & \cdots & \phi_n(x_{n_s}) \end{bmatrix} \quad (3-8)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{ss}(t) = \mathbf{C}_{\sigma ss}\mathbf{z}_s(t), \quad \mathbf{C}_{\sigma ss} = [\mathbf{C}_{\sigma s} \quad \mathbf{0}_{n_s \times n}],$$

$$\mathbf{C}_{\sigma s} = -\frac{EI}{Z} \begin{bmatrix} \phi_1''(x_1) & \cdots & \phi_n''(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1''(x_{n_s}) & \cdots & \phi_n''(x_{n_s}) \end{bmatrix} \quad (3-9)$$

$$\mathbf{f}_s(t) = \begin{bmatrix} k_{e1}\mathbf{C}_{p1}\mathbf{q}(t) \\ k_{e2}\mathbf{C}_{p2}\mathbf{q}(t) \\ \vdots \\ k_{end}\mathbf{C}_{pnd}\mathbf{q}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{K}_e[\mathbf{C}_p \quad \mathbf{0}_{n_d \times n}]\mathbf{z}_s(t) \quad (3-10)$$

ここで、 Z は断面係数[m³]である。 $\mathbf{f}_s(t)$ の成分は、それぞれ、 i 番目のばねのばね定数とその変形量の積となっている。上記の3種の応答は、式(3-7) $\mathbf{z}_s(t)$ を用いて導出できる。

最後に、図 3-1 の(iii) IMD ありの場合、すなわち、IMD が n_d 台設置されている場合を考える。この場合のはりの微小要素を(ii)ばねありの場合と同様に考慮すれば、次式が得られる。

$$\rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + \sum_{i=1}^{n_d} k_{ei} (u_{pi}(t) - u_{ei}(t)) \delta(x - x_{pi}) = -\rho A \ddot{w}_0(t) \quad (3-11)$$

ここで、 k_{ei} は i 番目 ($i = 1, \dots, n_d$) の IMD のばね定数[N/m]、 $u_{ei}(t)$ は i 番目の IMD のばね要素と慣性質量要素とが直列に結合している点の基礎に対する相対変位[m]である。

式(2-8)を式(3-11)に代入すれば、次式が得られる。

$$\rho A \sum_{j=1}^n \phi_j(x) \ddot{q}_j(t) + EI \sum_{j=1}^n \left(\frac{\lambda_j}{L}\right)^4 \phi_j(x) q_j(t)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n_d} k_{ei} (u_{pi}(t) - u_{ei}(t)) \delta(x - x_{pi}) = -\rho A \ddot{w}_0(t) \quad (3-12)$$

式(3-12)の両辺に $\phi_j(x)$, $j = 1, \dots, n$ を掛け, x について区間 $[0, L]$ で積分すると, 直交性より, j 次モードについて,

$$\begin{aligned} \rho A \ddot{q}_j(t) + EI \left(\frac{\lambda_j}{L} \right)^4 q_j(t) \\ + \sum_{i=1}^{n_d} k_{ei} (u_{pi}(t) - u_{ei}(t)) \phi_j(x_{pi}) = -\rho A \ddot{w}_0(t) \int_0^L \phi_j(x) dx \end{aligned} \quad (3-13)$$

が得られる. $\mathbf{q}(t) = [q_1(t) \ q_2(t) \ \dots \ q_n(t)]^T$ を用いると, 本系の n 次モード近似運動方程式は, 以下のように表される.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_s) \mathbf{q}(t) - \sum_{i=1}^{n_d} k_{ei} \mathbf{C}_{pi}^T u_{ei}(t) = \rho A \mathbf{F} \ddot{w}_0(t) \quad (3-14)$$

上記の運動方程式は, 減衰行列 \mathbf{D} を導入すると, 以下のようになる.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_s) \mathbf{q}(t) - \sum_{i=1}^{n_d} k_{ei} \mathbf{C}_{pi}^T u_{ei}(t) = \rho A \mathbf{F} \ddot{w}_0(t) \quad (3-15)$$

また, n_d 台設置する IMD についての運動方程式は, i 番目 ($i = 1, \dots, n_d$) について, 次式となる (式(2-31)の各記号に下付文字 i を付けたものとなっている) [2].

$$m_{ei} \ddot{u}_{ei}(t) + d_{ei} \dot{u}_{ei}(t) + k_{ei} (u_{ei}(t) - u_{pi}(t)) = 0 \quad (3-16)$$

ここで, m_{ei} は i 番目の IMD の慣性質量[kg], d_{ei} は i 番目の IMD の減衰係数[Ns/m]である. 上式は式(3-4)を用いれば次式となる.

$$m_{ei} \ddot{u}_{ei}(t) + d_{ei} \dot{u}_{ei}(t) + k_{ei} u_{ei}(t) - k_{ei} \mathbf{C}_{pi} \mathbf{q}(t) = 0 \quad (3-17)$$

はりと IMD の運動方程式より, $\mathbf{u}_e(t) = [u_{e1}(t) \ u_{e2}(t) \ \dots \ u_{en_d}(t)]^T$ と定義し, ベクトル $[\mathbf{q}^T(t) \ \mathbf{u}_e^T(t)]^T$ を用いれば, 全体の系の運動方程式は次式となる.

$$\begin{aligned}
& \mathbf{M}_a \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}(t) \\ \ddot{\mathbf{u}}_e(t) \end{bmatrix} + \mathbf{D}_a \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \dot{\mathbf{u}}_e(t) \end{bmatrix} + \mathbf{K}_a \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \mathbf{u}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0}_{n_d} \end{bmatrix} \ddot{w}_0, \\
\mathbf{M}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0}_{n \times n_d} \\ \mathbf{0}_{n_d \times n} & \mathbf{M}_e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0}_{n \times n_d} \\ \mathbf{0}_{n_d \times n} & \mathbf{D}_e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_s & -(\mathbf{K}_e \mathbf{C}_p)^T \\ -\mathbf{K}_e \mathbf{C}_p & \mathbf{K}_e \end{bmatrix} \quad (3-18)
\end{aligned}$$

これより、状態ベクトルを $\mathbf{z}_a(t) = [\mathbf{q}^T(t) \quad \mathbf{u}_e^T(t) \quad \dot{\mathbf{q}}^T(t) \quad \dot{\mathbf{u}}_e^T(t)]^T$ とすれば、全体の系の状態方程式は、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
& \dot{\mathbf{z}}_a(t) = \mathbf{A}_a \mathbf{z}_a(t) + \mathbf{B}_a \ddot{w}_0(t), \\
\mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n+n_d) \times (n+n_d)} & \mathbf{I}_{n+n_d} \\ -\mathbf{M}_a^{-1} \mathbf{K}_a & -\mathbf{M}_a^{-1} \mathbf{D}_a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_{n_d} \\ \mathbf{F} \\ \mathbf{0}_{n_d} \end{bmatrix} \quad (3-19)
\end{aligned}$$

ただし、記号の下付文字 a は、IMD ありの場合を明示するものである（以降、他の記号に対しても同様）。

観測位置 $\mathbf{x}_s = [x_1 \quad \dots \quad x_{n_s}]^T$ に対応するはりの変位 $\mathbf{u}_{sa}(t) = [u_a(x_1, t) \quad \dots \quad u_a(x_{n_s}, t)]^T$ および曲げ応力 $\boldsymbol{\sigma}_{sa}(t) = [\sigma_a(x_1, t) \quad \dots \quad \sigma_a(x_{n_s}, t)]^T$ ならびに IMD の反力 $\mathbf{f}_a(t) = [f_{a1}(t) \quad \dots \quad f_{an_d}(t)]^T$ は、それぞれ以下のようになる。

$$\begin{aligned}
& \mathbf{u}_{sa}(t) = \mathbf{C}_{sa} \mathbf{z}_a(t), \\
\mathbf{C}_{sa} = [\mathbf{C}_s \quad \mathbf{0}_{n_s \times n_d} \quad \mathbf{0}_{n_s \times n} \quad \mathbf{0}_{n_s \times n_d}] \\
& = [\mathbf{C}_s \quad \mathbf{0}_{n_s \times (n+2n_d)}] \quad (3-20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \boldsymbol{\sigma}_{sa}(t) = \mathbf{C}_{\sigma sa} \mathbf{z}_a(t), \\
\mathbf{C}_{\sigma sa} = [\mathbf{C}_{\sigma s} \quad \mathbf{0}_{n_s \times n_d} \quad \mathbf{0}_{n_s \times n} \quad \mathbf{0}_{n_s \times n_d}] \\
& = [\mathbf{C}_{\sigma s} \quad \mathbf{0}_{n_s \times (n+2n_d)}] \quad (3-21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{f}_a(t) = \begin{bmatrix} k_{e1} (\mathbf{C}_{p1} \mathbf{q}(t) - \mathbf{u}_{e1}(t)) \\ k_{e2} (\mathbf{C}_{p2} \mathbf{q}(t) - \mathbf{u}_{e2}(t)) \\ \vdots \\ k_{en_d} (\mathbf{C}_{pn_d} \mathbf{q}(t) - \mathbf{u}_{en_d}(t)) \end{bmatrix} \\
& = \mathbf{K}_e [\mathbf{C}_p \quad -\mathbf{I}_{n_d} \quad \mathbf{0}_{n_d \times n} \quad \mathbf{0}_{n_d \times n_d}] \mathbf{z}_a(t) \\
& = \mathbf{K}_e [\mathbf{C}_p \quad -\mathbf{I}_{n_d} \quad \mathbf{0}_{n_d \times (n+n_d)}] \mathbf{z}_a(t) \quad (3-22)
\end{aligned}$$

上記の3種の応答は、式(3-19) $\mathbf{z}_a(t)$ を用いて導出できる。

3.3 最適設計問題の定式化

本章の検討では、前節でそのモデルを示した IMD を設置したはりモデルに対し、IMD の設置位置や台数等を調整して、外乱に対する振動抑制性能を最大化するような最適設計問題を考える。前章の検討では、装置数量は 1 台のみで、装置容量（型式）も 1 種類とした簡易な検討を行っていた[3]。しかし、これでは、はりの諸元や外乱の規模によっては、適切な設計変数を探索することができない場合があった。例えば、全長が非常に長いはりに対してはりが激しく励振されてしまった場合、IMD が 1 種類の装置容量（型式）に固定されているため、外乱のレベルが非常に大きい条件では、どのように取付けても装置の反力が許容荷重を満足できない場合があり、実用的ではなかった。

そこで、本章の検討では、外乱のレベルやモデル諸元の様々な場合に対応できるようなより現実的な最適設計問題を、装置数量 n_d ならびに i 番目 ($i = 1, \dots, n_d$) の装置についての型式番号 n_{pi} 、取付位置 x_{pi} および慣性質量 m_{ei} を設計変数として設定する。ただし、装置の産業機器としての実態（装置の設計開発や検証作業等の工数削減を目的に、大小様々の荷重負担能力を持つ装置を予め型式展開しておき、その中のいずれかを要求箇所ごとに供用することが一般的）を踏まえ、型式番号が決まれば、現実的な設計制約の観点から決まる慣性質量の上下限值、強度的観点から決まる許容荷重やばね定数、標準的な製造原価から決まる価格指数（各型式の原価をいずれかの型式の原価で割ったもの）等が、それに紐付いて定められるという条件を付加える。具体的には、表 3-1 に示す型式番号 n_{pi} に対応する様々な諸元を考慮する。これは、仮想的な諸元であるが、著者が所属しているメカニカル防振器メーカーでの設計開発の経験に基づいて、現存する製品群を元に寸法や荷重最大値などの仕様を考慮しながら決定したもので、現在のラインナップと完全に同一ではないが、現実的なものに定めている。実際の応用に際しては、現在展開中の製品群のデータを表 1 のデータとして設定すればよく、その後の仕様変更に際しても、表 3-1 の更新で適切な IMD の型式選択が可能である。

設計変数は、ある上下限值（それらの記号は、設計変数の記号に、それぞれ、上線または下線を付けて表現する）を持ち、最適化問題においてその最適値が探索される。それらは、以下のように定義される。

装置数量 n_d については、次式となる。

$$1 = \underline{n_d} \leq n_d \leq \overline{n_d} \quad (3-23)$$

表 3-1 型式番号に対応した IMD の諸元

型式番号 n_{pi}	許容荷重 f_{ali} [N]	慣性質量 m_{ei} [kg]	減衰係数 d_{ei} [Ns/m]	ばね定数 k_{ei} [N/m]	価格指数 c_i
	$\times 10^3$	$\times 10^3$		$\times 10^6$	
1	10	0.5-100% of 135	0	17	1.00
2	30	0.5-100% of 175	0	26	1.47
3	60	0.5-100% of 325	0	51	2.16
4	100	0.5-100% of 430	0	68	3.00
5	160	0.5-100% of 560	0	105	4.32
6	250	0.5-100% of 750	0	135	6.50
7	400	0.5-100% of 1 200	0	170	9.60
8	600	0.5-100% of 1 800	0	205	14.40
9	1 000	0.5-100% of 3 000	0	235	23.00

ここで、下限値は、装置数量が少なく価格が有利に働く場合が当然あると考えられるので、常に 1 とした。上限値は任意に設定すべき数であり、大きく設定すれば検討の範囲が広がる。本研究では 4 とした。

型式番号 $n_{pi}, i = 1, \dots, n_d$ については、次式となる。

$$1 = \underline{n_{pi}} \leq n_{pi} \leq \overline{n_{pi}} \quad (3-24)$$

ここで、上限値は表 3-1 の第 1 列に従えば 9 である。型式番号 $n_{pi}, i = 1, \dots, n_d$ が決まれば、許容荷重 f_{ali} 、最大慣性質量 m_{eimax} 、減衰係数 d_{ei} 、ばね定数 k_{ei} および価格指数 c_i が紐付いて定まることとなる。

取付位置 $x_{pi}, i = 1, \dots, n_d$ は、次のように表せる。

$$\underline{x_{pi}} \leq x_{pi} \leq \overline{x_{pi}} \quad (3-25)$$

ただし、取付位置 x_{pi} は、図 3-1 に示す通り、はりの左端からの距離であり、取付番号 $i = 1, \dots, n_d$ の順で左端に近いものとして取り扱う（もし、順不同とすると、重複した結果を得てしまう可能性がある）。そこで、取付位置係数（1 以下の非負の実数） $\rho_{xpi}, i = 1, \dots, n_d$ を用いて、以下の漸化式で表現する。

$$\begin{aligned} x_{p1} &= \rho_{xp1} L, & 0 &= \underline{\rho_{xp1}} \leq \rho_{xp1} \leq \overline{\rho_{xp1}} = 1, \\ x_{p2} &= x_{p1} + \rho_{xp2} (L - x_{p1}), & 0 &= \underline{\rho_{xp2}} \leq \rho_{xp2} \leq \overline{\rho_{xp2}} = 1, \\ &\vdots & & \\ x_{pn_d} &= x_{p(n_d-1)} + \rho_{xpn_d} (L - x_{p(n_d-1)}), & 0 &= \underline{\rho_{xpn_d}} \leq \rho_{xpn_d} \leq \overline{\rho_{xpn_d}} = 1 \end{aligned} \quad (3-26)$$

慣性質量 $m_{ei}, i = 1, \dots, n_d$ は、次のように表せる。

$$\underline{m_{ei}} \leq m_{ei} \leq \overline{m_{ei}} = m_{eimax} \quad (3-27)$$

ただし、最適設計プログラムの実装の観点から、慣性質量 m_{ei} は、慣性質量倍率（型式に依存しない、1以下の正の実数） $\rho_{mei}, i = 1, \dots, n_d$ と最大慣性質量（型式にのみ依存する値） $m_{eimax}, i = 1, \dots, n_d$ との積として次式で表現する。

$$m_{ei} = \rho_{mei} m_{eimax}, \quad \underline{\rho_{mei}} \leq \rho_{mei} \leq \overline{\rho_{mei}} = 1 \quad (3-28)$$

ここで、 m_{eimax} は表 3-1 の第 3 列の 100%の時の値であり、型式番号 n_{pi} に依存して定められる。また、IMD の構造を考えた場合、慣性質量を小さくしようとしても、部品の存在によりそれには限度がある。つまり、最大慣性質量の内の数%分の慣性質量値は設計上排除できない。倍率の下限値は、このような設計上の制約により設定されるものであり、本章では、表 3-1 の通り型式によらず一律に 0.005 (0.5%) とした。

前述のほりと IMD のモデルに上記の設計変数を適用し、基礎の入力加速度として各種の記録または人工の地震波加速度が与えられた場合における、各種応答の改善の程度やその際の IMD の経済性を総合的に考慮した最適設計を行う。今回の最適化問題は、性能の指標となる次式の評価関数を最小化する問題として定式化する。

$$J = \sum_{h=1}^{n_w} (J_1^h + J_2^h + J_3^h + J_4^h) + w_c \sum_{i=1}^{n_d} c_i, \quad h = 1, \dots, n_w, \quad i = 1, \dots, n_d \quad (3-29)$$

ここで、 n_w は、はりの応答計算に使用される地震波の数であり、本章の検討では前章と同様の表 2-2 に示す地震波を考慮する。図 2-3 にこの地震波加速度のパワースペクトルを示す。 $w_c \geq 0$ は、重み係数である。評価関数 J は、各種応答に関する評価項目である第 1 の総和部および IMD の経済性に関する評価項目である第 2 の総和部との重み付き線形和として与えられている。第 1 の総和部は、 h 番目 ($h = 1, \dots, n_w$) の地震波ごとに計算される 4 つの性能の指標である J_1^h, J_2^h, J_3^h および J_4^h からなる（意味と定義は後述）。第 2 の総和部は、 i 番目 ($i = 1, \dots, n_d$) の IMD の型式に紐付いている価格指数 c_i からなる、適用される全ての IMD の価格を代表する指標となっている。すなわち、応答低減に関する性能だけを考慮するのではなく装置の経済性についても考慮

できる評価関数となっている。 J_1^h は、はりの各観測位置での変位を全体的に抑制させるための項であり、以下のように定義される。

$$J_1^h = \sum_{k=1}^{n_s} \left(\frac{\text{RMS}(u_{sa_k}^h(t))}{\text{RMS}(u_{s0_k}^h(t))} \right) + \sum_{k=1}^{n_s} \left(\frac{\text{Peak}(u_{sa_k}^h(t))}{\text{Peak}(u_{s0_k}^h(t))} \right) \quad (3-30)$$

ここで、 $\text{RMS}(X(t))$ および $\text{Peak}(X(t))$ は、それぞれ、 $X(t)$ の地震継続時間全体についての二乗平均平方根およびピーク値を表す。 J_2^h は、全ての IMD における反力のレベルを抑制させるための項であり、特に各デバイスにおいて反力が許容荷重 f_{ali} を超過するようなことが 1 台でもある場合には、ペナルティとしての係数 w_p (適当に明らかに大きな値として、ここでは $w_p = 10^6$ 。 w_p の設定の目安については、付録 A を参照のこと) が掛けられ、その時の個体 (設計変数の組合せ) の評価が悪化するように働くものであり、以下のように定義される。

$$J_2^h = \begin{cases} \rho_{\text{force}}^h & (\rho_{\text{force}}^h \leq 1) \\ w_p \rho_{\text{force}}^h & (\rho_{\text{force}}^h > 1) \end{cases}, \quad \rho_{\text{force}}^h = \max_{1 \leq i \leq n_d} \frac{\text{Peak}(f_{ai}^h(t))}{f_{ali}} \quad (3-31)$$

J_3^h は、はりの各観測位置での曲げ応力を全体的に抑制させるための項であり、以下のように定義される。

$$J_3^h = \sum_{k=1}^{n_s} \left(\frac{\text{RMS}(\sigma_{sa_k}^h(t))}{\text{RMS}(\sigma_{s0_k}^h(t))} \right) + \sum_{k=1}^{n_s} \left(\frac{\text{Peak}(\sigma_{sa_k}^h(t))}{\text{Peak}(\sigma_{s0_k}^h(t))} \right) \quad (3-32)$$

J_4^h は、曲げ応力ピーク値の全観測位置中での最大値を抑制させるための項であり、特に、応力がはりの許容応力 σ_{al} を超過する場合には、 J_2^h の場合と同様にペナルティとしての係数 w_p が掛けられるものであり、以下のように定義される。

$$J_4^h = \begin{cases} \rho_{\text{stress}}^h & (\rho_{\text{stress}}^h \leq 1) \\ w_p \rho_{\text{stress}}^h & (\rho_{\text{stress}}^h > 1) \end{cases}, \quad \rho_{\text{stress}}^h = \max_{1 \leq k \leq n_s} \frac{\text{Peak}(\sigma_{sa_k}^h(t))}{\sigma_{al}} \quad (3-33)$$

ここで、 $u_{sa_k}^h(t)$ 、 $u_{s0_k}^h(t)$ および $\sigma_{sa_k}^h(t)$ 、 $\sigma_{s0_k}^h(t)$ は、それぞれ、観測位置 x_k 、 $k = 1, \dots, n_s$ に対応する変位および曲げ応力である (下付文字 a および 0 は、それぞれ、IMD あり

およびはり単体の場合を明示するもの)． $f_{a_i}^h(t)$ は，取付位置 x_{pi} ， $i = 1, \dots, n_d$ に対応する装置反力である．

式(3-29)の価格指数に関連する重み係数 w_c の大小について考える．使用される IMD のコストを全く考慮せず応答低減の高性能化だけを追及したいのであれば， w_c は 0 とすれば良く，反対に，IMD の総額ができるだけ安価な場合を探索したいのであれば， w_c は極端に大きな値とすれば良い (w_c の設定の目安については，付録 A を参照のこと)．今回は，応答低減と経済性の両面を考慮することとし，いくつかの重み係数 w_c の値について計算を行う．

本章では，配管系の最適設計問題を式(3-29)の評価関数 J を最小化する設計変数を求める問題と定式化する．設計変数は，IMD 設置台数，型式，それらの取付位置および慣性質量値である．最適化には，連続的および離散的な設計変数の最適化も可能な手法として，遺伝的アルゴリズムを用いた．本検討での遺伝的アルゴリズムの設定は，個体数を 20，最大世代数を 500，エリート選択数を 1，交叉率および突然変異率（いずれも個体数からエリート選択数を除いた分に対する割合）をそれぞれ 80%および 20%としている．

本章で設計変数として考えた型式は，表 3-1 に示すように離散的に変化し，慣性質量値は，その型式で決定された最大慣性質量値より小さい値として連続的に変化する．IMD の設置位置については，式(3-26)で示されるような，複数の IMD を設置する場合の位置関係に関する制約を除き連続的に変更可能である．更に，IMD の設置台数については，使用する IMD の型式，慣性質量値および設置位置と同時に最適化することが必要であり，これは自然数の範囲で離散的に変化する．本設計問題は，上記のように連続的および離散的な設計変数が混在する混合最適化問題であり，本章で考えているような比較的単純な系を対象とした場合であっても，設計変数空間全体を総当り的に探索して大域的に最適な設計変数値を得ることはほぼ不可能である．従来，ここで設定されたような配管系の IMD 設置台数やその配置および慣性質量値の決定は，熟練した設計者の過去の経験に基づいて行われてきたが，今後問題がより複雑化した場合には，人手によらない何らかの最適化手法の導入が必須になる．本章では，このような要求に応えるための第一歩として，今回産業機器で多く採用される型式の概念を前提とした実際の設計問題により近い形での最適設計を検討している．なお，著者の知る限り，配管系の振動抑制のための最適設計に関する研究において，型式やコストも考慮した実際的な問題設定や，設置台数も含んだ形での IMD 等の支持装置配置等に関する設計変数の最適化を行ったものは存在せず，本設計手法の確立により，配管

系の対振動設計の更なる高度化が実現され、高性能化、低コスト化につながることを期待される。

3.4 設計例

前節で設定した問題に対し、ある諸元を持つはりに対して最適設計を行った例を示す。はりの諸元は前章の表 2-3 および表 2-4 として設定した 2 種の全長のはりの内の全長 13 m の場合とする。式(3-29)の評価関数 J は、前述の通り、重み係数 w_c の値によって、経済性をどれほど考慮するのか設定できるものとなっている。そこで、経済性を強く重視する場合、経済性を全く考慮せずに振動抑制の性能だけを追求する場合、および、振動抑制の性能と経済性の両方を加味する場合の 3 種の場合を検討することとし、これらの場合の代表例として、それぞれ、 w_c が、 10^3 、 0 、および、 1 の 3 種の場合についての計算結果を示す。

最適化の計算を行い、設計変数の最適値としての装置数量 n_d 、型式番号 n_{pi} 、取付位置 x_{pi} および慣性質量 m_{ei} を求める。また、IMD を取付けたはりの各観測位置（全長を 10 等分した時の 9 節点について）での変位（式(3-20)）、曲げ応力（式(3-21)）および各取付位置（取付番号 $i = 1, \dots, n_d$ について）での装置反力（式(3-22)）の 3 種の応答を計算し、はり単体の場合の応答結果との比較を示す。同様に、単純ばね（IMD のばね定数と同じ値を持つ）を取付けたはりについても 3 種の応答を計算し、この結果との比較も行う。入力は、第 2 章と同様に表 2-1 に示す 7 種の地震波加速度を用いることとし、全て最大加速度を 7.5 m/s^2 に基準化する。また同様に、はりのモデルのモードの最大次数 n は 20 とした。以下で、それぞれの w_c の値に対して得られた結果を示し考察する。

3.4.1 $w_c = 10^3$ の場合（経済性を重視する場合）

重み係数 $w_c = 10^3$ の下で計算を行った結果として、探索された最適設計変数およびその時の評価関数の値を、それぞれ、表 3-2 および表 3-3（いずれも上段）に示す。また、はり単体の場合、今回の最適設計変数を持つ IMD ありの場合、および、ばねありの場合（IMD のモデルを図 3-1 の (iii) ではなく、それと同じばね定数を持つ (ii) と仮定した場合）についての各種応答のピーク値についての比較を表 3-4 に示す。

表 3-2 の最適設計変数からは、型式番号 1（最小）の IMD を 1 台（最小）使用するのが最適という結果となったことが分かる。はりの中央からわずかに左の点（全長 L の 48.17%の点）に最大慣性質量の 8.22%の慣性質量を持つ IMD を取付けるのが良い

表 3-2 重み係数値 $w_c = 10^3, 0, 1$ ごとの最適設計変数値 (括弧内の値は, 全長 L に対する取付位置 x_{pi} の比および最大慣性質量 m_{eimax} に対する慣性質量 m_{ei} の比, ただし, $i = 1, \dots, n_d$)

w_c 式(3-29)	n_d	n_{p1}	n_{p2}	n_{p3}	n_{p4}	x_{p1} [m]	x_{p2} [m]	x_{p3} [m]	x_{p4} [m]	m_{e1} [kg]	m_{e2} [kg]	m_{e3} [kg]	m_{e4} [kg]
10^3	1	1	-	-	-	6.262 (48.17%)	-	-	-	11 091 (8.22%)	-	-	-
0	4	9	9	9	9	1.849 (14.22%)	4.574 (35.18%)	7.729 (59.45%)	10.868 (83.60%)	1 554 296 (51.81%)	1 504 732 (50.16%)	1 629 343 (54.31%)	1 563 759 (52.13%)
1	3	1	1	1	-	3.248 (24.99%)	6.619 (50.91%)	9.805 (75.42%)	-	98 772 (73.16%)	103 306 (76.52%)	71 615 (53.05%)	-

表 3-3 重み係数値 $w_c = 10^3, 0, 1$ ごとの最適評価関数値とその内訳 (第 1 項と重み係数を除いた第 2 項)

w_c 式(3-29)	評価関数 $J = \sum_{h=1}^{n_w} (J_1^h + J_2^h + J_3^h + J_4^h) + w_c \sum_{i=1}^{n_d} c_i$	第 1 項 $\sum_{h=1}^{n_w} (J_1^h + J_2^h + J_3^h + J_4^h)$	重み係数を除いた第 2 項 $\sum_{i=1}^{n_d} c_i$
10^3	1 066.634 701	66.634 701	1
0	1.486 480	1.486 480	92
1	6.764 949	3.764 949	3

という結果である。経済性の重視程度を左右する重み係数 w_c を 10^3 という大きな値としたことで, 最小の型式の IMD を最小の台数だけ使用するという経済的な選定が行われ, かつ, 先行研究である前章とほぼ同様の最適取付位置および最適慣性質量が得られた。狙い通りの計算となっていると言える。

表 3-4 は, 時刻歴応答の結果を代表するものとして, 変位, 応力および装置反力の観測位置全体または取付位置全体におけるピーク値をまとめたものである。本表より, 各種応答のピーク値の比「IMD あり÷はり単体」は, 全ての地震波の場合で 100%を下回っており (変位については 3.48%から 16.1%, 応力については 17.8%から 89.9%), 全地震波を考慮した最適化が有効に働いたと考えられる。ピーク値の比「IMD あり÷ばねあり」は, 100%を下回る場合もあれば上回る場合もあり (小さな場合で 73.5%, 大きな場合で 122%), 多少の差異が認められる。慣性質量を調整した IMD を取付ける方が単純なばねを取付ける場合よりも必ずしも良好という結果にはならなかったが, いくつかの地震波については, IMD 取付の方が応答が明らかに低下するという場合もあった。El Centro 波の場合は最も低下が顕著で, 変位, 応力および反力の全ての応答についてピーク値の比「IMD あり÷ばねあり」は, 100%を下回り, 70%台

表 3-4 $w_c = 10^3$ の場合の各種応答のピーク値

応答	はりの条件	El Centro	BCJ-L1	BCJ-L2	Hachinohe	Kobe	Akita	Taft	最良	最悪
変位 ピーク 値	はり単体 [mm]	331	1 086	1 243	1 153	386	940	513	-	-
	IMD あり [mm]	23.0	75.2	72.1	40.1	17.4	88.3	82.6	-	-
	ばねあり [mm]	31.3	73.9	67.8	38.6	16.0	86.9	67.7	-	-
	IMD あり÷ はり単体	6.94%	6.93%	5.80%	3.48%	4.49%	9.38%	16.1%	3.48%	16.1%
	IMD あり÷ ばねあり	73.5%	102%	106%	104%	108%	102%	122%	73.5%	122%
応力 ピーク 値	はり単体 [MPa]	145	387	443	412	137	333	186	-	-
	IMD あり [MPa]	56.0	125	122	73.5	33.8	151	167	-	-
	ばねあり [MPa]	68.6	143	139	71.2	35.9	155	147	-	-
	IMD あり÷ はり単体	38.6%	32.4%	27.4%	17.8%	24.7%	45.2%	89.9%	17.8%	89.9%
	IMD あり÷ ばねあり	81.7%	87.5%	87.7%	103%	94.1%	97.2%	113%	81.7%	113%
反力 ピーク 値	IMD あり [kN]	1.28	2.85	2.68	1.76	0.854	3.19	3.68	-	-
	ばねあり [kN]	1.55	3.27	3.17	1.73	0.875	2.95	3.33	-	-
	IMD あり÷ ばねあり	82.8%	87.1%	84.4%	102%	97.6%	108%	111%	82.8%	111%

から 80%台となっている。図 2-3 のパワースペクトルを比較すると、El Centro 波は、その他の地震波よりも卓越した振動数の範囲が狭く、低振動数域の成分も少ないという傾向が見てとれる。外乱の振動数成分がある振動数域に集中しているような場合であれば、より現実的なモデルとしての IMD の適用が、ばねモデルの場合よりも高い応答低減の効果を示す場合もあると言える。

3.4.2 $w_c = 0$ の場合（振動抑制性能のみを考慮する場合）

重み係数 $w_c = 0$ の下で計算を行った結果として、探索された最適設計変数およびその時の評価関数の値を、それぞれ、表 3-2 および表 3-3（いずれも中段）に示す。また、はり単体の場合、今回の最適設計変数を持つ IMD ありの場合、および、ばねありの場合についての各種応答のピーク値についての比較を表 3-5 に示す。

表 3-2 の最適設計変数からは、いずれの取付位置についても型式番号は 9（最大）で IMD を 4 台（最大）使用するのが最適であるという結果となったことが分かる。重み係数 w_c を 0 とし、振動抑制の性能だけを追求する問題としたためであると考えら

表 3-5 $w_c = 0$ の場合の各種応答のピーク値

応答	はりの条件	El Centro	BCJ-L1	BCJ-L2	Hachinohe	Kobe	Akita	Taft	最良	最悪
変位 ピーク 値	はり単体 [mm]	331	1 086	1 243	1 153	386	940	513	-	-
	IMD あり [mm]	0.494	0.422	0.722	0.287	0.792	6.05	0.277	-	-
	ばねあり [mm]	0.250	0.247	0.245	0.281	0.260	0.273	0.305	-	-
	IMD あり÷ はり単体	0.149%	0.038 8%	0.058 1%	0.024 9%	0.205%	0.643%	0.053 9%	0.024 9%	0.643%
	IMD あり÷ ばねあり	198%	171%	295%	102%	304%	2 216%	90.7%	90.7%	2 216%
応力 ピーク 値	はり単体 [MPa]	145	387	443	412	137	333	186	-	-
	IMD あり [MPa]	3.64	3.62	3.62	3.87	3.90	4.14	4.17	-	-
	ばねあり [MPa]	3.64	3.54	3.62	3.87	3.90	4.01	4.18	-	-
	IMD あり÷ はり単体	2.51%	0.936%	0.816%	0.939%	2.85%	1.24%	2.24%	0.816%	2.85%
	IMD あり÷ ばねあり	100%	102%	100%	100%	100%	103%	100%	100%	103%
反力 ピーク 値	IMD あり [kN]	0.282	0.277	0.277	0.296	0.291	0.295	0.313	-	-
	ばねあり [kN]	0.282	0.276	0.277	0.296	0.291	0.296	0.313	-	-
	IMD あり÷ ばねあり	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

れ、意図した計算結果を得たと言える。また、最適取付位置は、4 台をはりの全長に対してほぼ均等に配置することを意味するような値となった。最適慣性質量は、4 台とも、それぞれの型式の最大慣性質量の値の 50%程度となった。

表 3-3 の $J_1^h + J_2^h + J_3^h + J_4^h, h = 1, \dots, n_w$ の総和値と $c_i, i = 1, \dots, n_d$ の総和値を 3.4.1 項の場合と比較すると、 $c_i, i = 1, \dots, n_d$ の総和値すなわち総コストは非常に大きくなったが、反対に $J_1^h + J_2^h + J_3^h + J_4^h, h = 1, \dots, n_w$ の総和値すなわち振動抑制の性能は大きく向上していることが分かる。意図した通り、性能のみを追及した設計が行われたことが確認できる。

表 3-5 は、3.4.1 項の結果に対する各種応答のピーク値をまとめた表 3-4 と同様に、本項の各種ピーク値の結果をまとめたものである。本表より、各種応答のピーク値の比「IMD あり÷はり単体」は、全ての地震波の場合で 100%を優に下回っており（大きな場合でも、変位については 0.643%，応力については 2.85%），振動抑制の効果が大きく追求されたことが分かる。ピーク値の比「IMD あり÷ばねあり」については、応力はほぼ変わらない結果（100%から 103%）となり、反力は同じ結果（3 桁表示で全て 100%）と

なった。一方、その変位の場合については、一部を除き、非常に大きな倍率値（最大で 2216%）となった（これについては、以降の 3.4.4 項に別途考察を示す）。ただし、IMD ありおよびばねありの場合の変位ピーク値の絶対量は、いずれの地震波でも非常に小さい（IMD ありでは Akita 波のみ数 mm で他は全て 0.数 mm、ばねありでは全て 0.数 mm）。また、IMD ありの場合での、この変位ピーク値のほぼ全ての地震波で 0.数 mm という非常に小さい結果に対して、IMD が 1 台（最小の型式）だけ適用される場合である、前章の $L = 13$ [m] の場合、もしくは、前項の $w_c = 10^3$ の場合での結果が、数 10 mm のオーダー（約 17 mm から約 88 mm）であることから、本項の $w_c = 0$ の設定が、IMD による振動抑制性能の大きな向上のために機能していることが理解される。

また、本項でのばねありの結果に着目すれば、それが IMD ありの結果と一応の一致がみられること、および、ばね定数と数量が共に所与の制約の中の上限值の設定となっていることの二つの事実から、IMD の適用に限らず配管系の応答性能を高めるためには、できるだけ剛に接続して配管系の変形を抑制するのが良い結果を与えることが示唆される。これを実現する極端な例として、系全体をコンクリート詰めしたり、系にレストレイントに類するものを高密度で多数設置したりすることが挙げられる。しかし、このような極端な剛設計は、熱膨脹への追従不可能性によって過大な熱応力が生じることとなるので実際には不可能である。本章での「ばねあり」モデルはあくまでも IMD の単純モデルであり、実際の熱膨脹が存在する配管系においては、単なるばねの特性を示す装置をどのような箇所にも適用できる訳ではなく、IMD の適用が不可避であることに注意が必要である。

3.4.3 $w_c = 1$ の場合（振動抑制性能と経済性の両方を考慮する場合）

実用的には、前項のような性能だけを重視するような設計は通常行われたい。前々項または本項のような、経済性をある程度加味した問題設定がより現実的と考えられる。ここでは、性能および経済性の両方を考慮する場合の 1 例として、重み係数を調整して $w_c = 1$ とした場合の結果を、表 3-2 および表 3-3（いずれも下段）に示す。また、はり単体の場合、今回の最適設計変数を持つ IMD ありの場合、および、ばねありの場合についての各種応答のピーク値についての比較を表 3-6 に示す。

表 3-2 の最適設計変数からは、いずれの取付位置についても型式番号は 1（最小）で IMD を 3 台使用するのが最適であるという結果となったことが分かる。最適取付位置は、全長に対してほぼ等間隔、最適慣性質量は、およそ、それぞれの最大慣性質量の 50%台から 70%台という結果であった。

表 3-6 $w_c = 1$ の場合の各種応答のピーク値

応答	はりの条件	El Centro	BCJ-L1	BCJ-L2	Hachinohe	Kobe	Akita	Taft	最良	最悪
変位 ピーク 値	はり単体 [mm]	331	1 086	1 243	1 153	386	940	513	-	-
	IMD あり [mm]	2.00	1.93	3.20	5.25	3.97	6.01	0.809	-	-
	ばねあり [mm]	0.679	0.794	0.686	0.645	0.817	0.711	0.735	-	-
	IMD あり÷ はり単体	0.603%	0.178%	0.257%	0.456%	1.03%	0.639%	0.158%	0.158%	1.03%
	IMD あり÷ ばねあり	294%	243%	467%	814%	486%	846%	110%	110%	846%
応力 ピーク 値	はり単体 [MPa]	145	387	443	412	137	333	186	-	-
	IMD あり [MPa]	4.70	5.02	6.31	4.28	5.52	5.22	5.09	-	-
	ばねあり [MPa]	4.70	5.34	4.73	4.46	5.50	4.89	5.21	-	-
	IMD あり÷ はり単体	3.24%	1.30%	1.42%	1.04%	4.05%	1.57%	2.73%	1.04%	4.05%
	IMD あり÷ ばねあり	100%	94.0%	133%	95.9%	100%	107%	97.6%	94.0%	133%
反力 ピーク 値	IMD あり [kN]	0.343	0.327	0.356	0.345	0.338	0.348	0.393	-	-
	ばねあり [kN]	0.343	0.343	0.355	0.336	0.339	0.351	0.397	-	-
	IMD あり÷ ばねあり	100%	95.4%	100%	103%	100%	99.0%	99.1%	95.4%	103%

表 3-3 の $J_1^h + J_2^h + J_3^h + J_4^h, h = 1, \dots, n_w$ の総和値および $c_i, i = 1, \dots, n_d$ の総和値を 3.4.1 項および 3.4.2 項の場合と比較すると, $c_i, i = 1, \dots, n_d$ の総和値すなわち総コストは 3 者の中間の値, また, $J_1^h + J_2^h + J_3^h + J_4^h, h = 1, \dots, n_w$ の総和値すなわち性能も 3 者の中間の値となっており, 性能と経済性の両方が加味された結果となっていることが分かる. これより, 本章で定式化した最適設計問題においては, 重み係数 w_c の値のいかんにより, 性能と経済性をどのようなバランスで考慮するのかを調整できることが確認された.

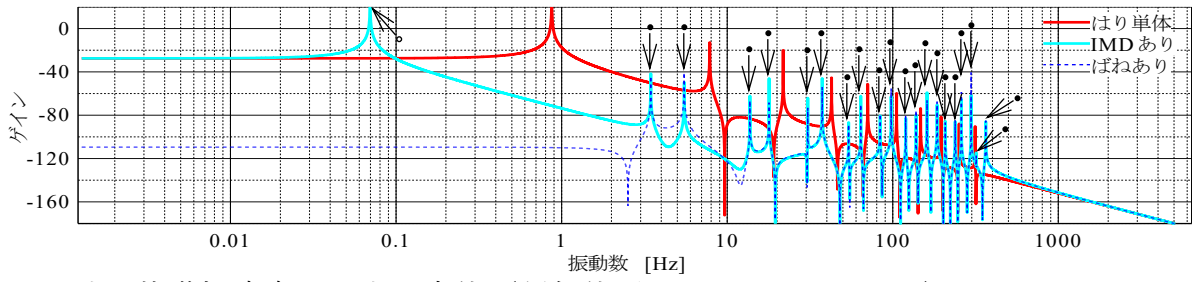
表 3-6 は, 本項の各種ピーク値の結果をまとめたものである. 本表より, 各種応答のピーク値の比「IMD あり÷はり単体」は, 全ての地震波の場合で 100%を大きく下回っており (大きな場合で, 変位については 1.03%, 応力については 4.05%), 振動抑制の効果の追求が図られたことが分かる. 前々項から本項まで通して, この比は全て 100%を下回る結果となっており, より現実的なモデルで考慮した IMD の適用が, 振動抑制の実現に有用であることが理解できる. ピーク値の比「IMD あり÷ばねあり」については, 応力は 94.0%から 133%, 反力は 95.4%から 103%となった. 一方, その

変位の場合については、前項と同様に、一部を除き、非常に大きな倍率値(最大で 846%)となった(これについては、以降の 3.4.4 項に別途考察を示す)。ただし、IMD ありおよびばねありの変位ピーク値の絶対量は、いずれの地震波でもかなり小さい(IMD ありでは Taft 波のみ 1mm 弱で他は全て数 mm、ばねありでは全て 1 mm 弱)。また、IMD ありの場合での、この変位のピーク値のほぼ全ての地震波で数 mm というかなり小さい結果に対して、IMD が 1 台(最小の型式)だけ適用される場合である、前章の $L = 13$ [m] の場合、もしくは、前々項の $w_c = 10^3$ の場合での結果が、数 10 mm のオーダー(約 17 mm から約 88 mm)であること、および、前項の $w_c = 0$ の場合での結果が、ほぼ全ての地震波で 0.数 mm であることから、本項の $w_c = 1$ の設定が、IMD による振動抑制性能の向上を中程度に達成するために機能していることが理解される。

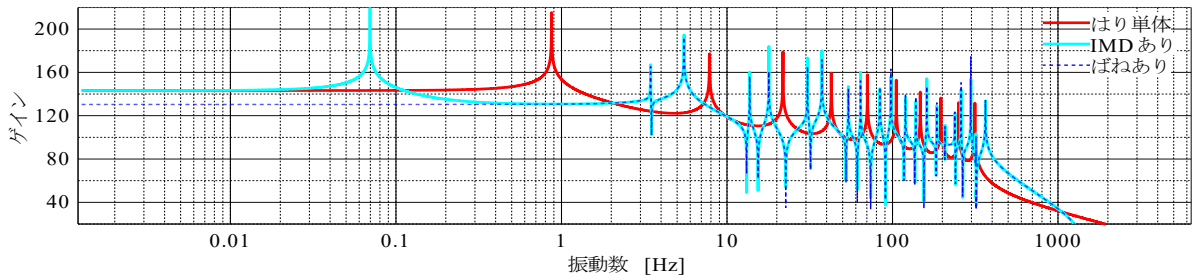
3.4.4 周波数応答に基づく考察

図 3-2 から図 3-4 に、それぞれ、3.4.1 項から 3.4.3 項の最適設計変数の場合に対応する 3 種の系(はり単体、IMD あり、および、ばねあり)について、入力を地震波加速度として出力を各種応答(相対変位、曲げ応力および装置反力)とした場合のゲインを示す。各ゲインは、観測位置もしくは取付位置ごとに取得することができるものであるが、ここでは、相対変位および曲げ応力についてのゲインは、はり単体のモードで節となることのない位置 $0.48L$ [m] の場合だけ、装置反力のゲインは、はりの中央に最も近い取付位置の場合だけを示す。

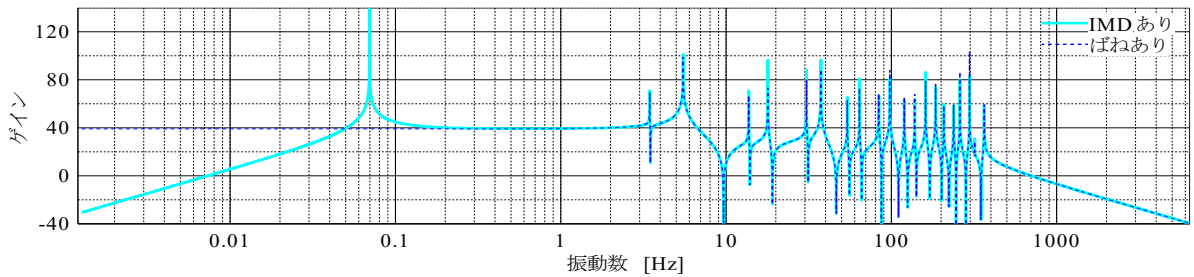
これらの図より、はり単体、IMD あり、および、ばねありの場合を比べると、3 種のゲイン全てについて、はり単体の場合に存在する共振峰が、装置(IMD あり、および、ばねありいずれの場合でも)の適用により、高振動数側にシフトされ、また、ある程度の高振動数域については、IMD あり、および、ばねありの場合で、同様の傾向を示すことが分かる。また、IMD ありの場合には、低振動数域において、特有の共振峰が装置数量 n_d の数だけ追加される。追加される共振峰付近ではゲイン値がはり単体の場合よりも大きくなることから、応答にいくらかの影響を与えることが考えられる。しかし、図 2-3 の地震波加速度のパワースペクトルから分かる通り、いずれの地震波についても、1 Hz 程度を下回った領域における成分は少ないため、追加される共振峰付近で激しく励振されることは考え難い。実際、3.4.1 項から 3.4.3 項で見られた計算結果において、はり単体よりも IMD ありの方が、各種応答のピーク値が悪化するということは一例もなく、むしろ、応答は改善されている。これは、いずれの地震波に



(a) 入力: 基礎加速度, 出力: 変位 (評価位置 $0.48L$ [m]について). ここで, “○”は, IMD の設置による共振点 (共振点数は $n_d = 1$ に等しい) であり, “●”は, はり自体の共振特性が高振動数領域にシフトされたものとしての共振点である

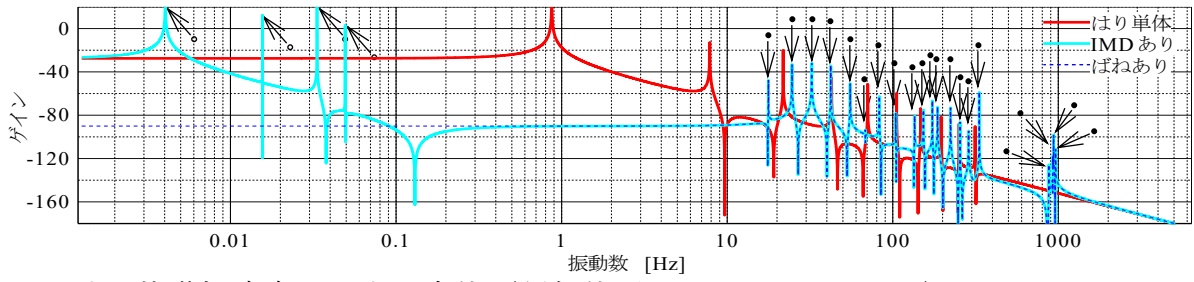


(b) 入力: 基礎加速度, 出力: 曲げ応力 (評価位置 $0.48L$ [m]について)

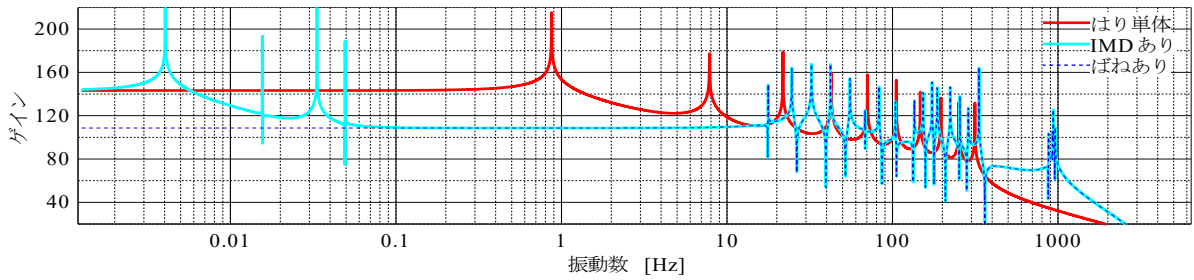


(c) 入力: 基礎加速度, 出力: 反力 (取付番号 $i = 1$ について)

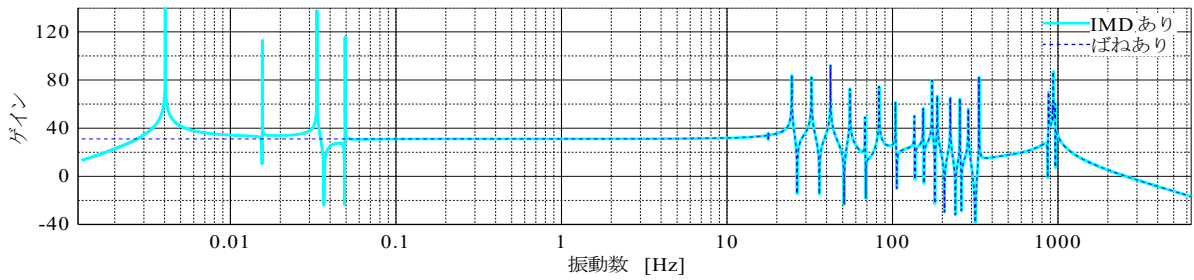
図 3-2 3.4.1 項 ($w_c = 10^3$) に関する系のゲイン線図 (曲線は, 「IMD あり」と「ばねあり」の両方で, ある程度高い振動数領域で同様の傾向を示す. 「IMD あり」の場合のみ, 1 Hz 未満の低周波数領域に共振が存在するが, これは IMD の本質的な特性に由来するものであり, IMD の単純なモデルである「ばねあり」モデルでは低振動数領域の共振の影響を考慮できないことを意味する. 以降の図 3-3 および図 3-4 でも同様)



(a) 入力: 基礎加速度, 出力: 変位 (評価位置 $0.48L$ [m]について). ここで, “o”は, IMD の設置による共振点 (共振点数は $n_d = 4$ に等しい) であり, “•”は, はり自体の共振特性が高振動数領域にシフトされたものとしての共振点である

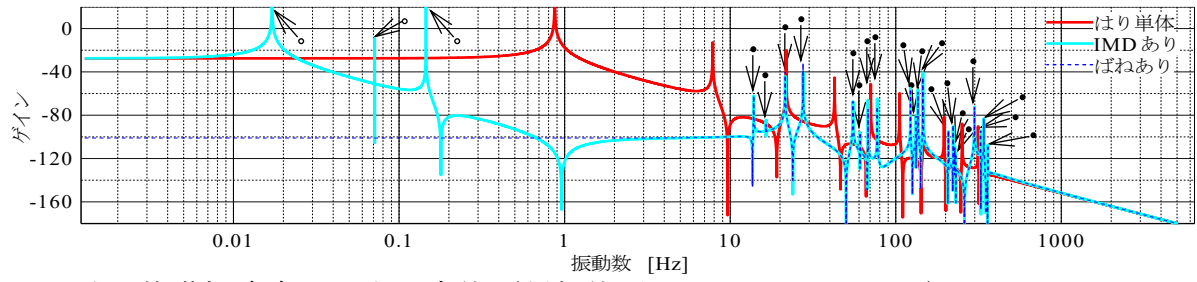


(b) 入力: 基礎加速度, 出力: 曲げ応力 (評価位置 $0.48L$ [m]について)

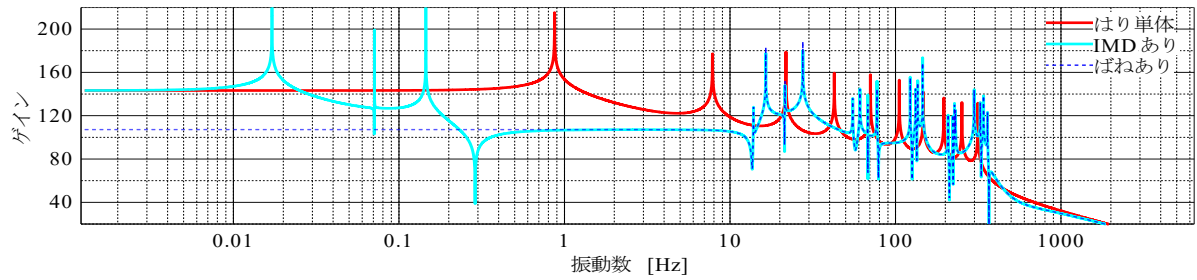


(c) 入力: 基礎加速度, 出力: 反力 (取付番号 $i = 3$ について)

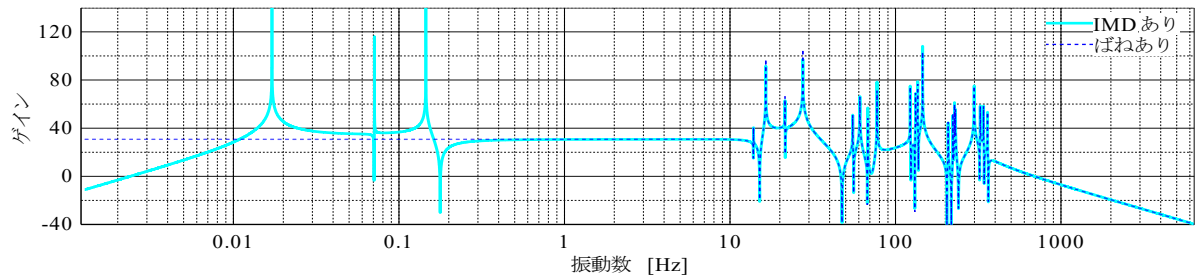
図 3-3 3.4.2 項 ($w_c = 0$) に関する系のゲイン線図



(a) 入力: 基礎加速度, 出力: 変位 (評価位置 $0.48L$ [m]について) . ここで, “○”は, IMD の設置による共振点 (共振点数は $n_d = 3$ に等しい) であり, “●”は, はり自体の共振特性が高振動数領域にシフトされたものとしての共振点である



(b) 入力: 基礎加速度, 出力: 曲げ応力 (評価位置 $0.48L$ [m]について)



(c) 入力: 基礎加速度, 出力: 反力 (取付番号 $i = 2$ について)

図 3-4 3.4.3 項 ($w_c = 1$) に関する系のゲイン線図

についても、その周波数成分は 1 Hz から数 Hz の間に多く含まれており、IMD の設置によるこの振動数付近のゲインの低下の影響によるものと考えられる。このように、地震波加速度の成分との兼ね合いの観点から、低振動数域に追加される共振峰はその存在が直ちに問題視されるようなものではない。ただし、細かく言えば、これが、3.4.2 項および 3.4.3 項で変位のピーク値の比「IMD あり÷ばねあり」に大きな値が見られることの要因となっていると考える。IMD あり、および、ばねあり共に、はり単体でみられた最も大きな共振峰付近のゲインを大きく低下させることとなり、応答の絶対量がかなり小さくなったが、それ故、低振動数域の応答のわずかな悪化が応答のピーク値の比という形で見た場合に際立った違いとして現れたものと考えられる。また、IMD をばねとしてモデル化したものである「ばねあり」の場合は、図 3-2 から図 3-4 の周波数応答が示す通り低振動数域に共振峰は現れないが、これは、IMD の簡易モデルである「ばねあり」モデルは、IMD を設置した系が本来持つ低振動数域での共振峰の影響を考慮することができないことを意味している。より高度な設計を目指すという観点からは、このような差異の存在も考慮すべきであると言え、より現実的なモデルとしての IMD のモデルを使用して最適設計を行うことが重要である。

また、熱膨脹時に見られるような極めてゆっくりとした配管の移動が生じるような時は、ゲイン線図の低振動数域である 0.001 から 0.002 Hz 付近（線図左端部）に近い状況にあると想像できる。この低振動数域の各応答のゲインの曲線を見ると、IMD ありの場合とはり単体の場合がいずれでも一致していることから、IMD を追加しても、何も設置していない非拘束な状態と同様とみなせるため、熱膨脹時の配管の移動が生じるような場合であっても配管に熱応力を生じさせるようなことが起こらないことが言える。これは、IMD に特有の特性であり、メカニカル防振器に求められる機能の一つである。

3.5 結言

本章では、IMD を適用した配管系を模擬した単純なはりの系を対象に、IMD の装置数量、型式番号、取付位置および慣性質量の 4 項目の設計変数について最適値を探索する手法を提示した。問題設定では、振動抑制の性能だけではなく装置の経済性をも加味し、これを実現するための評価関数を定義した。また、シミュレーションにより、最適な設計変数の探索が行えること、および、振動の応答低減という性能だけではなく IMD 適用についての経済性をも加味した最適化が行えることを確認した。また、IMD を従来通りのばねとみなしたモデルで考えた場合の応答についても計算結果を示し、この場合および IMD をより現実的なモデルとみなす場合とを比較し、いくつかの場合で差異が認められたことから、より現実的なモデルで考慮することの設計上の意義を認識できた。

本章での研究は、配管系のモデルとして単純なはりを用いたが、より実際的な配管系の支持装置最適設計手法の確立のため、本最適設計手法を直管および曲管の要素からなる三次元配管系を対象とした検討を行っており、近く検討結果を発表する予定である。なお、対象とする IMD 等が設置される三次元配管系のモデル化については付録 B にまとめている。また、配管系の熱膨脹量が少ない、もしくは放射線量が低い箇所に対しては、ロッドレストレイントに類するものや油圧防振器を適用した方が経済的な意味等で有利となる場合もあるため、今後さらには、本章で提案した最適設計手法の拡張として、型式を記載した表 3-1 を IMD 以外の支持装置も含む形に拡張して定義し、評価指標を最適化するような支持装置の種類をも自動的に選定できるような手法の検討にもつなげていきたい。

参考文献

- [1] 日本原子力発電株式会社, V-2-1-13-6 管の耐震性についての計算書作成の基本方針, 東海第二発電所 工事計画審査資料, 工認-929 改 4 (2018), 入手先 <<https://www.nsr.go.jp/data/000254089.pdf>> (参照日 2020 年 8 月 3 日).
- [2] Sunakoda, K. and Yamazaki, I., Inertia mass damper and its application, Proceedings of the ASME 2017 Pressure Vessels and Piping Conference, Paper No. PVP2017-65192 (2017).
- [3] 山崎一生, 平元和彦, 砂子田勝昭, 慣性質量要素を有する振動制御デバイスを適用した配管系の動的最適化, 日本機械学会年次大会講演論文集, doi: [10.1299/jsme_mecj.2019.J10326](https://doi.org/10.1299/jsme_mecj.2019.J10326) (2019).

第4章 可変 IMD を適用した構造系のセミアクティブ制御

4.1 緒言

第2章および第3章では、IMD を適用した構造系についての、特に配管系を想定した動的最適化を論じたが、供用中に固定の慣性質量値を發揮するような IMD に限った検討であった。本章では、IMD の応用分野を拡大する可能性を持つ、慣性質量が可変となるような IMD (以降、可変 IMD と呼ぶ) の構造案を示すと共に、可変 IMD を備えた構造系用のセミアクティブ制御系の設計方法を提案する。

本章では、セミアクティブ制御として、出力模倣アプローチ (output emulation approach) に基づくセミアクティブ制御法[1]を採用している。出力模倣アプローチによって、可変 IMD の可変な慣性質量は、目標アクティブ制御 (reference active control) 系の予測制御出力を可能な限り再現するように変更される。目標アクティブ制御系は、力アクチュエータが可変 IMD の代わりに制御対象の構造系に設置される仮想の制御系であり、この力アクチュエータは可変 IMD が目標の力の値として使用するための制御力を生成する。出力模倣アプローチにおける目標アクティブ制御則は、セミアクティブ制御系の目標アクティブ制御則として使用される時に良好な制御性能を実現するように取得される。本章では、目標アクティブ制御則として複素 s 平面の領域で閉ループ極配置を実現する LMI (線形行列不等式) に基づく状態フィードバック制御 [2]が採用される。

シミュレーションの例として、台湾の NCREE (国家地震工学研究センター) の既存のベンチマーク建屋モデルに対して可変 IMD を適用したセミアクティブ制御を検討する。出力模倣アプローチに基づく提案されたセミアクティブ制御は、非制御時 (以下 Passive off) および可変 IMD の慣性質量値を最大に固定した場合 (以下 Passive on) と比較して優れた制御性能を示す。

4.2 記号の定義

混乱を避けるため、本章で用いる代表的な記号をあらかじめ以下に記す。

t : 時間.

\mathbb{R}^n および $\mathbb{R}^{m \times n}$: n 次元の実ベクトルおよび $m \times n$ 実行列の集合.

\mathbf{A}^T または \mathbf{A}^{-1} : \mathbf{A} の転置行列または逆行列.

\mathbf{I}_n および $\mathbf{O}_{m \times n}$: n 次元の単位行列および $m \times n$ 零行列.

$\mathbf{1}_n = \left[\underbrace{1 \ \dots \ 1}_n \right]^T$ または $\mathbf{0}_n = \left[\underbrace{0 \ \dots \ 0}_n \right]^T$: 1 または 0 の成分だけを持つ n 次元縦ベクトル.

Peak($a(t)$) : 信号 $a(t)$ のピーク値.

RMS($a(t)$) : 信号 $a(t)$ の RMS (二乗平均平方根) 値, すなわち,

$$\text{RMS}(a(t)) = \left(\frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

4.3 構造系と可変 IMD のモデル

制御対象の構造系は, 運動方程式が次のように与えられる線形時不変 n 自由度系としてモデル化される.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{G}\ddot{\mathbf{w}}(t) \quad (4-1)$$

ここで, $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^n$ および $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ は, それぞれ, 構造系の変位ベクトルと地震外乱の変位ベクトル (ただし, n_w は考慮すべき基礎励振の方向の数) である. 行列 $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$, $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$, $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は, それぞれ, 質量行列, 減衰行列, 剛性行列である. 数学モデルが式(4-1)と定義される構造系に対して, 慣性質量ダンパ (IMD) が, 地震外乱下にある構造系の振動を抑制するために設置される. IMD は, それ自身が設置される隣接する層間の相対加速度に比例する抵抗力を発生する振動制御装置であった (IMD の機構と力学モデルは, 図 1-6 と図 1-3 (b)を参照のこと). IMD について, イーヤ, ケース本体, ボールねじ, 玉軸受等の力を伝達する構成部品の剛性, および, ボールねじ・ナット, 玉軸受, スリーブ等の摺動する構成部品によって生じる減衰特性を考慮すると, IMD の数学モデルは次のように与えられる.

$$\begin{aligned} m_e \ddot{y}_e(t) + d_e \dot{y}_e(t) + k_e y_e(t) &= k_e r(t), \\ y_e(t) &= w_e(t) - w_L(t), \quad r(t) = w_R(t) - w_L(t) \end{aligned} \quad (4-2)$$

ここで, d_e と k_e は, IMD の構成部品によって決定される減衰係数と剛性である.

構造系の下層部に 1 つの IMD が設置される, すなわち, IMD は第 1 層と基礎の間にあると仮定し, また, $n_w = 1$ であるとする. すると, 状態ベクトルを $\mathbf{x}(t) = [\mathbf{q}^T(t) \ y_e(t) \ \dot{\mathbf{q}}^T(t) \ \dot{y}_e(t)]^T$ と定義することで与えられる式(4-1)の状態空間形式は, 次のようになる.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\ddot{w}(t) \\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\ddot{w}(t) \end{cases} \quad (4-3)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{(n+1) \times (n+1)} & \mathbf{I}_{n+1} \\ -\mathbf{M}_a^{-1}\mathbf{K}_a & -\mathbf{M}_a^{-1}\mathbf{D}_a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n+1} \\ -\mathbf{G}_a \end{bmatrix}$$

ここで,

$$\mathbf{M}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{O}_{n \times 1} \\ \mathbf{O}_{1 \times n} & m_e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{O}_{n \times 1} \\ \mathbf{O}_{1 \times n} & d_e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{K} + \mathbf{K}_b & \mathbf{O}_{(n-1) \times 1} \\ -k_e & \mathbf{O}_{1 \times (n-1)} \end{bmatrix}, \quad (4-4)$$

$$\mathbf{K}_b = \begin{bmatrix} k_e & \mathbf{O}_{1 \times (n-1)} \\ \mathbf{O}_{(n-1) \times 1} & \mathbf{O}_{(n-1) \times (n-1)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{1}_n$$

式(4-3)の $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ は, IMD を持つ構造系の振動抑制における制御性能を評価するための制御出力信号である.

4.4 可変 IMD によるセミアクティブ制御

本章では, IMD の慣性質量が指令信号によって変更できると仮定する. 以下では, このような可変機能を備えた IMD を可変 IMD と呼ぶ. 図 4-1 に提案する可変慣性質量を実現する機構を示す[3][4]. それは回転中心周りの角度が変えられるアームと, 各アームの端部に取付けられる錘で構成される. 回転中心周りのアームの角度は, アームの別の端部に接続されたリニアアクチュエータの変位を制御することによって変更することができる. リニアアクチュエータの変位は, 何らかのサーボ制御則により, 目標変位に追従させることが可能である. リニアアクチュエータの変位を変えることにより, アームの角度を変えることができる. その時, IMD の見かけ上の質量 (慣性質量) の値を変更できる. 本章では, この機構で慣性質量値を変更可能なことを利用し, 構造系のセミアクティブ振動制御を行う. 以下, 式(4-2)の係数 m_e を $m_e(c(t))$ として再定義する. ここで, $c(t)$ は慣性質量を変更する指令信号である.

可変慣性質量 $m_e(c(t))$ の範囲は, 次のように定義される.

$$\underline{m}_e \leq m_e(c(t)) \leq \overline{m}_e \quad (4-5)$$

ここで, \overline{m}_e と \underline{m}_e は, それぞれ可変慣性質量の最大値と最小値である.

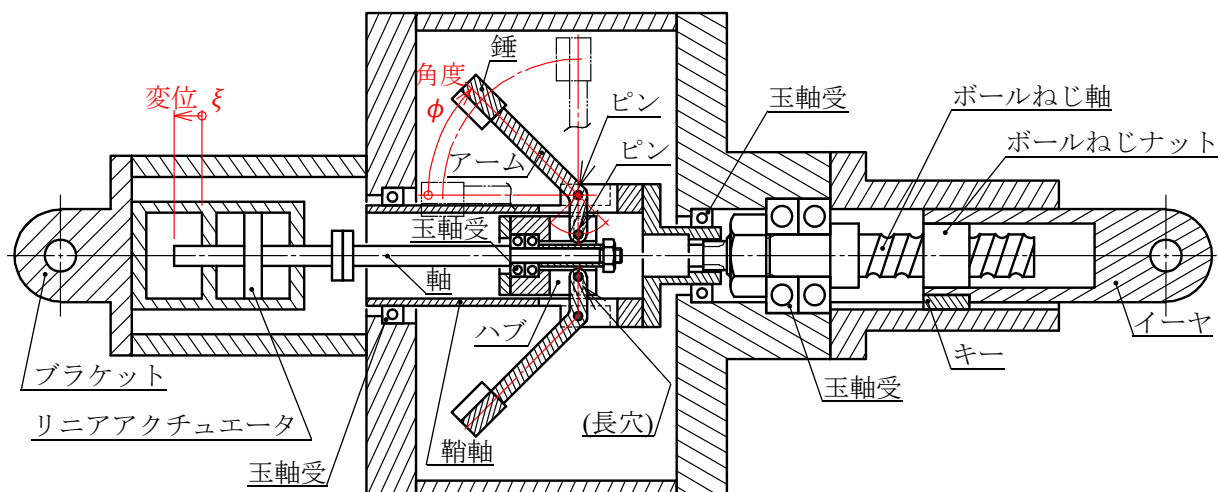


図 4-1 可変慣性質量を実現する IMD の機構

慣性質量を変更するための仮定された機構においては、指令信号 $c(t)$ に対する応答における動的遅延が考慮される必要がある。動的遅延は、次式で与えられる 1 次遅れ系でモデル化できると仮定する。

$$\begin{cases} \dot{x}_m(t) = -\frac{1}{T}x_m(t) + \frac{1}{T}c(t) \\ m_e(c(t)) = x_m(t) \end{cases} \quad (4-6)$$

ここで、 $x_m(t) \in \mathbb{R}$ および $T > 0$ は可変 IMD の動的遅延をモデル化するための状態変数および時定数である。

慣性質量が式(4-5)と式(4-6)に示される特性を持つ $m_e(c(t))$ として再定義されるような式(4-3)と式(4-4)の構造系のモデルを用いることで、本章のセミアクティブ制御設計問題は、地震外乱を受ける可変 IMD を持つ構造系が地震外乱の影響下において良好な振動抑制の制御性能を達成するように指令信号 $c(t)$ を生成する制御則を設計する問題として定式化される。

本章では、可変 IMD を使用するセミアクティブ制御則として、出力模倣アプローチ[1]に基づく方法が使用される。出力模倣アプローチでは、可変 IMD の可変慣性質量が、セミアクティブ制御系の制御出力の値が、目標アクティブ制御系の予測制御出力値を模倣するように変更される。目標アクティブ制御系は、式(4-1)の構造系およびアクティブ振動制御を実行するアクチュエータのモデルで構成される仮想的な制御系である。目標アクティブ制御系のモデルとして、次で与えられる線形時不変系を仮定する。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_r(t) = \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{B}_r \ddot{\mathbf{w}}(t) \\ \mathbf{z}_r(t) = \mathbf{C}_r \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{D}_r \ddot{\mathbf{w}}(t) \end{cases} \quad (4-7)$$

ここで、 $\mathbf{x}_r(t) \in \mathbb{R}^{n_r}$ および $\mathbf{z}_r(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ は、目標アクティブ制御系の状態ベクトルと制御出力であり、制御出力ベクトル $\mathbf{z}_r(t)$ の各成分は、セミアクティブ制御系の式(4-3)と式(4-4)の $\mathbf{z}(t)$ の各成分と同一である（可変 IMD は、今回の場合、式(4-3)と式(4-4)の構造系に設置されていると仮定する）。すなわち、例えば、 $\mathbf{z}(t)$ と $\mathbf{z}_r(t)$ の第1行は第1層と基礎の間の相対変位、第2行は第2層と第3層の間の相対変位（以降同様）となる。言い換えれば、ある時間 t_e におけるセミアクティブ制御系と目標アクティブ制御系間の制御出力の誤差を次のように合理的に見積もることができる。

$$\mathbf{e}(t_e) = \|\mathbf{z}(t_e) - \mathbf{z}_r(t_e)\|_e \quad (4-8)$$

ここで、 $\|\mathbf{v}\|_e$ はベクトル \mathbf{v} の何らかのノルムである。

出力模倣アプローチでは、可変 IMD の可変慣性質量 $m_e(c(t))$ は、セミアクティブ制御系と目標アクティブ制御系間の予測制御出力の誤差をリアルタイムで最小限に抑えるように変更される。この誤差は次のように定義される。

$$\mathbf{e}(t + \Delta t) = \|\mathbf{z}(t + \Delta t) - \mathbf{z}_r(t + \Delta t)\|_e, \quad t \geq 0 \quad (4-9)$$

ここで、 $\Delta t > 0$ は予測の長さ（時間の刻み幅）である。 $\mathbf{z}(t + \Delta t)$ および $\mathbf{z}_r(t + \Delta t)$ は、それぞれ、セミアクティブ制御系および目標アクティブ制御系の予測出力信号であり、後述の方法で取得される。セミアクティブ制御系の状態ベクトル $\mathbf{x}(t)$ の全ての成分と地震外乱 $\ddot{\mathbf{w}}(t)$ が全ての瞬間でセンサによって計測可能であると仮定し、 t_0 を現在時刻とすれば、 $t_0 + \Delta t$ での地震外乱と状態ベクトルの予測値は、近似的に次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{w}}(t_0 + \Delta t) &\sim \ddot{\mathbf{w}}(t_0) + \ddot{\mathbf{w}}(t_0) \Delta t, \\ \mathbf{x}(t_0 + \Delta t) &\sim \mathbf{x}(t_0) + \dot{\mathbf{x}}(t_0) \Delta t, \\ \mathbf{x}_r(t_0 + \Delta t) &\sim \mathbf{x}_r(t_0) + \dot{\mathbf{x}}_r(t_0) \Delta t \end{aligned} \quad (4-10)$$

地震外乱の加加速度 $\ddot{\mathbf{w}}(t_0)$ は、次式で与えられる後退差分を計算することにより近似的に求められる。

$$\ddot{w}(t_0) \sim \frac{\dot{w}(t_0) - \dot{w}(t_0 - \Delta t)}{\Delta t} \quad (4-11)$$

式(4-10)の状態ベクトルの時間微分 $\dot{\mathbf{x}}(t_0)$ と $\dot{\mathbf{x}}_r(t_0)$ は、セミアクティブ制御系および目標アクティブ制御系の状態空間モデルを使用して次のように取得される。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t_0) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t_0) + \mathbf{B}\dot{w}(t_0), \\ \dot{\mathbf{x}}_r(t_0) &= \mathbf{A}_r\mathbf{x}_r(t_0) + \mathbf{B}_r\dot{w}(t_0) \end{aligned} \quad (4-12)$$

式(4-10)の $\dot{w}(t_0 + \Delta t)$ および式(4-12)の $\dot{\mathbf{x}}(t_0)$ および $\dot{\mathbf{x}}_r(t_0)$ を使用すると、セミアクティブ制御系および目標アクティブ制御系の予測制御出力 ($t = t_0 + \Delta t$ での予測) は、次のように取得される。

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t_0 + \Delta t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t_0 + \Delta t) + \mathbf{D}\dot{w}(t_0 + \Delta t), \\ \mathbf{z}_r(t_0 + \Delta t) &= \mathbf{C}_r\mathbf{x}_r(t_0 + \Delta t) + \mathbf{D}_r\dot{w}(t_0 + \Delta t) \end{aligned} \quad (4-13)$$

式(4-13)で得られる予測制御信号は、本章のセミアクティブ制御の出力模倣アプローチで使用される。次に、 $t = t_0$ での可変IMDの可変慣性質量 $m_e(c(t))$ の最適値を決定、すなわち、可変慣性質量を変更する指令信号 $c(t_0)$ を決定することを想定し、これを行うために、連続的に変化する指令信号 $c(t_0)$ を c_1, c_2, \dots, c_{n_c} と量子化し、それらを要素とする集合 \mathbf{C}_c を以下の用に定義する。

$$\mathbf{C}_c = \{c_1, c_2, \dots, c_{n_c}\} \quad (4-14)$$

ここで、 n_c は式(4-5)で定義される範囲の上で量子化された指令信号の数である。出力模倣アプローチでは、可変IMDの指令信号が集合 \mathbf{C}_c からリアルタイムに選択される。選択プロセスの詳細は次のとおりである。

ステップ 1: $t = 0$ で、 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}_{2n+1}$ 、 $\mathbf{x}_r(0) = \mathbf{0}_{n_r}$ および $\dot{w}(0) = 0$ を設定する。 $t_0 = 0$ に設定する。

ステップ 2: $t = t_0$ で、センサ計測値 $\dot{w}(t_0)$ および $\mathbf{x}_r(t_0)$ 、予測される地震外乱 $\dot{w}(t_0 + \Delta t)$ 、および目標アクティブ制御系の状態ベクトル $\mathbf{x}_r(t_0 + \Delta t)$ が得られる。セミアクティブ制御系に関しては、 n_c 個の予測状態ベクトルが、集合 \mathbf{C}_c の全ての要素に対して計算される。 n_c 個の予測状態ベクトルは次のように与えられる。

$${}^i\mathbf{x}(t_0 + \Delta t) = \mathbf{x}(t_0) + {}^i\dot{\mathbf{x}}(t_0)\Delta t, \quad i = 1, \dots, n_c \quad (4-15)$$

ここで,

$$\begin{aligned} {}^i\dot{\mathbf{x}}(t_0) &= {}^i\mathbf{A}(m_e(c_i))\mathbf{x}(t_0) + \mathbf{B}\ddot{w}(t_0), \\ {}^i\mathbf{A}(m_e(c_i)) &= \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{(n+1) \times (n+1)} & \mathbf{I}_{n+1} \\ -{}^i\mathbf{M}_a^{-1}(m_e(c_i))\mathbf{K}_a & -{}^i\mathbf{M}_a^{-1}(m_e(c_i))\mathbf{D}_a \end{bmatrix}, \\ {}^i\mathbf{M}_a(m_e(c_i)) &= \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{O}_{n \times 1} \\ \mathbf{O}_{1 \times n} & m_e(c_i) \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n_c \end{aligned} \quad (4-16)$$

状態ベクトルの n_c 個の時間導関数と式(4-10)の $\ddot{w}(t_0 + \Delta t)$ を使用すると, 式(4-13)より指令信号 c_i , $i = 1, \dots, n_c$ に対応する ${}^i\mathbf{z}(t_0 + \Delta t)$, $i = 1, \dots, n_c$ で表される制御出力の n_c 個の予測出力信号を取得できる. オイラー法やルンゲ=クッタ法などの数値積分法を使用して, ${}^i\dot{\mathbf{x}}(t_0)$, $i = 1, \dots, n_c$ を取得できる. 目標アクティブ制御系については, 同じ方法で予測制御出力 $\mathbf{z}_r(t_0 + \Delta t)$ を取得できる. なお, ${}^i\dot{\mathbf{x}}(t_0)$, $i = 1, \dots, n_c$ の計算においては, 式(4-6)により可変 IMD の遅延の動特性を考慮する.

ステップ 3: ${}^i\mathbf{z}(t_0 + \Delta t)$, $i = 1, \dots, n_c$ で表されるセミアクティブ制御系の n_c 個の予測制御出力信号に関して, 指令信号を次のように選択する.

$$c_{\text{opt}}(t_0) = \operatorname{argmin}_{c_i \in C_c} \left(f(e(t_0 + \Delta t)) \right) \quad (4-17)$$

ここで, $e(t_0 + \Delta t)$ は, 式(4-9)で定義されるセミアクティブ制御系と目標アクティブ制御系間の予測出力信号の誤差である. また, $f(\)$ は, $e(t_0 + \Delta t)$ で制御性能を評価するための性能指標である.

ステップ 4: 地震外乱が収束したと考えられる場合には, アルゴリズムを停止する. それ以外の場合は, $t_0 \leftarrow t_0 + \Delta t$ のように更新してステップ 2 に進む.

いわゆる **Clipped optimal** に基づく制御方法[5]では, ある時刻において, セミアクティブ制御装置—例えば MR (magneto-rheological) ダンパの可変減衰係数が, 目標アクティブ制御則が発生する制御入力をできるだけ再現するように変更される. しかし, セミアクティブ制御系の制御性能は, 一般に制御出力 (例えば, 結果として得られる

セミアクティブ制御系の減衰特性)によって評価されるため, 出力模倣アプローチは, セミアクティブ制御設計として, Clipped optimal control よりも良好な目標アクティブ制御則を達成することが期待できる.

4.5 シミュレーション

次式で表されるような 3 自由度系に対して, 可変 IMD でのセミアクティブ制御のシミュレーションを行う.

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{M} = 6000\mathbf{I}_3 \text{ kg}, \\
 & \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2.700 & -1.712 & 0 \\ -1.712 & 2.796 & 1.084 \\ 0 & -1.084 & 1.084 \end{bmatrix} \times 10^4 \text{ Ns/m}, \\
 & \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2.359 & -1.148 & 0 \\ -1.148 & 2.514 & -1.366 \\ 0 & -1.366 & 1.366 \end{bmatrix} \times 10^6 \text{ N/m}, \\
 & \mathbf{G} = \mathbf{1}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4-18}$$

式(4-18)の係数行列は, 台湾 NCREE (国家地震工学研究センター) の 3 自由度ベンチマーク建屋モデルから取得された[6]. 式(4-18)の構造系では, 可変 IMD が基礎に, つまり第 1 層と地表の間に設置されると仮定される. 慣性質量の最大値と最小値を含む可変 IMD の仕様を表 4-1 に示す.

今回のシミュレーション調査についての, 前節で説明した出力模倣アプローチの設定を表 4-2 に示す. $n_c = 2$ ($c_1 = \underline{m_e}$, $c_2 = \overline{m_e}$) であるため, 可変 IMD の指令信号は, 全ての瞬間, つまり $h = 0.01$ s の間隔で, 可変 IMD の慣性質量値を最大または最小化するような指令信号のいずれかから選択される. 式(4-6)の可変 IMD の動的遅延を表す時定数 $T > 0$ は, $T = 0.1$ s である. 動的遅延 $T = 0.1$ s の可変 IMD は図 4-1 に示す

表 4-1 可変 IMD の仕様

項目	値
T	0.1 s
$\overline{m_e}$	70 000 kg
$\underline{m_e}$	3 000 kg
d_e	6.68×10^4 Ns/m
k_e	1.59×10^8 N/m

表 4-2 出力模倣アプローチの設定

項目	値
Δt	0.01 s
n_c	$2 (c_1 = \underline{m_e}, c_2 = \overline{m_e})$

機構で軸を駆動するリニアアクチュエータを用いることで実現できるとする。リニアアクチュエータは、油圧シリンダ、電磁比例弁、サーボ弁等からなる油圧系を想定する。式(4-17)の性能指標 $f(e(t_0 + \Delta t))$ は次のように定義される。

$$f(e(t_0 + \Delta t)) = (1 - \rho)\|\mathbf{z}(t + \Delta t)\|_2 + \rho\|\mathbf{z}(t + \Delta t) - \mathbf{z}_r(t + \Delta t)\|_2, \quad \rho = 0.5 \quad (4-19)$$

ここで、 ρ は重み係数である。式(4-19)の性能指標では、提案する出力模倣制御手法で着目している予測制御出力信号 $\mathbf{z}(t + \Delta t)$ と $\mathbf{z}_r(t + \Delta t)$ の差によるセミアクティブ制御系と目標アクティブ制御系間の予測出力信号の差だけでなく、セミアクティブ制御系自体の予測出力信号自体も項 $(1 - \rho)\|\mathbf{z}(t + \Delta t)\|_2$ で評価する。このようにすることにより、セミアクティブ制御の性能と2つの系間の類似性のバランスを取り、目標アクティブ制御系の合理性を維持することができる。

式(4-7)で示される目標アクティブ制御系を記述するために、次のように与えられる開ループ系の状態空間形式を定義する。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_0(t) &= \mathbf{A}_0\mathbf{x}_0(t) + \mathbf{B}_0\dot{w}(t) + \mathbf{B}_u u(t), \\ \mathbf{x}_0(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_3 \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}_0 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ -\mathbf{G} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{H} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-20)$$

行列 \mathbf{B}_u の設定では、力アクチュエータが構造系の基礎に配置されていると仮定している。それはセミアクティブ制御系の可変IMDと同じ場所である。開ループ系の場合、状態フィードバック制御則は、次のように定義される。

$$u(t) = -\mathbf{K}_a \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{K}_a \in \mathbb{R}^{1 \times 6} \quad (4-21)$$

ここで、 \mathbf{K}_a は状態フィードバックゲイン行列である。式(4-20)と式(4-21)によって、式(4-7)の目標アクティブ制御系の係数行列は、 $\mathbf{A}_r = \mathbf{A}_0 - \mathbf{B}_u \mathbf{K}_a$ および $\mathbf{B}_r = \mathbf{B}_0$ として定義される。状態フィードバックゲイン行列の制御特性を変更することにより、最適な目標アクティブ制御則を探索する。目標アクティブ制御の制御特性としての閉ループ極配置の制約を使用する。より具体的には、複素 s 平面の領域 \mathbf{R} (図4-2に示す)を形成する $\alpha > 0$ と $\theta > 0$ で記述される2つの設計変数を取得し、行列 \mathbf{A}_r の全ての固有値が

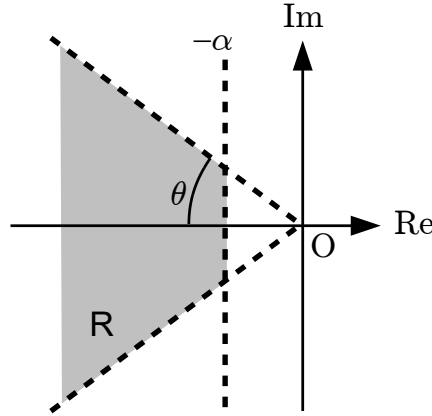


図 4-2 目標アクティブ制御系の閉ループ極が配置される領域 \mathbf{R}

領域 \mathbf{R} に配置されるように状態フィードバックゲイン行列 \mathbf{K}_a が取得される。このような状態フィードバックゲイン行列 \mathbf{K}_a は、次のように取得できる。

$$\mathbf{K}_a = \mathbf{W}\mathbf{X}^{-1} \quad (4-22)$$

ここで、行列 $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{1 \times 6}$ および $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ は、次のように与えられる LMI（線形行列不等式）の解行列である[2]。

$$\mathbf{X} > 0, \quad \mathbf{A}_0\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_0^T - \mathbf{B}_u\mathbf{W} - \mathbf{W}^T\mathbf{B}_u^T + 2\alpha\mathbf{X} < 0 \quad (4-23)$$

$$\begin{bmatrix} \sin \theta (\mathbf{A}_0\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_0^T - \mathbf{B}_u\mathbf{W} - \mathbf{W}^T\mathbf{B}_u^T) & \cos \theta (\mathbf{A}_0\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{A}_0^T + \mathbf{W}^T\mathbf{B}_u^T - \mathbf{B}_u\mathbf{W}) \\ \cos \theta (\mathbf{X}\mathbf{A}_0^T - \mathbf{A}_0\mathbf{X} + \mathbf{B}_u\mathbf{W} - \mathbf{W}^T\mathbf{B}_u^T) & \sin \theta (\mathbf{A}_0\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_0^T - \mathbf{B}_u\mathbf{W} - \mathbf{W}^T\mathbf{B}_u^T) \end{bmatrix} < 0 \quad (4-24)$$

制御出力ベクトル、式(4-3)の $\mathbf{z}(t)$ および式(4-7)の $\mathbf{z}_r(t)$ は、それぞれ、可変 IMD および目標アクティブ制御系を備えた構造系についてのものであり、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) = \mathbf{z}_r(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \mathbf{r}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\ddot{\mathbf{w}}(t) \\ &= \mathbf{C}_r\mathbf{x}_r(t) + \mathbf{D}_r\ddot{\mathbf{w}}(t), \\ \mathbf{r}(t) &= \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) - q_1(t) \\ q_3(t) - q_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{O}_{3 \times 1} & \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{O}_{3 \times 1} \\ \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{O}_{3 \times 1} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{O}_{3 \times 1} \\ \mathbf{F} & \mathbf{O}_{3 \times 1} & \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{O}_{3 \times 1} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_r &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{F} & \mathbf{O}_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}_r = \mathbf{O}_{9 \times 1}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-25)$$

ここで、 $\mathbf{r}(t)$ は隣接層間の相対変位である。

上記の設定の下で，設計変数 α_* と θ_* の最適なペアを探索し， $\underline{\alpha} \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$ と $\underline{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta}$ の範囲の状態フィードバックゲイン行列 \mathbf{K}_a を取得する．ここで， $\underline{\quad}$ と $\bar{\quad}$ は，それぞれ設計変数の最小値と最大値を意味する．式(4-7)の目標アクティブ制御系は，状態フィードバックゲイン行列 \mathbf{K}_a によって決定される．目標アクティブ制御系を用いて，セミアクティブ制御の動作が，前節で記述した出力模倣アプローチに基づいて実行される．最適な設計変数 α_* と θ_* を見つけるための， $k = 1, \dots, n_e$ 個の記録または人工の地震外乱についての，セミアクティブ制御系の性能を評価する性能指標は，次のように定義される．

$$J = \sum_{k=1}^{n_e} (J_{on}^k + J_{off}^k),$$

$$J_{on}^k = \sum_{l=1}^n \frac{\text{RMS}(l r_s^k)}{\text{RMS}(l r_{on}^k)} + \sum_{l=1}^n \frac{\text{Peak}(l r_s^k)}{\text{Peak}(l r_{on}^k)} + \sum_{l=1}^n \frac{\text{RMS}(l a_s^k)}{\text{RMS}(l a_{on}^k)} + \sum_{l=1}^n \frac{\text{Peak}(l a_s^k)}{\text{Peak}(l a_{on}^k)}, \quad (4-26)$$

$$J_{off}^k = \sum_{l=1}^n \frac{\text{RMS}(l r_s^k)}{\text{RMS}(l r_{off}^k)} + \sum_{l=1}^n \frac{\text{Peak}(l r_s^k)}{\text{Peak}(l r_{off}^k)} + \sum_{l=1}^n \frac{\text{RMS}(l a_s^k)}{\text{RMS}(l a_{off}^k)} + \sum_{l=1}^n \frac{\text{Peak}(l a_s^k)}{\text{Peak}(l a_{off}^k)}$$

ここで， $l r_*^k$ と $l a_*^k$ ，また， $* = s, on, off$ ， $l = 1, \dots, n = 3$ ， $k = 1, \dots, n_e$ は，それぞれ，隣接する（第 l 層から第 $(l-1)$ 層を減ずるものとしての）層間の相対変位と第 l 層の絶対加速度，また， $*$ のそれぞれは，セミアクティブ制御系（下付文字 s ），可変 IMD の値をその最大値 \bar{m}_e に固定（Passive on），および，可変 IMD なし（Passive off）を表し， k （ $k = 1, \dots, n_e$ ）は，評価に用いる地震外乱に付けられた番号である．

目標アクティブ制御の状態フィードバックゲイン行列 \mathbf{K}_a を取得するための設計変数の数は2つ（ $\underline{\alpha} \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$ および $\underline{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta}$ ）であるため，最適なペア α_* および θ_* を， $0.01 \leq \alpha \leq 0.3$ と $0.25\pi \leq \theta \leq 0.5\pi$ rad の範囲で総当り的に探索する．式(4-26)中の性能指標 J を取得するための地震波の数 n_e は $n_e = 3$ ，すなわち， $k = 1$: El Centro NS (1940) 波， $k = 2$: Hachinohe NS (1968) 波， $k = 3$: JMA Kobe NS (1995) 波である．全ての地震波は，各波のPGA（ピーク地表加速度）が 4.0 m/s^2 になるようにスケーリングされる．設計変数 α と θ の性能指標 J の値を図 4-3 に示す．性能指数の最小値は $J = 18.026$ であり，最適設計変数の対応する値は $\alpha_* = 0.05$ ， $\theta_* = 0.25\pi$ である．最適な目標アクティブ制御系と開ループ構造系の極配置を図 4-4 に示す．目標アクティブ制御の極は， $\alpha_* = 0.05$ および $\theta_* = 0.25\pi$ によって形成される領域 \mathbf{R} の内側にある．

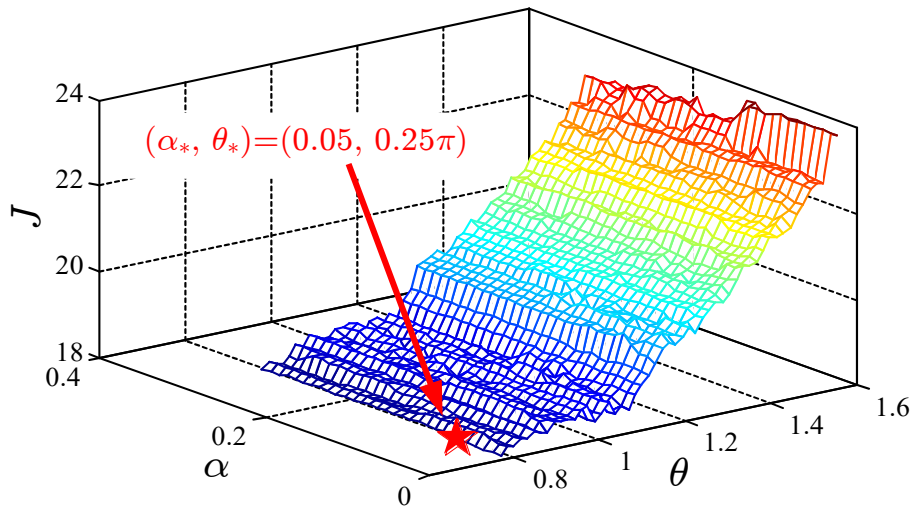


図 4-3 設計変数 α および θ の性能指標 J の値

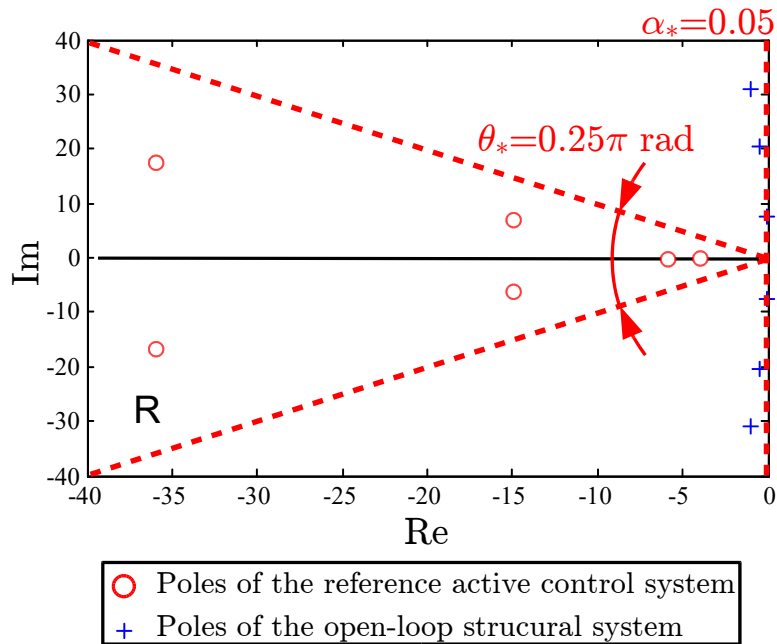


図 4-4 最適な目標アクティブ制御系と開ループ構造系の極配置

各地震外乱に対する式(4-26)での l_*^k および a_*^k ($*=s, on, off, l=1, \dots, n, k=1, \dots, n_e$) の RMS 値およびピーク値は、図 4-5、図 4-7 および図 4-9 に示す。各図には、Passive on の場合と比較したセミアクティブ制御系の各項目の改善量も記載している。可変 IMD を使用したセミアクティブ制御系の制御性能は、 $q_1(t)$ (第 1 層と地表の間の相対変位) のわずかな悪化を除いて、パッシブな同等の制御の場合 (Passive on および Passive off の場合) よりもかなり優れていることが分かる。

また，次のように記述される可変 IMD の反力，

$$f_{\text{IMD}}(t) = k_e(q_1(t) - y_e(t)) \quad (4-27)$$

および，式(4-5)の可変慣性質量 $m_e(c(t))$ の時刻歴は，各地震外乱ごとに，図 4-6，図 4-8 および図 4-10 に示す．セミアクティブ制御系の $f_{\text{IMD}}(t)$ のピーク値は約 10^5 N であり，Passive on の場合よりも小さい．したがって，本章で提案するセミアクティブ制御系は，Passive on 時と比較して振動抑制の性能を向上させているにもかかわらず，IMD の反力は小さい値で済んでいるということが言える．なお，反力の大きさは，現在実在する非可変 IMD，すなわち，熱膨脹の影響を受ける配管系向けのパッシブ振動制御装置として使用されるメカニカル防振器によって十分に発揮可能（強度的に負担可能）な程度である．

以上より，出力模倣アプローチによって制御される可変 IMD を使用したセミアクティブ制御は，地震外乱の影響を受ける構造系の振動抑制に対して良好な制御性能を達成すると結論付けられる．

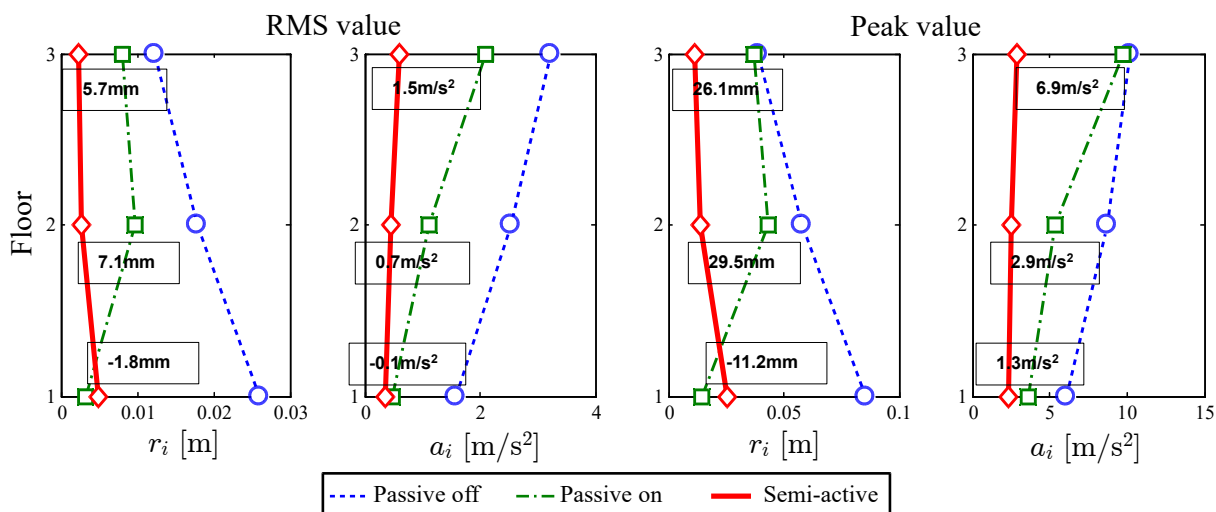


図 4-5 El Centro NS (1940) 波 (PGA = 4.0 m/s^2) を受ける場合の隣接層間相対変位 $r_i(t)$ および各層絶対加速度 $a_i(t)$, $i = 1, \dots, 3$ の RMS 値およびピーク値

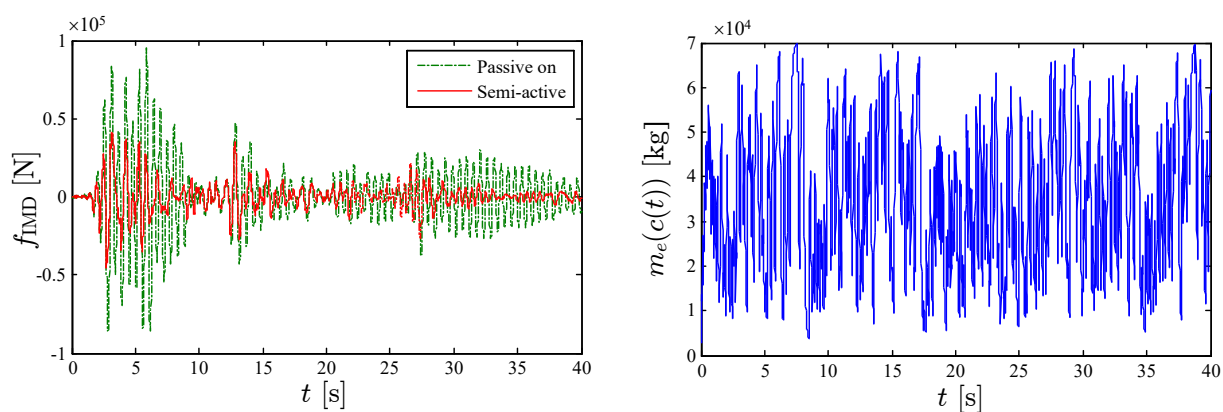


図 4-6 El Centro NS (1940) 波 (PGA = 4.0 m/s^2) を受ける場合の IMD の力 $f_{IMD}(t)$ および可変慣性質量 $m_e(c(t))$

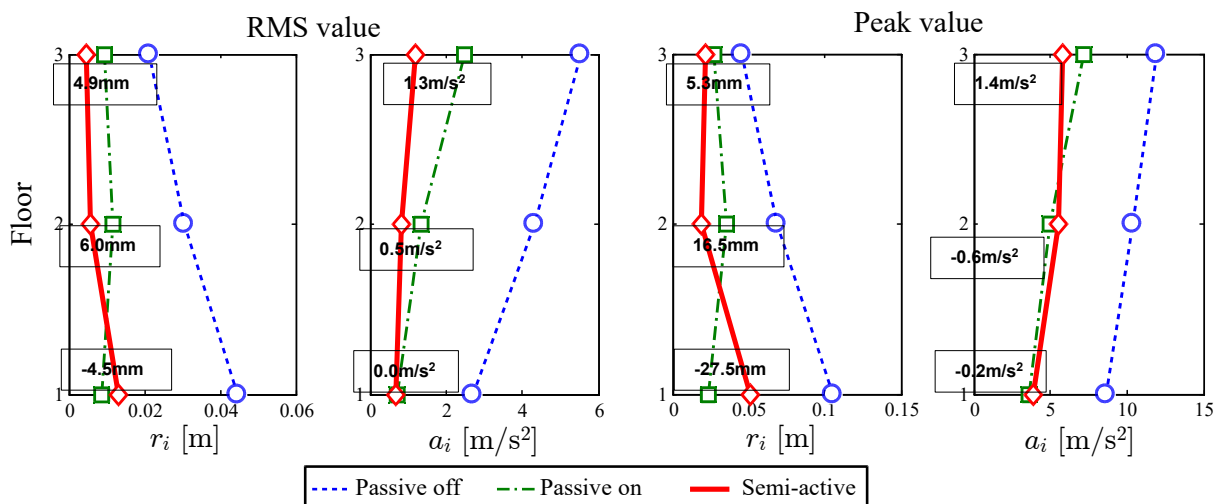


図 4-7 Hachinohe NS (1968) 波 (PGA = 4.0 m/s²) を受ける場合の隣接層間相対変位 $r_i(t)$ および各層絶対加速度 $a_i(t)$, $i = 1, \dots, 3$ の RMS 値およびピーク値

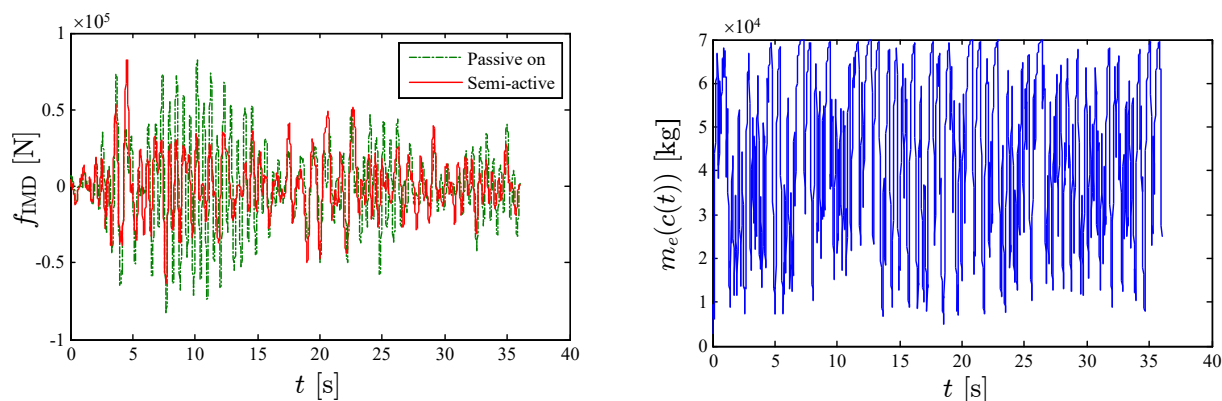


図 4-8 Hachinohe NS (1968) 波 (PGA = 4.0 m/s²) を受ける場合の IMD の力 $f_{\text{IMD}}(t)$ および可変慣性質量 $m_e(c(t))$

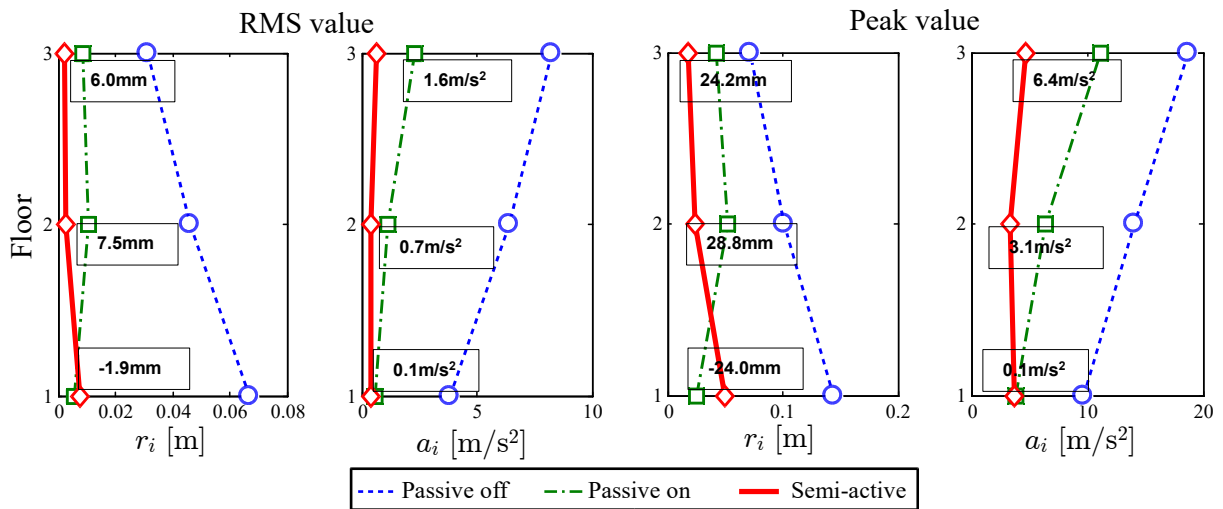


図 4-9 JMA Kobe NS (1995) 波 (PGA = 4.0 m/s²) を受ける場合の隣接層間相対変位 $r_i(t)$ および各層絶対加速度 $a_i(t)$, $i = 1, \dots, 3$ の RMS 値およびピーク値

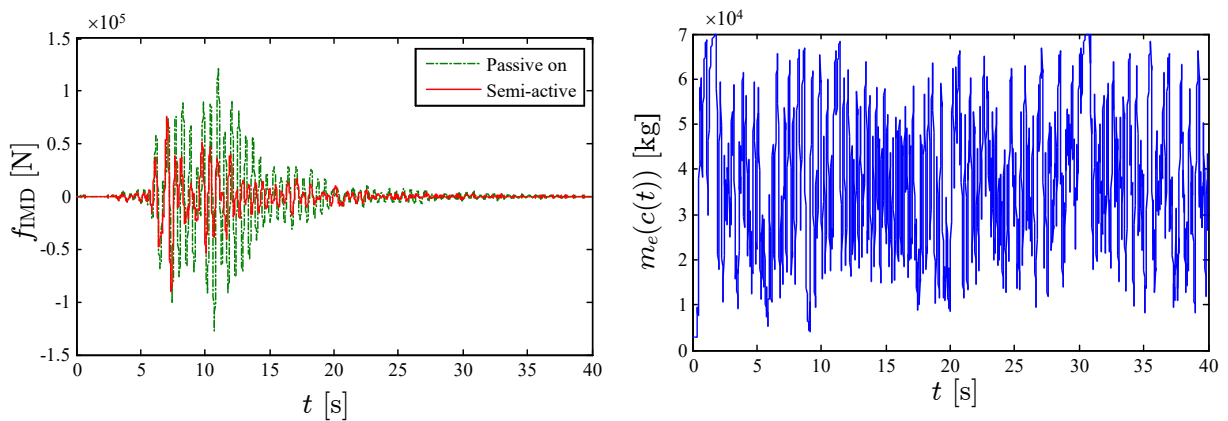


図 4-10 JMA Kobe NS (1995) 波 (PGA = 4.0 m/s²) を受ける場合の IMD の力 $f_{\text{IMD}}(t)$ および可変慣性質量 $m_e(c(t))$

4.6 結言

本章では、可変 IMD (慣性質量ダンパ) を備えた構造系のセミアクティブ振動制御を検討した。可変 IMD およびそれを適用した構造系の数学モデルが、IMD の可変慣性質量を実現する候補から取得された。セミアクティブ制御則として、出力模倣アプローチ[1]を採用した。そして、シミュレーション研究を、既存のベンチマーク建屋モデルに対して行い、振動制御装置として可変 IMD を使用するセミアクティブ制御系が、地震外乱の作用下に対して、Passive off (IMD なし) および Passive on (IMD の可変慣性質量をその上限値に固定) の場合と比較して、優れた制御性能を示すことを確認した。

上記提案のセミアクティブ制御系の実現のためには、現実的な動的遅延と装置容量 (荷重負担能力) を持つ IMD 機構の成立性についての更なる検討が課題となる。

参考文献

- [1] Hiramoto, K., Matsuoka, T. and Sunakoda, K., Semi-active vibration control of structural systems based on a reference active control law: output emulation approach, *Structural Control and Health Monitoring*, Vol. 23 (2016), pp. 423-445.
- [2] Chilali, M. and Gahinet, P., H_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 41 (1996), pp. 358-367.
- [3] 平元和彦, 山崎一生, 可変慣性質量ダンパー, 特願 2020-200763 (2020).
- [4] Yamazaki, I. and Hiramoto, K., Semi-active vibration control for structural systems with a variable inertia mass damper, *Proceedings of the International Conference on Motion and Vibration Control*, doi: [10.1299/jsmeintmovic.2020.15.10074](https://doi.org/10.1299/jsmeintmovic.2020.15.10074) (2020).
- [5] Dyke, S. J., Spencer, B. F., Sain, M. J. and Carlson, J. D., An experimental study of MR dampers for seismic protection, *Smart Materials and Structures*, Vol. 7 (1996), pp. 693-703.
- [6] Nakamura, Y., Fukukita, A., Tamura, K., Yamazaki, I., Matsuoka, T., Hiramoto, K. and Sunakoda, K., Seismic response control using electromagnetic inertial mass dampers, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 43 (2014), pp. 507-527.

第5章 結論

本研究において得られた結果を以下に総括し、また、最後に今後の課題を記し、本論文の結論とする。

第2章「IMD付配管系の動的最適設計：1台適用1型式選定の場合」では、配管系を模擬した単純なものとして単一断面のはり（連続体モデル）を対象に、1台のIMDの適用についての最適設計手法を提示した。最適設計は、IMDの取付位置と慣性質量の値を設計変数とし、振動抑制性能を示す指標としての評価関数を設け、これを最小化する問題を定義し、遺伝的アルゴリズムを適用してIMDに関する最適な設計変数を決定するという手順で行われるものであった。また、2種類の固有振動数（高い場合と低い場合）の単純支持ばりを設計題材として実際に最適設計が行えることをシミュレーションによって示した。

第3章「IMD付配管系の動的最適設計：多台適用多型式選定の場合」では、前章の拡張として、配管系（これは前章と同様に単一断面の単純支持ばり）への多数台かつ多型式のIMDの適用を考慮した最適設計手法を提示した。ここで、型式とは、同種のデバイスの装置容量もしくは許容荷重の大きさによって分類される型である。多型式が存在すればそれに紐付いたIMDの設計値や経済性が存在する。本章の最適設計では、IMDの装置数量、型式番号、取付位置および慣性質量の4項目を設計変数として、型式の概念を前提に振動抑制性能の他に経済性をも考慮できるように評価関数を新たに定義した。また、設計シミュレーションにより、最適な設計変数の探索が行えること、および、振動の応答低減という性能だけではなくIMD適用についての経済性をも加味した最適化が行えることを確認した。さらに、IMDをより現実的なモデルで考慮した場合とばねとみなしたモデルで考慮した場合について時間領域と周波数領域の両面で応答結果を比較し、IMDのばね近似モデルとより現実的なモデルについての振動抑制性能の類似点と差異を明らかにしたことで、より現実的なモデルとしてIMDを考慮することの設計上の意義を認識できた。

第4章「可変IMDを適用した構造系のセミアクティブ制御」では、実現可能と想定される一つのボールねじ式可変IMDの構造を提案すると共に、指令信号に対して現実的な程度の時定数で表される遅延特性（1次遅れ系）を仮定した可変IMDが設置された構造系のセミアクティブ振動制御を検討した。セミアクティブ制御には、出力模倣アプローチに基づくセミアクティブ制御法を採用した。そして、既存ベンチマー

ク建屋モデルを構造系とした上記可変 IMD によるセミアクティブ制御のシミュレーションを行い、地震外乱の作用下に対して、Passive off (IMD なし) および Passive on (IMD の可変慣性質量をその上限値に固定) の場合と比較して、優れた制御性能を示すことを確認した。

本論文では、慣性質量要素を有する振動制御装置に関する技術の高度化および将来的な配管解析・設計の高度化という目的に沿って上記の研究を行い、一定の成果を得ることができた。しかし、第 3 章および第 4 章の延長線上の課題としては、例えば、より実地的な配管系である三次元配管系のモデルを対象とした最適設計の実現性等についての検討や、提案のセミアクティブ制御系の実現するための IMD 機構の成立性について等の更なる検討が望まれる。これらについても、今後取り取り組んでいく予定である。

付録 A w_p および w_c の設定の目安

本付録では、ペナルティとしての係数 w_p および経済性の重み係数 w_c の設定の目安となる、不自然と思われる特定の状況を回避するために有用なそれらの大まかな条件を述べる。

まず、 w_p について検討する。式(3-29)の評価関数 $J = \sum_{h=1}^{n_w} (J_1^h + J_2^h + J_3^h + J_4^h) + w_c \sum_{i=1}^{n_d} c_i$, $h = 1, \dots, n_w$, $i = 1, \dots, n_d$ 中の J_2^h (式(3-31)) および J_4^h (式(3-33)) の両者の第2式には、いずれも w_p が含まれており、それぞれ、 $w_p \rho_{force}^h$ と $w_p \rho_{stress}^h$ であった。これらは、それぞれ、装置反力と曲げ応力が各許容値を超過している場合に行われるペナルティが課される計算である。ここで、系の健全性の意味合いから、次の前提①が望まれる。

前提①：ペナルティが課される場合は、少なくともはりとIMDのどちらかは健全性が失われている場合であるので、健全性が保たれているが応答が大きいというような場合よりも不良な個体であると評価されて欲しい。

評価関数 J の振動抑制に関する性能指標部としての第1項を $J_{perf} := \sum_{h=1}^{n_w} (J_1^h + J_2^h + J_3^h + J_4^h)$ と置けば、前提①より以下の条件が成り立つ。

(許容値満足時の最悪性能としての J_{perf})

< (ペナルティが1回課されるが各種応答が極小と仮定される場合の J_{perf}) (A-1)

∴ 許容値満足時最悪性能値 < w_p

ここで、許容値満足時最悪性能値、すなわち、系のいずれの健全性も失われていない(はりもIMDも許容値を満足している)限りにおいての真に最悪の応答を示す個体の J_{perf} 値は、有限な時間における遺伝的アルゴリズム(以下GAと呼ぶ)の探索では特定できない。ただし、その概算値ならば、次の手順によって知ることができる。

手順1：何世代かだけ予備的なGAによる探索を実施する。

手順2：その間、各個体の J_{perf} 値を観察する。

手順3：そして、ペナルティが課されることのない個体に限った最も大きな J_{perf} 値を取得し、この概算値を「許容値満足時暫定最悪性能値」とする。

上記値を用いれば、式(A-1)を概ね満足するための w_p の条件は次式となる。

$$\text{許容値満足時暫定最悪性能値} \ll w_p \quad (\text{A-2})$$

式(A-2)を満足するように w_p を設定すれば、前提①がほぼ保たれる。この設定は、最終結果として得られる個体の評価関数値が w_p を超過しているのならば即座に（具体的な応答値を確認せずとも）その個体の示す系は何らかの健全性が失われていることがほぼ間違いないと判断できるため、最適設計変数の確認をする上で有用である。

次に、 w_c について検討する。経済性を無視して、振動抑制性能だけを追求するならば、 $w_c = 0$ とすべきであり、これは明白である。一方、振動抑制性能の他に経済性をも考慮するならば、考慮したい程度に応じて少しずつ w_c を大きくすれば良い。しかし、この値の調整については特段の決め手は存在せず、人間の何らかの判断に依存して決定されるべきものである（例えば、最安と目される場合よりももう少しだけコストアップとなっても応答値がより低い場合を知った上でどれを採用すべきか感覚的に判断したい等）。さらに、 w_c をある程度明確に大きくすれば、経済性を最大限に重視する場合となるが、 w_c の大きさをどの程度とすれば良いか、さらにいえば、どのような範囲内の値とすれば良いかよく考えなければならない。これを明確にするためには、次の二つの言外に当然として望まれる前提を考える必要がある。

前提②：コストが異なる複数の IMD の諸元の組合せからなる複数の個体が全く同じ振動抑制性能（ペナルティが課されない場合に限る）を示す場合には、必ずその中の最もコストが低い個体が優良であると評価されて欲しい。

前提③：コストが最高だが許容値を満足している個体の方が、コストが最低だが許容値を 1 回でも満足していない個体よりも優良であると評価されて欲しい。

前提②は、経済性を最大に重視するという意味合いから望まれる前提である。前提③は健全性が何より重要という設計上の要求から望まれる前提（前提①と似たもの）である。

前提②が、崩れないためには、少なくとも、最低コストの場合（最小型式を 1 台だけ適用する場合）の評価関数 J の第 2 項 $w_c \sum_{i=1}^{n_d} c_i$ （以降 $J_{\text{econ}} := w_c \sum_{i=1}^{n_d} c_i$ と置く）が、ペナルティが課されない限りの個体において見込まれる J の第 1 項 J_{perf} の最悪値（これ

は式(A-1)の許容値満足時最悪性能値のこと)よりも大きければ良いことが明らかであるため、次の条件が得られる。

$$\text{許容値満足時最悪性能値} < w_c \cdot \underline{c} \quad (\text{A-3})$$

ここで、 \underline{c} は第3章の表3-1の最小型式に対応する価格指数である。しかし、ペナルティとしての係数 w_p を検討した場合と同様に、許容値満足時最悪性能値は特定できないため、許容値満足時暫定最悪性能値を用いれば、上式は近似的に次の条件となる。

$$\text{許容値満足時暫定最悪性能値} \ll w_c \cdot \underline{c} \quad (\text{A-4})$$

前提③からは、次の条件が成り立つ。

$$\begin{aligned} & (w_p \text{が課される時に見込まれる最小の} J_{\text{perf}}) + (\text{最小型式1台使用時の} J_{\text{econ}}) \\ & > (w_p \text{が課されない時に見込まれる最大の} J_{\text{perf}}) + (\text{最大型式} \bar{n}_d \text{台使用時の} J_{\text{econ}}) \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

ここで、左辺第1項が少なくとも w_p となること、および、右辺第1項が許容値満足時暫定最悪性能値に近いオーダーの値となることから、近似的に次の条件が得られる。

$$\begin{aligned} w_p + w_c \cdot \underline{c} & > \text{許容値満足時暫定最悪性能} + w_c \cdot \bar{n}_d \cdot \bar{c} \\ \therefore w_c (\bar{n}_d \cdot \bar{c} - \underline{c}) & < w_p - \text{許容値満足時暫定最悪性能} \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

ここで、 \bar{c} は第3章の表3-1の最大型式に対応する価格指数であり、 \bar{n}_d は設計上限としてのIMD台数である。前提①から得られた式(A-2)が表す許容値満足時暫定最悪性能値が w_p よりもはるかに小さいことを考慮すれば、上式は次式のように表せる。

$$w_c (\bar{n}_d \cdot \bar{c} - \underline{c}) < w_p \quad (\text{A-7})$$

前提②と前提③から得られた式(A-4)と式(A-7)の両者を考慮すれば、次の条件が得られる。

$$\frac{\text{許容値満足時暫定最悪性能値}}{\underline{c}} \ll w_c < \frac{1}{\bar{n}_d \cdot \bar{c} - \underline{c}} w_p \quad (\text{A-8})$$

また、 $1/\underline{c}$ と $1/(\overline{n}_d \cdot \bar{c} - \underline{c})$ が1に近いオーダーである限りにおいて、上式は次の簡易な表現として扱うこともできる。

$$\text{許容値満足時暫定最悪性能値} \ll w_c \ll w_p \quad (\text{A-9})$$

式(A-8)もしくは式(A-9)を満足するような w_c と w_p を設定すれば、全ての前提①、②および③がほぼ保たれると言える。

付録 B IMD 付三次元配管系のモデル化のまとめ

B.1 内容説明

本付録は、第 3 章の拡張としての最適設計手法の検討に先立って必要となる直管および曲管の要素からなるはりの有限要素モデルとしての三次元配管系モデル化についての調査と検討のまとめである。

はじめに、計算式に用いる記号の表記を示す。次に、対象のモデルおよび応答の計算式を示す。モデルについては、直管と曲管の要素だけからなる三次元配管系の単体の場合、基本的な付属要素であるばね要素（高剛性なばねとしてのレストレイント等をモデル化するもの）と集中的な慣性要素（バルブ等をモデル化するもの）が付加される場合、および、更により現実的なモデルとしての IMD 要素が付加される場合を示す。三次元配管系のモデルおよび基本的な付属要素のモデルのための計算式は、材料力学および機械力学の基本的事項およびその他配管設計に関する多くの個別の検討で確立された事項を組合せることで得られるものであり、配管設計のための実用品としての汎用ソフトウェアに実装された例も多数あることから、既知の事項である。しかし、著者の調査では、その構築のために必要な一連の考えと構築される結果を明瞭な形で示す文献を発見することはなく、理解のために多くの時間を要した。そのため、モデル構築については、冗長のきらいはあるが、曖昧性が少なくなるように記述している。

今後、ここに示す IMD 付の三次元配管系モデルを対象に、第 3 章を拡張した検討を実際に進める予定である。

B.2 記号の定義

混乱を避けるため、本付録で用いる代表的な記号をあらかじめ以下に記す。特に、波括弧{ }と山括弧⟨ ⟩には、特殊な意味を与えていることに注意のこと。

$$\delta_{a,b} = \begin{cases} 1 & , a = b \\ 0 & , a \neq b \end{cases} : \text{クロネッカーのデルタ.}$$

$\mathbf{0}_{n_a \times n_b}$: n_a 行 n_b 列の零行列.

$\mathbf{0}_n = \mathbf{0}_{n \times n}$: n 行 n 列の零行列.

$\mathbf{0}_n = \mathbf{0}_{n \times 1}$: 全ての成分が 0 である n 次元の縦ベクトル（零ベクトル）.

\mathbf{I}_n : n 行 n 列の単位行列.

$\mathbf{1}_n$: 全ての成分が 1 である n 次元の縦ベクトル.

(x, y, z) : 全体座標 (全体剛性行列等を表現するための座標) .

(ξ_I, η_I, ζ_I) と (ξ_J, η_J, ζ_J) : それぞれ, 始端と終端での局所座標 (要素剛性行列等を表現するための座標) .

$(\xi_{Ieva}, \eta_{Ieva}, \zeta_{Ieva})$ と $(\xi_{Jeva}, \eta_{Jeva}, \zeta_{Jeva})$: それぞれ, 始端と終端での部材座標 (管要素の健全性評価に使用される一般化力を表現するための座標) .

N_{ele} : 直管と曲管の要素 (以降, 特別な言及なしに要素と呼べばこれを指す) の数.

N_{nod} : 節点数 (節点番号の最大値) .

N_{spr} : 追加される並進と回転のばね要素の数 (1 軸に関して 1 個) .

N_{mas} : 追加される集中的慣性要素 (質量と慣性モーメントの組) の数 (1 節点 1 個) .

N_d : 追加される IMD 要素の数.

$i = 1, \dots, N_{ele}$ or $1, \dots, N_{spr}$ or $1, \dots, N_{mas}$ or $1, \dots, N_d$: i の末尾記号に関する要素番号.

$j = 1, \dots, N_{nod}$: 節点番号 (1 から始まる連番である必要がある. 連番でない節点番号で表現される配管系が問題として与えられる場合は, 内部的処理によって 1 から始まる連番の節点番号に振り替えられることを前提とする) .

$\mathbf{u}_I = [u_{\xi I} \quad u_{\eta I} \quad u_{\zeta I}]^T$: 要素の始端の変位ベクトル.

$\boldsymbol{\theta}_I = [\theta_{\xi I} \quad \theta_{\eta I} \quad \theta_{\zeta I}]^T$: 要素の始端の回転角ベクトル.

$\hat{\mathbf{u}}_I = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_I \\ \boldsymbol{\theta}_I \end{bmatrix}$: 要素の始端の一般化変位ベクトル.

$\mathbf{u}_J = [u_{\xi J} \quad u_{\eta J} \quad u_{\zeta J}]^T$: 要素の終端の変位ベクトル.

$\boldsymbol{\theta}_J = [\theta_{\xi J} \quad \theta_{\eta J} \quad \theta_{\zeta J}]^T$: 要素の終端の回転角ベクトル.

$\hat{\mathbf{u}}_J = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_J \\ \boldsymbol{\theta}_J \end{bmatrix}$: 要素の終端の一般化変位ベクトル.

$\hat{\mathbf{u}}_B = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_I \\ \hat{\mathbf{u}}_J \end{bmatrix}$: 要素の両端の一般化変位ベクトル.

::⁽ⁱ⁾ (上付文字(i)付の記号::) : 要素一般についての意味での要素番号 i の要素に関するものであることを明示した記号:: (関連する具体的な記号を以下にいくつか列挙する) .

$\mathbf{u}_I^{(i)}, \boldsymbol{\theta}_I^{(i)}, \hat{\mathbf{u}}_I^{(i)}, \mathbf{u}_J^{(i)}, \boldsymbol{\theta}_J^{(i)}, \hat{\mathbf{u}}_J^{(i)}, \hat{\mathbf{u}}_B^{(i)}$: 要素番号 $i = 1, \dots, N_{ele}$ を明示した上記の各ベクトル.

$n_I^{(i)}$: 要素番号 $i = 1, \dots, N_{ele}$ の要素の始端となっている節点の節点番号.

$n_J^{(i)}$: 要素番号 $i = 1, \dots, N_{ele}$ の要素の終端となっている節点の節点番号.

$n_{nodspr}^{(i)}$: $i = 1, \dots, N_{spr}$ 番目のばね要素が接続される節点の節点番号.

$n_{nodmas}^{(i)}$: $i = 1, \dots, N_{mas}$ 番目の集中的慣性要素が接続される節点の節点番号.

$n_{nodd}^{(i)}$: $i = 1, \dots, N_d$ 番目の IMD 要素が接続される節点の節点番号.

$\mathbf{u}_j = [u_{xj} \ u_{yj} \ u_{zj}]^T$: 節点 $j = 1, \dots, N_{\text{nod}}$ の変位ベクトル.

$\boldsymbol{\theta}_j = [\theta_{xj} \ \theta_{yj} \ \theta_{zj}]^T$: 節点 $j = 1, \dots, N_{\text{nod}}$ の回転角ベクトル.

$\hat{\mathbf{u}}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_j \\ \boldsymbol{\theta}_j \end{bmatrix}$: 節点 $j = 1, \dots, N_{\text{nod}}$ の一般化変位ベクトル.

$\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1^T \ \dots \ \mathbf{u}_{N_{\text{nod}}}^T]^T$: 全節点の変位ベクトル.

$\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_1^T \ \dots \ \boldsymbol{\theta}_{N_{\text{nod}}}^T]^T$: 全節点の回転角ベクトル.

$\hat{\mathbf{u}} = [\hat{\mathbf{u}}_1^T \ \dots \ \hat{\mathbf{u}}_{N_{\text{nod}}}^T]^T$: 全節点の一般化 (相対) 変位ベクトル.

$\hat{\mathbf{w}} = [\hat{\mathbf{w}}_1^T \ \dots \ \hat{\mathbf{w}}_{N_{\text{nod}}}^T]^T$: 全節点の一般化絶対変位ベクトル.

$\ddot{w}_{x0}, \ddot{w}_{y0}, \ddot{w}_{z0}$: x, y, z 方向の基礎加速度 (基礎は並進方向にのみ運動すると仮定).

$\ddot{\mathbf{w}}_g$: x, y, z 方向の基礎加速度の全節点に対応するベクトル (全節点の一般化相対加速度ベクトル $\hat{\mathbf{u}}$ に加算することでそれが全節点の一般化絶対加速度ベクトル $\hat{\mathbf{w}}$ となるようにするための加算分のベクトル), すなわち,

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{w}}_g &= \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{w}_{x0} & \ddot{w}_{y0} & \ddot{w}_{z0} & 0 & 0 & 0 & | & \ddot{w}_{x0} & \ddot{w}_{y0} & \ddot{w}_{z0} & 0 & 0 & 0 & | & \dots & | & \ddot{w}_{x0} & \ddot{w}_{y0} & \ddot{w}_{z0} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T}_{6N_{\text{nod}}} \\ &= \mathbf{e}_x \ddot{w}_{x0} + \mathbf{e}_y \ddot{w}_{y0} + \mathbf{e}_z \ddot{w}_{z0}, \end{aligned}$$

ここで, \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y および \mathbf{e}_z は, 以下のベクトル (incidence vector と呼ばれることがあり [1], これより, 以降, 接続ベクトルと呼ぶ) である.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & \dots & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T}_{6N_{\text{nod}}}, \\ \mathbf{e}_y &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & \dots & | & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T}_{6N_{\text{nod}}}, \\ \mathbf{e}_z &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & \dots & | & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T}_{6N_{\text{nod}}}. \end{aligned}$$

\mathbf{ind}_{ufree} , $\mathbf{ind}_{\theta free}$ と $\mathbf{ind}_{\hat{u} free}$: それぞれ, $\hat{\mathbf{u}}$ に対する変位, 回転角とその両方に関する非拘束な自由度を表すベクトル (成分番号は自由度番号に対応し, 各成分はその番号が拘束の場合は 0, 非拘束の場合は 1). 具体例として, 節点数 $N_{\text{nod}} = 3$ の系で, $j = 1$ 番目の節点は全て拘束, $j = 3$ 番目の節点は並進の x 方向のみ拘束という境界条件が適用される場合は, 以下となる.

$$\begin{aligned} \mathbf{ind}_{ufree} &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ | \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ | \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \\ \mathbf{ind}_{\theta free} &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ | \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ | \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]^T, \\ \mathbf{ind}_{\hat{u} free} &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ | \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ | \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T. \end{aligned}$$

N_{ufree} : $\hat{\mathbf{u}}$ における変位に関する非拘束な自由度の数 (\mathbf{ind}_{ufree} の1である成分数) .

$N_{\theta free}$: $\hat{\mathbf{u}}$ における回転角に関する非拘束な自由度の数 ($\mathbf{ind}_{\theta free}$ の1である成分数) .

$N_{\hat{\mathbf{u}} free} = N_{ufree} + N_{\theta free}$: $\hat{\mathbf{u}}$ における全ての非拘束な自由度の数.

$\mathbf{X}\{\mathbf{ind}_a, \mathbf{ind}_b\}$: { }の直左の行列 \mathbf{X} に対して以下の操作を行うことで得られる行列.

- 前提 : \mathbf{ind}_a と \mathbf{ind}_b はいずれも0または1のいずれかを成分に持つベクトルであり, それらの成分の数はそれぞれ \mathbf{X} の行数と列数に等しい.
- \mathbf{ind}_a の1である成分の成分番号に対応する \mathbf{X} の全ての行を残す.
- \mathbf{ind}_b の1である成分の成分番号に対応する上記行列の全ての列を残す.

$\mathbf{x}\{\mathbf{ind}\} = \mathbf{x}\{\mathbf{ind}, 1\}$: { }の直左のベクトル \mathbf{x} に対して以下の操作を行うことで得られるベクトル.

- 前提 : \mathbf{ind} は0または1のいずれかを成分に持つベクトルであり, その成分の数は \mathbf{x} の成分の数に等しい.
- \mathbf{ind} の1である成分の成分番号に対応する \mathbf{x} の全ての成分を残す.

$\mathbf{X}\langle \mathbf{ind}_a, \mathbf{ind}_b \rangle$: $\langle \rangle$ の直左の行列 \mathbf{X} (ベクトルを含む) に対して以下の操作を行うことで得られる行列.

- 前提 : \mathbf{ind}_a と \mathbf{ind}_b はいずれも0または1のいずれかを成分に持つベクトルであり, それらの1である成分の数はそれぞれ \mathbf{X} の行数と列数に等しい.
- \mathbf{ind}_a の成分の数と同じ行数, かつ, \mathbf{ind}_b の成分の数と同じ列数である零行列を作成する.
- 上記零行列に関して, \mathbf{ind}_a の1である成分の成分番号に対応する行と \mathbf{ind}_b の1である成分番号に対応する列が重なり合う全ての区分に対して順序はそのまま \mathbf{X} の全ての成分を代入する.

$\mathbf{x}\langle \mathbf{ind} \rangle = \mathbf{x}\langle \mathbf{ind}, 1 \rangle$: $\langle \rangle$ の直左のベクトル \mathbf{x} に対して以下の操作を行うことで得られるベクトル.

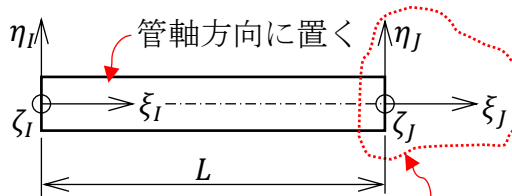
- 前提 : \mathbf{ind} は0または1のいずれかを成分に持つベクトルであり, その1である成分の数は \mathbf{x} の成分の数に等しい.
- \mathbf{ind} の成分の数と同じ成分の数である零ベクトルを作成する.
- \mathbf{ind} の1である成分の成分番号に対応する上記零ベクトルの全ての成分に対して順序はそのまま \mathbf{x} の全ての成分を代入する.

B.3 IMD を設置した三次元配管系のモデル化

対象となる三次元配管系の単体のモデルは、図 B-1 に示す直管と曲管の要素をはりとして扱い、それを有限個連結したもので表現できると仮定する。また、図 B-1 に示す座標 (ξ_I, η_I, ζ_I) と (ξ_J, η_J, ζ_J) をそれぞれ始端および終端の「局所座標」と呼び、その両端での一般化変位（変位と回転角）および対応する一般化力（力とモーメント）は、それぞれの座標の矢印の方向を正とするような成分からなる一般化変位ベクトル $\hat{\mathbf{u}}_B = [\hat{\mathbf{u}}_I^T \quad \hat{\mathbf{u}}_J^T]^T$ および一般化力ベクトル $\hat{\mathbf{f}}_B = [\hat{\mathbf{f}}_I^T \quad \hat{\mathbf{f}}_J^T]^T$ で表す。

直管および曲管の要素の柔性（たわみ性）を表す行列 Φ_{JJ} （終端の一般化力ベクトル $\hat{\mathbf{f}}_J$ に左乗することで、始端固定時の終端の一般化変位ベクトル $\hat{\mathbf{u}}_J$ を導くもの。直管または曲管であることを区別する必要がある際には、それぞれtanとbenの上付文字を記号に付けることにする）は、要素のひずみエネルギーを作成し、カスティリアーノの第2定理を適用することで次式のようなになる（この手順による柔性行列の作成については、例えば、[2]の APPENDIX B に記述がある。ただし、局所座標の定義は異なる）。

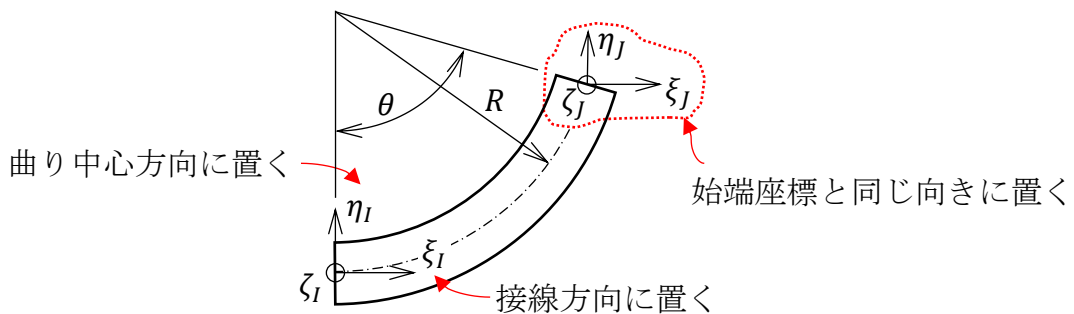
ξ_I - y 平面を設け、その中で η_I の y 成分が正となるように置く



※ ξ_I 軸と y 軸が平行となり、 ξ_I - y 平面が定義できない場合は、 ζ_I が z の正の方向を向くように置く

始端座標と同じ向きに置く

(a) 直管



(b) 曲管

図 B-1 直管と曲管の要素およびその始端と終端での局所座標の定義

$$\Phi_{JJ}^{\tan} := \Phi_{JJ} = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI} + \alpha \frac{L}{GA} & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & 0 & \frac{L^3}{3EI} + \alpha \frac{L}{GA} & 0 & -\frac{L^2}{2EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L}{GJ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{L^2}{2EI} & 0 & \frac{L}{EI} & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{EI} \end{bmatrix} \quad (\text{B-1})$$

$$\Phi_{JJ}^{\text{ben}} := \Phi_{JJ} = \begin{bmatrix} \phi_{JJ11} & \phi_{JJ12} & 0 & 0 & 0 & \phi_{JJ16} \\ & \phi_{JJ22} & 0 & 0 & 0 & \phi_{JJ26} \\ & & \phi_{JJ33} & \phi_{JJ34} & \phi_{JJ35} & 0 \\ & & & \phi_{JJ44} & \phi_{JJ45} & 0 \\ \text{Sym.} & & & & \phi_{JJ55} & 0 \\ & & & & & \phi_{JJ66} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \phi_{JJ11} &= \kappa \frac{(2\theta \cos(2\theta) + 4\theta - 3 \sin(2\theta))R^3}{4EI} + \alpha \frac{(2\theta - \sin(2\theta))R}{4GA} + \frac{(2\theta + \sin(2\theta))R}{4EA}, \\ \phi_{JJ12} &= \kappa \frac{(2\theta \sin(2\theta) - 4 \cos(\theta) + 3 \cos(2\theta) + 1)R^3}{4EI} + \alpha \frac{(\cos(2\theta) - 1)R}{4GA} + \frac{(1 - \cos(2\theta))R}{4EA}, \\ \phi_{JJ16} &= \kappa \frac{(\theta \cos(\theta) - \sin(\theta))R^2}{EI}, \\ \phi_{JJ22} &= \kappa \frac{(-2\theta \cos(2\theta) + 4\theta - 8 \sin(\theta) + 3 \sin(2\theta))R^3}{4EI} + \alpha \frac{(2\theta + \sin(2\theta))R}{4GA} + \frac{(2\theta - \sin(2\theta))R}{4EA}, \\ \phi_{JJ26} &= \kappa \frac{(\theta \sin(\theta) + \cos(\theta) - 1)R^2}{EI}, \\ \phi_{JJ33} &= \frac{(6\theta - 8 \sin(\theta) + \sin(2\theta))R^3}{4GJ} + \kappa \frac{(2\theta - \sin(2\theta))R^3}{4EI} + \alpha \frac{\theta R}{GA}, \\ \phi_{JJ34} &= \frac{(-\theta \cos(\theta) + \sin(\theta))R^2}{2GJ} + \kappa \frac{(-\theta \cos(\theta) + \sin(\theta))R^2}{2EI}, \\ \phi_{JJ35} &= \frac{(-\theta \sin(\theta) - 2 \cos(\theta) + 2)R^2}{2GJ} - \kappa \frac{\theta \sin(\theta) R^2}{2EI}, \\ \phi_{JJ44} &= \frac{(2\theta + \sin(2\theta))R}{4GJ} + \kappa \frac{(2\theta - \sin(2\theta))R}{4EI}, \\ \phi_{JJ45} &= \frac{(1 - \cos(2\theta))R}{4GJ} + \kappa \frac{(\cos(2\theta) - 1)R}{4EI}, \\ \phi_{JJ55} &= \frac{(2\theta - \sin(2\theta))R}{4GJ} + \kappa \frac{(2\theta + \sin(2\theta))R}{4EI}, \quad \phi_{JJ66} = \kappa \frac{\theta R}{EI} \end{aligned} \quad (\text{B-2})$$

ここで、 L は要素長さ[m]、 E は縦弾性係数[Pa]、 I は断面二次モーメント[m⁴]、 J はねじり定数[m⁴]（中空および中実を問わず円形断面の場合、断面二次極モーメントに等しい。すなわち、 $J = 2I$ ）、 G は横弾性係数[Pa]、 A は断面積[m²]、 α は剪断変形係数である。 α については、仮定の違いにより各種の計算式が提案されているが（例えば、この状況を日置・村田[3]は、「混乱している」と評している。また、野津[4]は、剪断変形係数についてその「意義に関する既存の教科書等での説明がいまひとつ不明確であり、誰もが共有できる共通の議論の土台を構成していないことがあるのではないかと推察される」とし、一つの異なる剪断変形係数の設定方法を提案している。ここでは、上記のような指摘と提案があることを記すに留める）、円形断面の場合、少なくとも配管系の挙動検討の分野で従来用いられているものとしては次式が存在する[5]。

$$\alpha = \frac{4 D_o^2 + D_o D_i + D_i^2}{3 D_o^2 + D_i^2} \quad (\text{B-3})$$

ここで、 D_o と D_i はそれぞれ管の外径と内径である。上式によれば、実配管系の管形状の場合、管の内外径の差が小さく、 α は2に近い値となることが多い。剪断変形を考慮する仮定（はりをいわゆるティモシェンコばりとして扱う）で検討する場合は、上式の α によって Φ_{JJ} を求め、逆に、剪断変形を考慮しない仮定（はりをいわゆるオイラーばりとして扱う）で検討する場合は、 $\alpha = 0$ として Φ_{JJ} を求めれば良い（ Φ_{JJ} は α を持つ項が消えた形となる）。また、 R は曲管の曲り半径[m]、 θ は曲管の曲り角度[rad]、 κ はたわみ係数（flexibility factor, 柔係数やフレキシビリティファクターとも呼ばれる）である。曲管は、一般に、中心線の長さと同断面性能が等しい直管に比べてたわみ易く、そのたわみの増大の程度は、管厚、管径、曲り半径等に依存し、同じ曲げモーメント作用下についての「曲管のたわみ角÷直管のたわみ角」という比としての値 κ によって表現できる。 κ については、試験や理論によって検討された各種の計算式が提案されている[2][6][7]。例えば、M. W. Kellogg社の書籍[7]では、いくつかの計算式の傾向をグラフから知ることができる。実務的な設計においては、以下の2種の計算式が良く用いられていると考える。一つ目は、次の内圧の影響を考慮しない場合の式である。

$$\kappa = \frac{1.65}{h}, \quad h = tR/r_m^2 \quad (\text{B-4})$$

ただし、 κ が1を下回る場合があれば1に制限する。ここで、 t は管厚[m]、 r_m 平均管半径[m]である。なお、 h はパイプ係数（pipe factor）やたわみ特性値（flexibility

characteristic) と呼ばれることがある。二つ目は、次の内圧を考慮する場合に用いられる式である。

$$\kappa = \frac{1.65}{h} \frac{1}{1 + \frac{Pr_m}{Et} X_\kappa}, \quad X_\kappa = 6 \left(\frac{r_m}{t} \right)^{\frac{4}{3}} \left(\frac{R}{r_m} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{B-5})$$

ただし、 κ が1を下回る場合があれば1に制限する。ここで、 P は内圧[Pa]である。内圧を考慮する場合の式(B-5)は、 $P = 0$ の代入によれば考慮しない場合の式(B-4)に一致するものであり、より一般的な表現である。

要素剛性行列（両端の一般化変位ベクトル $\hat{\mathbf{u}}_B = [\hat{\mathbf{u}}_i^T \quad \hat{\mathbf{u}}_j^T]^T$ に左乗することで、両端の一般化力ベクトル $\hat{\mathbf{f}}_B = [\hat{\mathbf{f}}_i^T \quad \hat{\mathbf{f}}_j^T]^T$ を導くもの）は、要素の両端の力とモーメントの関係を考慮することにより、次式となる。

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II} & \mathbf{K}_{IJ} \\ \mathbf{K}_{JI} & \mathbf{K}_{JJ} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, N_{\text{ele}},$$

$$\mathbf{K}_{JJ} = \Phi_{JJ}^{-1}, \quad \mathbf{K}_{IJ} = \mathbf{H}\mathbf{K}_{JJ}, \quad \mathbf{K}_{JI} = \mathbf{K}_{JJ}\mathbf{H}^T, \quad \mathbf{K}_{II} = \mathbf{H}\mathbf{K}_{JJ}\mathbf{H}^T,$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_3 & \mathbf{O}_3 \\ -L & -\mathbf{I}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L \\ 0 & L & 0 \end{bmatrix} & , \Phi_{JJ} = \Phi_{JJ}^{\text{tan}} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & R(1 - \cos \theta) \\ 0 & 0 & -R \sin \theta \\ -R(1 - \cos \theta) & R \sin \theta & 0 \end{bmatrix} & , \Phi_{JJ} = \Phi_{JJ}^{\text{ben}} \end{cases} \quad (\text{B-6})$$

これは、全ての要素について作成するものであり、どの要素番号についてのものかを明確にする必要がある場合は、 $\mathbf{K}^{(i)}, i = 1, \dots, N_{\text{ele}}$ と書くことにする。なお、上式の結果は、要素のひずみエネルギーを立て、それにラングランジュの運動方程式を適用して復元項を導出する作業によっても得られる。

式(B-6)の局所座標に従って記述される $\mathbf{K}^{(i)}$ を全体座標に従って記述されるように座標変換すれば、次の剛性行列 $\mathbf{K}_{\text{glo}}^{(i)}$ (i 番目要素の始端節点番号 $n_i^{(i)}$ と終端節点番号 $n_j^{(i)}$ における節点での一般化変位ベクトル $[\hat{\mathbf{u}}_{n_i^{(i)}}^T \quad \hat{\mathbf{u}}_{n_j^{(i)}}^T]^T$ に左乗することで、同節点での一般化力ベクトル $[\hat{\mathbf{f}}_{n_i^{(i)}}^T \quad \hat{\mathbf{f}}_{n_j^{(i)}}^T]^T$ を導くもの) が得られる。

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{\text{glo}}^{(i)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{gloII}}^{(i)} & \mathbf{K}_{\text{gloIJ}}^{(i)} \\ \mathbf{K}_{\text{gloJI}}^{(i)} & \mathbf{K}_{\text{gloJJ}}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}}^{(i)} & \mathbf{O}_6 \\ \mathbf{O}_6 & \hat{\mathbf{R}}^{(i)} \end{bmatrix} \mathbf{K}^{(i)} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}}^{(i)} & \mathbf{O}_6 \\ \mathbf{O}_6 & \hat{\mathbf{R}}^{(i)} \end{bmatrix}^T, \quad i = 1, \dots, N_{\text{ele}}, \\
\mathbf{K}_{\text{gloII}}^{(i)} &= \hat{\mathbf{R}}^{(i)} \mathbf{K}_{II}^{(i)} \hat{\mathbf{R}}^{(i)T}, & \mathbf{K}_{\text{gloIJ}}^{(i)} &= \hat{\mathbf{R}}^{(i)} \mathbf{K}_{IJ}^{(i)} \hat{\mathbf{R}}^{(i)T}, \\
\mathbf{K}_{\text{gloJI}}^{(i)} &= \hat{\mathbf{R}}^{(i)} \mathbf{K}_{JI}^{(i)} \hat{\mathbf{R}}^{(i)T}, & \mathbf{K}_{\text{gloJJ}}^{(i)} &= \hat{\mathbf{R}}^{(i)} \mathbf{K}_{JJ}^{(i)} \hat{\mathbf{R}}^{(i)T}, \\
\hat{\mathbf{R}}^{(i)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{(i)} & \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{O}_3 & \mathbf{R}^{(i)} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{B-7}$$

ここで、 $\mathbf{R}^{(i)}$ は局所座標を全体座標に変換するための回転行列（要素番号 $i = 1, \dots, N_{\text{ele}}$ についての局所座標で記述される始端または終端の変位，角度，力またはモーメントのベクトル $\mathbf{u}_I^{(i)}$ ， $\mathbf{u}_J^{(i)}$ ， $\boldsymbol{\theta}_I^{(i)}$ ， $\boldsymbol{\theta}_J^{(i)}$ ， $\mathbf{f}_I^{(i)}$ ， $\mathbf{f}_J^{(i)}$ ， $\mathbf{m}_I^{(i)}$ ， $\mathbf{m}_J^{(i)}$ に左乗することで，それぞれ，同位置での全体座標で記述されるベクトル $\mathbf{u}_{n_I}^{(i)}$ ， $\mathbf{u}_{n_J}^{(i)}$ ， $\boldsymbol{\theta}_{n_I}^{(i)}$ ， $\boldsymbol{\theta}_{n_J}^{(i)}$ ， $\mathbf{f}_{n_I}^{(i)}$ ， $\mathbf{f}_{n_J}^{(i)}$ ， $\mathbf{m}_{n_I}^{(i)}$ ， $\mathbf{m}_{n_J}^{(i)}$ を導く 3×3 行列）であり，直管要素の両端を結ぶ線分および曲管要素の両端における二つの接線の交点と両端を結ぶ二つの線分を全体座標を基準とした空間ベクトルで表して内積と外積を考慮すること等によって作成できる．補足だが，今回の始端の局所座標 (ξ_I, η_I, ζ_I) と終端の局所座標 (ξ_J, η_J, ζ_J) は図 B-1 に示す通り同じ向きを向くものとして定義されているため，始端と終端に適用する座標変換のための回転行列 $\mathbf{R}^{(i)}$ は単一のものとなっている．別の定義によって局所座標を表現することも当然可能であるが，両端の局所座標が同じ向きを向かない場合，始端と終端に異なる回転行列を適用する必要がある．

これより，配管系単体の全体剛性行列 \mathbf{K}_{pip} （全節点の一般化変位ベクトル $\hat{\mathbf{u}}$ に左乗することで，復元力としての全節点の一般化力ベクトル $\hat{\mathbf{f}}$ を導くもの）は，次式となる．

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{\text{pip}} &= \sum_{i=1}^{N_{\text{ele}}} \left(\mathbf{K}_{\text{gloII}}^{(i)} \langle \mathbf{ind}_I^{(i)}, \mathbf{ind}_I^{(i)} \rangle + \mathbf{K}_{\text{gloIJ}}^{(i)} \langle \mathbf{ind}_I^{(i)}, \mathbf{ind}_J^{(i)} \rangle \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{K}_{\text{gloJI}}^{(i)} \langle \mathbf{ind}_J^{(i)}, \mathbf{ind}_I^{(i)} \rangle + \mathbf{K}_{\text{gloJJ}}^{(i)} \langle \mathbf{ind}_J^{(i)}, \mathbf{ind}_J^{(i)} \rangle \right), \\
\mathbf{ind}_I^{(i)} &= \hat{\mathbf{1}}_6 \begin{bmatrix} \delta_{1, n_I}^{(i)} \\ \delta_{2, n_I}^{(i)} \\ \vdots \\ \delta_{N_{\text{nod}}, n_I}^{(i)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{ind}_J^{(i)} = \hat{\mathbf{1}}_6 \begin{bmatrix} \delta_{1, n_J}^{(i)} \\ \delta_{2, n_J}^{(i)} \\ \vdots \\ \delta_{N_{\text{nod}}, n_J}^{(i)} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{1}}_6 = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_6 & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{1}_6 & \\ \mathbf{0} & & \underbrace{\ddots}_{N_{\text{nod}}} \\ & & \mathbf{1}_6 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{B-8}$$

集中質量行列を仮定した場合の直管および曲管の要素質量行列 \mathbf{M} （両端の一般化加速度ベクトル $\ddot{\mathbf{u}}_B = [\ddot{\mathbf{u}}_I^T \quad \ddot{\mathbf{u}}_J^T]^T$ に左乗することで、基礎静止時の両端の慣性力としての一般化力ベクトル $\hat{\mathbf{f}}_B = [\hat{\mathbf{f}}_I^T \quad \hat{\mathbf{f}}_J^T]^T$ を導くもの。直管または曲管であることを区別する必要がある際には、それぞれtanとbenの上付文字を記号に付けることにする）は、次式となる。

$$\mathbf{M}^{\text{tan}} := \mathbf{M} = \text{diag}\left(\frac{\rho AL}{2}, \frac{\rho AL}{2}, \frac{\rho AL}{2}, 0, 0, 0, \frac{\rho AL}{2}, \frac{\rho AL}{2}, \frac{\rho AL}{2}, 0, 0, 0\right) \quad (\text{B-9})$$

$$\mathbf{M}^{\text{ben}} := \mathbf{M} = \text{diag}\left(\frac{\rho AR\theta}{2}, \frac{\rho AR\theta}{2}, \frac{\rho AR\theta}{2}, 0, 0, 0, \frac{\rho AR\theta}{2}, \frac{\rho AR\theta}{2}, \frac{\rho AR\theta}{2}, 0, 0, 0\right) \quad (\text{B-10})$$

これらは、全ての要素について作成するものであり、どの要素番号についてのものかを明確にする必要がある場合は、 $\mathbf{M}^{(i)}, i = 1, \dots, N_{\text{ele}}$ と書くことにする。

詳細は省くが、整合質量行列を仮定した場合の要素質量行列 \mathbf{M} は、要素の運動エネルギーを立て、それをラグランジュの運動方程式に適用して慣性項を導出する作業等によって得られるものである。

集中質量行列と整合質量行列の別を問わず、局所座標に従って記述される $\mathbf{M}^{(i)}$ を全体座標に従って記述されるように座標変換すれば、次の質量行列 $\mathbf{M}_{\text{glo}}^{(i)}$ （ i 番目要素の始端節点番号 $n_I^{(i)}$ と終端節点番号 $n_J^{(i)}$ における節点での一般化加速度ベクトル $[\ddot{\mathbf{u}}_{n_I^{(i)}}^T \quad \ddot{\mathbf{u}}_{n_J^{(i)}}^T]^T$ に左乗することで、基礎静止時の同節点での慣性力としての一般化力ベクトル $[\hat{\mathbf{f}}_{n_I^{(i)}}^T \quad \hat{\mathbf{f}}_{n_J^{(i)}}^T]^T$ を導くもの）が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\text{glo}}^{(i)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\text{gloII}}^{(i)} & \mathbf{M}_{\text{gloIJ}}^{(i)} \\ \mathbf{M}_{\text{gloJI}}^{(i)} & \mathbf{M}_{\text{gloJJ}}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}}^{(i)} & \mathbf{O}_6 \\ \mathbf{O}_6 & \hat{\mathbf{R}}^{(i)} \end{bmatrix} \mathbf{M}^{(i)} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}}^{(i)} & \mathbf{O}_6 \\ \mathbf{O}_6 & \hat{\mathbf{R}}^{(i)} \end{bmatrix}^T, \quad i = 1, \dots, N_{\text{ele}}, \\ \mathbf{M}_{\text{gloII}}^{(i)} &= \hat{\mathbf{R}}^{(i)} \mathbf{M}_{II}^{(i)} \hat{\mathbf{R}}^{(i)T}, & \mathbf{M}_{\text{gloIJ}}^{(i)} &= \hat{\mathbf{R}}^{(i)} \mathbf{M}_{IJ}^{(i)} \hat{\mathbf{R}}^{(i)T}, \\ \mathbf{M}_{\text{gloJI}}^{(i)} &= \hat{\mathbf{R}}^{(i)} \mathbf{M}_{JI}^{(i)} \hat{\mathbf{R}}^{(i)T}, & \mathbf{M}_{\text{gloJJ}}^{(i)} &= \hat{\mathbf{R}}^{(i)} \mathbf{M}_{JJ}^{(i)} \hat{\mathbf{R}}^{(i)T}, \end{aligned} \quad (\text{B-11})$$

$\hat{\mathbf{R}}^{(i)}$: 式(B-7)参照のこと

これより、配管系単体の全体質量行列 \mathbf{M}_{pip} （全節点の一般化絶対加速度ベクトル $\ddot{\mathbf{w}} = \ddot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{w}}_g$ に左乗することで、基礎運動時の慣性力としての全節点の一般化力ベクトル $\hat{\mathbf{f}}$ を導くもの）は、次式となる。

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{\text{pip}} &= \sum_{i=1}^{N_{\text{ele}}} \left(\mathbf{M}_{\text{glo}II}^{(i)} \langle \mathbf{ind}_I^{(i)}, \mathbf{ind}_I^{(i)} \rangle + \mathbf{M}_{\text{glo}IJ}^{(i)} \langle \mathbf{ind}_I^{(i)}, \mathbf{ind}_J^{(i)} \rangle \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{M}_{\text{glo}JI}^{(i)} \langle \mathbf{ind}_J^{(i)}, \mathbf{ind}_I^{(i)} \rangle + \mathbf{M}_{\text{glo}JJ}^{(i)} \langle \mathbf{ind}_J^{(i)}, \mathbf{ind}_J^{(i)} \rangle \right), \\
&\quad \mathbf{ind}_I^{(i)}, \mathbf{ind}_J^{(i)} : \text{式(B-8)参照のこと}
\end{aligned} \tag{B-12}$$

上式は、要素質量行列は \mathbf{M} が集中質量行列である場合、その \mathbf{M} の0である成分の存在と必ず $\mathbf{M}_{\text{glo}}^{(i)} = \mathbf{M}^{(i)}$ となる事実により、次の単純化した式に書き換えられる。

$$\mathbf{M}_{\text{pip}} = \sum_{i=1}^{N_{\text{ele}}} \left(\mathbf{M}_{II}^{(i)} \langle \mathbf{ind}_I^{(i)}, \mathbf{ind}_I^{(i)} \rangle + \mathbf{M}_{JJ}^{(i)} \langle \mathbf{ind}_J^{(i)}, \mathbf{ind}_J^{(i)} \rangle \right) \tag{B-13}$$

これより、配管系単体の系全体の運動方程式は、全節点の一般化変位ベクトル $\hat{\mathbf{u}}$ を用いて次のように表現できる。

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{\text{pip}}(\ddot{\hat{\mathbf{u}}} + \ddot{\hat{\mathbf{w}}}_g) + \mathbf{K}_{\text{pip}}\hat{\mathbf{u}} &= \mathbf{0}_{6N_{\text{nod}}} \\
\therefore \mathbf{M}_{\text{pip}}\ddot{\hat{\mathbf{u}}} + \mathbf{K}_{\text{pip}}\hat{\mathbf{u}} &= -\mathbf{M}_{\text{pip}}\ddot{\hat{\mathbf{w}}}_g \\
&= -\mathbf{M}_{\text{pip}}(\mathbf{e}_x\ddot{w}_{x0} + \mathbf{e}_y\ddot{w}_{y0} + \mathbf{e}_z\ddot{w}_{z0})
\end{aligned} \tag{B-14}$$

配管系には、何らかの支持物やバルブ等の慣性を増加させるような付加物が存在する場合があります、これらを考慮した追加すべき剛性行列 \mathbf{K}_{add} と質量行列 \mathbf{M}_{add} を用いれば、運動方程式は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{\text{all}}\ddot{\hat{\mathbf{u}}} + \mathbf{K}_{\text{all}}\hat{\mathbf{u}} &= -\mathbf{M}_{\text{all}}(\mathbf{e}_x\ddot{w}_{x0} + \mathbf{e}_y\ddot{w}_{y0} + \mathbf{e}_z\ddot{w}_{z0}), \\
\mathbf{M}_{\text{all}} &= \mathbf{M}_{\text{pip}} + \mathbf{M}_{\text{add}}, \quad \mathbf{K}_{\text{all}} = \mathbf{K}_{\text{pip}} + \mathbf{K}_{\text{add}}
\end{aligned} \tag{B-15}$$

ここで、 \mathbf{K}_{add} と \mathbf{M}_{add} の具体的な作成について考えよう。計算の上で考慮すべき配管系に適用される並進または回転のばね要素が N_{spr} 個あり、 $i = 1, \dots, N_{\text{spr}}$ 番目の並進または回転のばねが接続される節点の節点番号を $n_{\text{nodspr}}^{(i)}$ とする。また、各ばね要素の取付姿勢を方向余弦（並進ばねの軸方向もしくは回転ばねの回転中心方向と全体座標 (x, y, z) の各軸方向とのなす角に関するもの） $\alpha_{\text{spr}}^{(i)}$, $\beta_{\text{spr}}^{(i)}$, $\gamma_{\text{spr}}^{(i)}$ で表し、配管系の変形時の動作範囲は静止時の動作点の近傍であることが多く、各ばねの要素の取付姿勢は静止時から大きく乖離しない、すなわち、一定であると仮定する。これより、次の \mathbf{K}_{pip} に加算するための線形な剛性行列 \mathbf{K}_{add} が得られる。

$$\mathbf{K}_{\text{add}} = \sum_{i=1}^{N_{\text{spr}}} \left((k_{\text{spr}}^{(i)} \mathbf{dircos}_{\text{spr}}^{(i)} \mathbf{dircos}_{\text{spr}}^{(i)T}) \langle \mathbf{ind}_{\text{spr}}^{(i)}, \mathbf{ind}_{\text{spr}}^{(i)} \rangle \right), \quad \mathbf{dircos}_{\text{spr}}^{(i)} = \begin{bmatrix} \alpha_{\text{spr}}^{(i)} \\ \beta_{\text{spr}}^{(i)} \\ \gamma_{\text{spr}}^{(i)} \end{bmatrix}, \quad (\text{B-16})$$

$$\mathbf{ind}_{\text{spr}}^{(i)} = \hat{\mathbf{b}} \begin{bmatrix} \delta_{1, n_{\text{nod}}^{(i)}} \\ \delta_{2, n_{\text{nod}}^{(i)}} \\ \vdots \\ \delta_{N_{\text{nod}}, n_{\text{nod}}^{(i)}} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{b} \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{b} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix}, & k_{\text{spr}}^{(i)} \text{が並進ばねの場合} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{1}_3 \end{bmatrix}, & k_{\text{spr}}^{(i)} \text{が回転ばねの場合} \end{cases}$$

ここで、 $k_{\text{spr}}^{(i)}$ は $i = 1, \dots, N_{\text{spr}}$ 番目の並進または回転のばねの剛性である。また、配管系に付加される慣性の要素（質量と慣性モーメントの組）が存在し、それらが付加される節点が N_{mas} 個あり、 $i = 1, \dots, N_{\text{mas}}$ 番目の慣性の要素が付加される節点の節点番号を $n_{\text{nodmas}}^{(i)}$ とすれば、次の \mathbf{M}_{pip} に加算するための対角な質量行列 \mathbf{M}_{add} が得られる。

$$\mathbf{M}_{\text{add}} = \sum_{i=1}^{N_{\text{mas}}} \left(\text{diag}(m^{(i)}, m^{(i)}, m^{(i)}, I_{mx}^{(i)}, I_{my}^{(i)}, I_{mz}^{(i)}) \langle \mathbf{ind}_{\text{mas}}^{(i)}, \mathbf{ind}_{\text{mas}}^{(i)} \rangle \right),$$

$$\mathbf{ind}_{\text{mas}}^{(i)} = \hat{\mathbf{1}}_6 \begin{bmatrix} \delta_{1, n_{\text{nodmas}}^{(i)}} \\ \delta_{2, n_{\text{nodmas}}^{(i)}} \\ \vdots \\ \delta_{N_{\text{nod}}, n_{\text{nodmas}}^{(i)}} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{1}}_6 = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_6 & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{1}_6 & \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{1}_6 \end{bmatrix} \quad (\text{B-17})$$

ここで、 $m^{(i)}$, $I_{mx}^{(i)}$, $I_{my}^{(i)}$, $I_{mz}^{(i)}$ はそれぞれ付加される質量と慣性モーメント（下付文字 x , y , z は、どの軸に関するものであるのかを表す。なお、質量 $m^{(i)}$ に対しては、それが明らかに x , y , z の 3 軸で同一であるという意味で下付文字を付けていない）である。慣性モーメントについては、付加される物体を近似的に配管の直管と曲管の組合せで表現することで便宜上その部分も配管であるとみなして配管系単体の剛性行列と質量行列によってモデル化する、もしくは、そもそも値が小さく無視できると考える等により、一律 $\mathbf{0}$ として取り扱われることがある。その場合は次式となる。

$$\mathbf{M}_{\text{add}} = \sum_{i=1}^{N_{\text{mas}}} \left(\text{diag}(m^{(i)}, m^{(i)}, m^{(i)}, 0, 0, 0) \langle \mathbf{ind}_{\text{mas}}^{(i)}, \mathbf{ind}_{\text{mas}}^{(i)} \rangle \right) \quad (\text{B-18})$$

本付録では、煩雑さを避けるため、追加される質量行列 \mathbf{M}_{add} の算出は、慣性モーメントを無視したモデル化である式(B-18)の使用を前提とし、これに対応した計算式だけを以降で明示する。一方の式(B-17)の使用を前提とした場合については、ここで明示しないが、同様の検討によれば容易に理解されると考える。

境界条件を考慮すれば、式(B-15)の運動方程式は、 $\hat{\mathbf{u}}$ の代わりにそこから常に0である成分を除外した一般化変位ベクトル $\hat{\mathbf{u}}_{\text{free}} = \hat{\mathbf{u}}\{\text{ind}_{\hat{\mathbf{u}}_{\text{free}}}\}$ を用いた次式となる。

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\text{bou}} \ddot{\hat{\mathbf{u}}}_{\text{free}} + \mathbf{K}_{\text{bou}} \hat{\mathbf{u}}_{\text{free}} &= -\mathbf{M}_{\text{bou}} (\mathbf{e}_{x\text{bou}} \ddot{w}_{x0} + \mathbf{e}_{y\text{bou}} \ddot{w}_{y0} + \mathbf{e}_{z\text{bou}} \ddot{w}_{z0}), \\ \mathbf{M}_{\text{bou}} &= \mathbf{M}_{\text{all}}\{\text{ind}_{\hat{\mathbf{u}}_{\text{free}}}, \text{ind}_{\hat{\mathbf{u}}_{\text{free}}}\}, \quad \mathbf{K}_{\text{bou}} = \mathbf{K}_{\text{all}}\{\text{ind}_{\hat{\mathbf{u}}_{\text{free}}}, \text{ind}_{\hat{\mathbf{u}}_{\text{free}}}\}, \\ \mathbf{e}_{x\text{bou}} &= \mathbf{e}_x\{\text{ind}_{\hat{\mathbf{u}}_{\text{free}}}\}, \quad \mathbf{e}_{y\text{bou}} = \mathbf{e}_y\{\text{ind}_{\hat{\mathbf{u}}_{\text{free}}}\}, \quad \mathbf{e}_{z\text{bou}} = \mathbf{e}_z\{\text{ind}_{\hat{\mathbf{u}}_{\text{free}}}\} \end{aligned} \quad (\text{B-19})$$

要素質量行列 \mathbf{M} が整合質量行列である場合、上記運動方程式が、直接的に解くべき振動問題（固有振動数，モード関数，一般化変位の応答等を求めるための問題という意味）となる。一方，要素質量行列 \mathbf{M} が集中質量行列である場合は，その非対角成分は全て0であり，また，回転の自由度に対応する主対角成分も0であり， \mathbf{M}_{bou} は明らかに特異であるため，上記運動方程式を直接的に振動問題を解く対象として扱うことができない。

そのような場合のために，式の変形を考えよう。一般化変位ベクトル $\hat{\mathbf{u}}_{\text{free}}$ と同じ成分からなるが成分の順番が異なるベクトル $[\mathbf{u}_{\text{free}}^T \ \boldsymbol{\theta}_{\text{free}}^T]^T = [\hat{\mathbf{u}}\{\text{ind}_{\mathbf{u}_{\text{free}}}\}^T \ \hat{\mathbf{u}}\{\text{ind}_{\boldsymbol{\theta}_{\text{free}}}\}^T]^T$ で表記する式(B-19)と同様な意味を持つ運動方程式は，接続ベクトルの回転の自由度に関する成分が全て0であることを考慮すれば，次式となる。

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\text{bou}'} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{\text{free}} \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{free}} \end{bmatrix} + \mathbf{K}_{\text{bou}'} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\text{free}} \\ \boldsymbol{\theta}_{\text{free}} \end{bmatrix} &= -\mathbf{M}_{\text{bou}'} (\mathbf{e}_{x\text{bou}'} \ddot{w}_{x0} + \mathbf{e}_{y\text{bou}'} \ddot{w}_{y0} + \mathbf{e}_{z\text{bou}'} \ddot{w}_{z0}), \\ \mathbf{M}_{\text{bou}'} &:= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\text{bou}'TT} & \mathbf{M}_{\text{bou}'TR} \\ \mathbf{M}_{\text{bou}'RT} & \mathbf{M}_{\text{bou}'RR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\text{all}}\{\text{ind}_{\mathbf{u}_{\text{free}}}, \text{ind}_{\mathbf{u}_{\text{free}}}\} & \mathbf{M}_{\text{all}}\{\text{ind}_{\mathbf{u}_{\text{free}}}, \text{ind}_{\boldsymbol{\theta}_{\text{free}}}\} \\ \mathbf{M}_{\text{all}}\{\text{ind}_{\boldsymbol{\theta}_{\text{free}}}, \text{ind}_{\mathbf{u}_{\text{free}}}\} & \mathbf{M}_{\text{all}}\{\text{ind}_{\boldsymbol{\theta}_{\text{free}}}, \text{ind}_{\boldsymbol{\theta}_{\text{free}}}\} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}_{\text{bou}'} &:= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{bou}'TT} & \mathbf{K}_{\text{bou}'TR} \\ \mathbf{K}_{\text{bou}'RT} & \mathbf{K}_{\text{bou}'RR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{all}}\{\text{ind}_{\mathbf{u}_{\text{free}}}, \text{ind}_{\mathbf{u}_{\text{free}}}\} & \mathbf{K}_{\text{all}}\{\text{ind}_{\mathbf{u}_{\text{free}}}, \text{ind}_{\boldsymbol{\theta}_{\text{free}}}\} \\ \mathbf{K}_{\text{all}}\{\text{ind}_{\boldsymbol{\theta}_{\text{free}}}, \text{ind}_{\mathbf{u}_{\text{free}}}\} & \mathbf{K}_{\text{all}}\{\text{ind}_{\boldsymbol{\theta}_{\text{free}}}, \text{ind}_{\boldsymbol{\theta}_{\text{free}}}\} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{e}_{x\text{bou}'} &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x\{\text{ind}_{\mathbf{u}_{\text{free}}}\} \\ \mathbf{0}_{N_{\boldsymbol{\theta}_{\text{free}}}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_{y\text{bou}'} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_y\{\text{ind}_{\mathbf{u}_{\text{free}}}\} \\ \mathbf{0}_{N_{\boldsymbol{\theta}_{\text{free}}}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_{z\text{bou}'} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_z\{\text{ind}_{\mathbf{u}_{\text{free}}}\} \\ \mathbf{0}_{N_{\boldsymbol{\theta}_{\text{free}}}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B-20})$$

ここで， $\mathbf{M}_{\text{bou}'}$ は，要素質量行列 \mathbf{M} が集中質量行列である場合は，次の簡単な形になる。

$$\mathbf{M}_{\text{bou}'} := \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\text{bou}'TT} & \mathbf{0}_{N_{\text{ufree}} \times N_{\theta\text{free}}} \\ \mathbf{0}_{N_{\theta\text{free}} \times N_{\text{ufree}}} & \mathbf{0}_{N_{\theta\text{free}} \times N_{\theta\text{free}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\text{all}}\{\mathbf{ind}_{\text{ufree}}, \mathbf{ind}_{\text{ufree}}\} & \mathbf{0}_{N_{\text{ufree}} \times N_{\theta\text{free}}} \\ \mathbf{0}_{N_{\theta\text{free}} \times N_{\text{ufree}}} & \mathbf{0}_{N_{\theta\text{free}} \times N_{\theta\text{free}}} \end{bmatrix} \quad (\text{B-21})$$

式(B-20)と式(B-21)を考慮すれば、次の回転角ベクトル $\boldsymbol{\theta}_{\text{free}}$ を含まず変位ベクトル \mathbf{u}_{free} のみで表現される自由度が縮小された (reduced) 運動方程式、および、変位ベクトル \mathbf{u}_{free} と回転角ベクトル $\boldsymbol{\theta}_{\text{free}}$ の関係式が得られる[8].

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\text{red}}\ddot{\mathbf{u}}_{\text{free}} + \mathbf{K}_{\text{red}}\mathbf{u}_{\text{free}} &= -\mathbf{M}_{\text{red}}(\mathbf{e}_{x\text{red}}\ddot{w}_{x0} + \mathbf{e}_{y\text{red}}\ddot{w}_{y0} + \mathbf{e}_{z\text{red}}\ddot{w}_{z0}), \\ \mathbf{M}_{\text{red}} &= \mathbf{M}_{\text{bou}'TT}, \quad \mathbf{K}_{\text{red}} = \mathbf{K}_{\text{bou}'TT} - \mathbf{K}_{\text{bou}'TR}\mathbf{K}_{\text{bou}'RR}^{-1}\mathbf{K}_{\text{bou}'RT}, \\ \mathbf{e}_{x\text{red}} &= \mathbf{e}_x\{\mathbf{ind}_{\text{ufree}}\}, \quad \mathbf{e}_{y\text{red}} = \mathbf{e}_y\{\mathbf{ind}_{\text{ufree}}\}, \quad \mathbf{e}_{z\text{red}} = \mathbf{e}_z\{\mathbf{ind}_{\text{ufree}}\} \end{aligned} \quad (\text{B-22})$$

$$\boldsymbol{\theta}_{\text{free}} = -\mathbf{K}_{\text{bou}'RR}^{-1}\mathbf{K}_{\text{bou}'RT}\mathbf{u}_{\text{free}} \quad (\text{B-23})$$

要素質量行列 \mathbf{M} が集中質量行列である場合、上記の運動方程式が、直接的に解くべき振動問題となる。運動方程式(B-22)を解くことで得られる変位ベクトル \mathbf{u}_{free} を関係式(B-23)に代入すれば、回転角ベクトル $\boldsymbol{\theta}_{\text{free}}$ が解かれる。

式(B-19)によって $\hat{\mathbf{u}}_{\text{free}}$ が、もしくは、式(B-22)と式(B-23)によって \mathbf{u}_{free} と $\boldsymbol{\theta}_{\text{free}}$ が既知となり、また、拘束された自由度の一般化変位が0 (境界条件) であることを併せて考えれば、この時点で、全ての節点の一般化変位が既知となる。これより、解としての全節点の一般化変位ベクトル $\hat{\mathbf{u}}$ は、次のベクトル成分の再配置の操作を意味する式によって作成できる。

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 \\ \hat{\mathbf{u}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}_{N_{\text{nod}}} \end{bmatrix} = \begin{cases} \hat{\mathbf{u}}_{\text{free}}\langle \mathbf{ind}_{\hat{\mathbf{u}}_{\text{free}}} \rangle & , \mathbf{M} \text{が整合質量行列の場合} \\ \mathbf{u}_{\text{free}}\langle \mathbf{ind}_{\text{ufree}} \rangle + \boldsymbol{\theta}_{\text{free}}\langle \mathbf{ind}_{\theta\text{free}} \rangle & , \mathbf{M} \text{が集中質量行列の場合} \end{cases} \quad (\text{B-24})$$

ここで、 $\hat{\mathbf{u}}_j$ は $j = 1, \dots, N_{\text{nod}}$ 番目節点の一般化変位を意味するベクトルである。

これより、解としての $i = 1, \dots, N_{\text{ele}}$ 番目要素の両端の一般化変位ベクトル $\hat{\mathbf{u}}_B^{(i)}$ は次式で与えられる。

$$\hat{\mathbf{u}}_B^{(i)} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_l^{(i)} \\ \hat{\mathbf{u}}_j^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}}^{(i)} & \mathbf{0}_6 \\ \mathbf{0}_6 & \hat{\mathbf{R}}^{(i)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{n_l^{(i)}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{n_j^{(i)}} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, N_{\text{ele}}, \quad (\text{B-25})$$

$\hat{\mathbf{R}}^{(i)}$: 式(B-7)参照のこと

これより、解としての $i = 1, \dots, N_{\text{ele}}$ 番目要素の両端の一般化力ベクトル $\hat{\mathbf{f}}_B^{(i)}$ は次式で与えられる。

$$\hat{\mathbf{f}}_B^{(i)} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_I^{(i)} \\ \hat{\mathbf{f}}_J^{(i)} \end{bmatrix} = \mathbf{K}^{(i)} \hat{\mathbf{u}}_B^{(i)}, \quad i = 1, \dots, N_{\text{ele}} \quad (\text{B-26})$$

これより、図 B-2 に示す両端の部材座標 $(\xi_{I_{\text{eva}}}, \eta_{I_{\text{eva}}}, \zeta_{I_{\text{eva}}})$ と $(\xi_{J_{\text{eva}}}, \eta_{J_{\text{eva}}}, \zeta_{J_{\text{eva}}})$ に従った、 $i = 1, \dots, N_{\text{ele}}$ 番目要素の両端の一般化力ベクトル $\hat{\mathbf{f}}_{B_{\text{eva}}}^{(i)}$ は次式で与えられる。

$$\hat{\mathbf{f}}_{B_{\text{eva}}}^{(i)} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_{I_{\text{eva}}}^{(i)} \\ \hat{\mathbf{f}}_{J_{\text{eva}}}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_6 & \mathbf{0}_6 \\ \mathbf{0}_6 & \hat{\mathbf{R}}_{J_{\text{eva}}}^{(i)} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_B^{(i)}, \quad i = 1, \dots, N_{\text{ele}},$$

$$\hat{\mathbf{R}}_{J_{\text{eva}}}^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{J_{\text{eva}}}^{(i)} & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{R}_{J_{\text{eva}}}^{(i)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{J_{\text{eva}}}^{(i)} = \begin{cases} \mathbf{I}_3 & , \text{直管の場合} \\ \begin{bmatrix} \cos \theta^{(i)} & \sin \theta^{(i)} & 0 \\ -\sin \theta^{(i)} & \cos \theta^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & , \text{曲管の場合} \end{cases} \quad (\text{B-27})$$

上記のベクトルの各成分は、引張力、剪断力、振りモーメント、曲げモーメントの意味があり、それらを明示するために、次のように展開して表す。

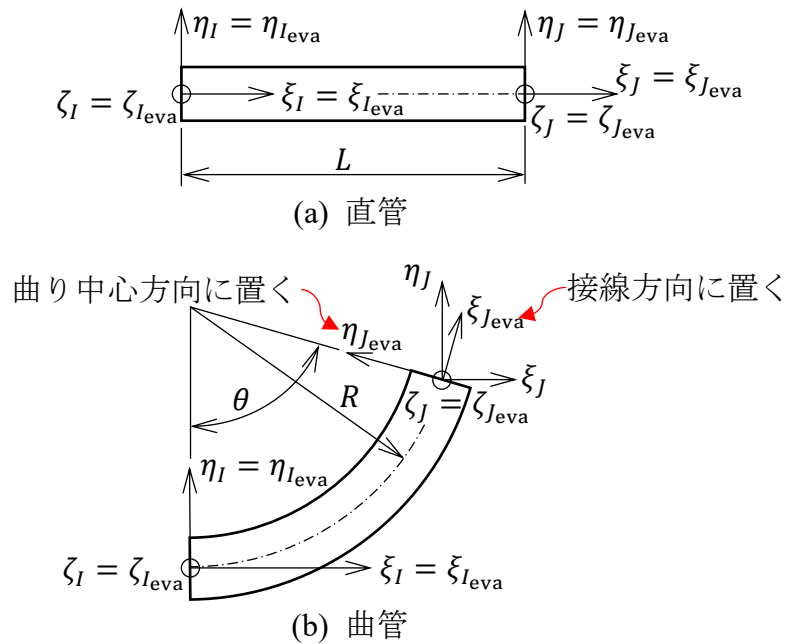


図 B-2 直管と曲管の要素およびその始端と終端での部材座標の定義ならびに部材座標と局所座標の関係（部材座標： I_{eva} と J_{eva} が付くもの、局所座標： I と J が付くもの）

$$\begin{bmatrix} f_{I_{\text{ten}}}^{(i)} \\ f_{I_{s1}}^{(i)} \\ f_{I_{s2}}^{(i)} \\ m_{I_{\text{tor}}}^{(i)} \\ m_{I_{b1}}^{(i)} \\ m_{I_{b2}}^{(i)} \end{bmatrix} := \hat{\mathbf{f}}_{I_{\text{eva}}}^{(i)}, \quad \begin{bmatrix} f_{J_{\text{ten}}}^{(i)} \\ f_{J_{s1}}^{(i)} \\ f_{J_{s2}}^{(i)} \\ m_{J_{\text{tor}}}^{(i)} \\ m_{J_{b1}}^{(i)} \\ m_{J_{b2}}^{(i)} \end{bmatrix} := \hat{\mathbf{f}}_{J_{\text{eva}}}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, N_{\text{ele}} \quad (\text{B-28})$$

上記 $\hat{\mathbf{f}}_{I_{\text{eva}}}^{(i)}$ と $\hat{\mathbf{f}}_{J_{\text{eva}}}^{(i)}$ の各成分は、上から、部材の引張、剪断（2方向分）、振り、曲げ（2方向分）を表す一般化力であり、これらを用い、材料力学的考察や各種設計コードに照らし合わせるにより配管系の管の健全性の評価が行われる。実務的な配管系の設計では、上記成分の内、モーメントの成分だけもしくは剪断以外の成分が具体的な評価対象として取り扱われる場合が多い。

また、既知となった各節点の一般化変位ベクトル $\hat{\mathbf{u}}_j = [\mathbf{u}_j^T \ \boldsymbol{\theta}_j^T]^T$, $j = 1, \dots, N_{\text{nod}}$ より、各ばね取付節点の変位と回転角のベクトル $\mathbf{u}_{n_{\text{nodspr}}}^{(i)}$, $\boldsymbol{\theta}_{n_{\text{nodspr}}}^{(i)}$ が既知となるため、並進または回転のばね支持部の全て反力または反モーメントからなるベクトル $(\mathbf{f}|\mathbf{m})_{\text{spr}}$ は、次式によって求められる。

$$(\mathbf{f}|\mathbf{m})_{\text{spr}} = \begin{bmatrix} f_{\text{spr}}^{(1)} \text{ or } m_{\text{spr}}^{(1)} \\ f_{\text{spr}}^{(2)} \text{ or } m_{\text{spr}}^{(2)} \\ \vdots \\ f_{\text{spr}}^{(N_{\text{spr}})} \text{ or } m_{\text{spr}}^{(N_{\text{spr}})} \end{bmatrix}, \quad (\text{B-29})$$

$$f_{\text{spr}}^{(i)} \text{ or } m_{\text{spr}}^{(i)} = \begin{cases} k_{\text{spr}}^{(i)} \mathbf{u}_{\text{spr}}^{(i)} = k_{\text{spr}}^{(i)} \mathbf{dircos}_{\text{spr}}^{(i)T} \mathbf{u}_{n_{\text{nodspr}}}^{(i)}, & k_{\text{spr}}^{(i)} \text{ が並進ばねの場合} \\ k_{\text{spr}}^{(i)} \boldsymbol{\theta}_{\text{spr}}^{(i)} = k_{\text{spr}}^{(i)} \mathbf{dircos}_{\text{spr}}^{(i)T} \boldsymbol{\theta}_{n_{\text{nodspr}}}^{(i)}, & k_{\text{spr}}^{(i)} \text{ が回転ばねの場合} \end{cases}$$

$$\mathbf{u}_{n_{\text{nodspr}}}^{(i)} \text{ or } \boldsymbol{\theta}_{n_{\text{nodspr}}}^{(i)} = \begin{cases} \hat{\mathbf{u}}_{n_{\text{nodspr}}}^{(i)} \begin{Bmatrix} \mathbf{1}_3 \\ \mathbf{0}_3 \end{Bmatrix} = [\mathbf{I}_3 \ \mathbf{0}_3] \hat{\mathbf{u}}_{n_{\text{nodspr}}}^{(i)}, & k_{\text{spr}}^{(i)} \text{ が並進ばねの場合} \\ \hat{\mathbf{u}}_{n_{\text{nodspr}}}^{(i)} \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{1}_3 \end{Bmatrix} = [\mathbf{0}_3 \ \mathbf{I}_3] \hat{\mathbf{u}}_{n_{\text{nodspr}}}^{(i)}, & k_{\text{spr}}^{(i)} \text{ が回転ばねの場合} \end{cases}$$

ここで、 $\mathbf{u}_{\text{spr}}^{(i)}$ と $\boldsymbol{\theta}_{\text{spr}}^{(i)}$ は、それぞれ、 i 番目 ($i = 1, \dots, N_{\text{spr}}$) の並進と回転のばねの取付節点の変位または回転角のベクトル $\mathbf{u}_{n_{\text{nodspr}}}^{(i)} = [\mathbf{u}_{xn_{\text{nodspr}}}^{(i)} \ \mathbf{u}_{yn_{\text{nodspr}}}^{(i)} \ \mathbf{u}_{zn_{\text{nodspr}}}^{(i)}]^T$ と

$\boldsymbol{\theta}_{n_{\text{nodspr}}^{(i)}} = [\theta_{xn_{\text{nodspr}}^{(i)}} \quad \theta_{yn_{\text{nodspr}}^{(i)}} \quad \theta_{zn_{\text{nodspr}}^{(i)}}]^T$ に方向余弦を適用することで求められる取付方向成分としての変位と回転角であり、各ばねの変形量を意味する。また、上式は $\mathbf{u}_{\text{spr}}^{(i)}$ または $\boldsymbol{\theta}_{\text{spr}}^{(i)}$ を $i = 1, \dots, N_d$ の順に集めたベクトル $(\mathbf{u}|\boldsymbol{\theta})_{\text{spr}}$ を用いれば次のように表すこともできる。

$$(\mathbf{f}|\mathbf{m})_{\text{spr}} = \begin{bmatrix} f_{\text{spr}}^{(1)} \text{ or } m_{\text{spr}}^{(1)} \\ f_{\text{spr}}^{(2)} \text{ or } m_{\text{spr}}^{(2)} \\ \vdots \\ f_{\text{spr}}^{(N_{\text{spr}})} \text{ or } m_{\text{spr}}^{(N_{\text{spr}})} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_{\text{spr}} (\mathbf{u}|\boldsymbol{\theta})_{\text{spr}}, \quad (\mathbf{u}|\boldsymbol{\theta})_{\text{spr}} = \begin{bmatrix} u_{\text{spr}}^{(1)} \text{ or } m_{\text{spr}}^{(1)} \\ u_{\text{spr}}^{(2)} \text{ or } m_{\text{spr}}^{(2)} \\ \vdots \\ u_{\text{spr}}^{(N_{\text{spr}})} \text{ or } m_{\text{spr}}^{(N_{\text{spr}})} \end{bmatrix}, \quad (\text{B-30})$$

$$\mathbf{K}_{\text{spr}} = \text{diag}(k_{\text{spr}}^{(1)}, k_{\text{spr}}^{(2)}, \dots, k_{\text{spr}}^{(N_{\text{spr}})})$$

上記 $(\mathbf{f}|\mathbf{m})_{\text{spr}}$ の各成分であるレストレイント等による各ばね支持部の反力または反モーメントをその仕様としての許容値と比較することで設置されるばねの健全性の評価が行われる。

次に、前述の直管と曲管の要素と追加される集中質量とばねからなる系に対して、更に N_d 台の IMD を設置した配管系のモデルについて考える。この場合は、IMD を設置していない前述の系の場合に対して、自由度が N_d 個増加することに注意しなければならない。今、各 IMD の慣性質量とそれに直列接続される剛性との中間点の基礎との相対変位を $u_e^{(i)}$, $i = 1, \dots, N_d$ とし、そのベクトルを $\mathbf{u}_e = [u_e^{(1)} \quad u_e^{(2)} \quad \dots \quad u_e^{(N_d)}]^T$ と表せば、式(B-15)での質量行列 $\mathbf{M}_{\text{all}} = \mathbf{M}_{\text{pip}} + \mathbf{M}_{\text{add}}$, 剛性行列 $\mathbf{K}_{\text{all}} = \mathbf{K}_{\text{pip}} + \mathbf{K}_{\text{add}}$, 接続ベクトル $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, 全節点の一般化変位ベクトル $\hat{\mathbf{u}}$ を用いて記述される配管系に対して IMD を追加したモデルは、拡張した一般化変位ベクトル $\tilde{\mathbf{u}} = [\hat{\mathbf{u}}^T \quad \mathbf{u}_e^T]^T$ を用いて次の運動方程式によって表現できる。

$$\tilde{\mathbf{M}}_{\text{all}} \ddot{\tilde{\mathbf{u}}} + \tilde{\mathbf{K}}_{\text{all}} \tilde{\mathbf{u}} = -\tilde{\mathbf{M}}_{\text{all}} (\tilde{\mathbf{e}}_x \ddot{w}_{x0} + \tilde{\mathbf{e}}_y \ddot{w}_{y0} + \tilde{\mathbf{e}}_z \ddot{w}_{z0}),$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_{\text{all}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\text{all}} & \mathbf{0}_{6N_{\text{nod}} \times N_d} \\ \mathbf{0}_{N_d \times 6N_{\text{nod}}} & \mathbf{M}_e \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{K}}_{\text{all}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{all}} + \mathbf{K}_s & \mathbf{K}_{se} \\ \mathbf{K}_{es} & \mathbf{K}_e \end{bmatrix}, \quad (\text{B-31})$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{0}_{N_d} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{e}}_y = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_y \\ \mathbf{0}_{N_d} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{e}}_z = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{0}_{N_d} \end{bmatrix}$$

ここで、 \mathbf{M}_e は $i = 1, \dots, N_d$ 台ある IMD の慣性質量 $m_e^{(i)}$ に、 $\mathbf{K}_e, \mathbf{K}_s, \mathbf{K}_{se}, \mathbf{K}_{es}$ は $m_e^{(i)}$ に直列接続される剛性 $k_e^{(i)}$ とその取付姿勢を表現する方向余弦（取付方向と全体座標 (x, y, z) の各軸方向とのなす角に関するもの） $\alpha_d^{(i)}, \beta_d^{(i)}, \gamma_d^{(i)}$ に、それぞれ依存して決

定される行列であり，以降の式で与えられる．なお，IMD の取付姿勢は，式(B-16)におけるばね要素の取付姿勢と同様に一定であると仮定している．

$$\mathbf{M}_e = \text{diag}\left(m_e^{(1)}, m_e^{(2)}, \dots, m_e^{(N_d)}\right) \quad (\text{B-32})$$

$$\mathbf{K}_e = \text{diag}\left(k_e^{(1)}, k_e^{(2)}, \dots, k_e^{(N_d)}\right) \quad (\text{B-33})$$

$$\mathbf{K}_s = \sum_{i=1}^{N_d} \left((k_e^{(i)} \mathbf{dircos}_d^{(i)} \mathbf{dircos}_d^{(i)T}) \langle \mathbf{ind}_s^{(i)}, \mathbf{ind}_s^{(i)} \rangle \right), \quad \mathbf{dircos}_d^{(i)} = \begin{bmatrix} \alpha_d^{(i)} \\ \beta_d^{(i)} \\ \gamma_d^{(i)} \end{bmatrix}, \quad (\text{B-34})$$

$$\mathbf{ind}_s^{(i)} = \hat{\mathbf{b}}_s \begin{bmatrix} \delta_{1, n_{\text{nod}}}^{(i)} \\ \delta_{2, n_{\text{nod}}}^{(i)} \\ \vdots \\ \delta_{N_{\text{nod}}, n_{\text{nod}}}^{(i)} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{b}}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_s & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{b}_s & \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{b}_s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix}$$

もしくは，

$$\mathbf{K}_s = \sum_{i=1}^{N_d} \left(k_e^{(i)} \mathbf{dircos}_d^{(i)} \langle \mathbf{ind}_s^{(i)} \rangle \mathbf{dircos}_d^{(i)} \langle \mathbf{ind}_s^{(i)} \rangle^T \right) = \mathbf{C}_p \mathbf{K}_e \mathbf{C}_p^T, \quad (\text{B-35})$$

$$\mathbf{C}_p = [\mathbf{dircos}_d^{(1)} \langle \mathbf{ind}_s^{(1)} \rangle \quad \mathbf{dircos}_d^{(2)} \langle \mathbf{ind}_s^{(2)} \rangle \quad \dots \quad \mathbf{dircos}_d^{(N_d)} \langle \mathbf{ind}_s^{(N_d)} \rangle]$$

$$\mathbf{K}_{se} = \mathbf{K}_{es}^T = \sum_{i=1}^{N_d} \left((-k_e^{(i)} \mathbf{dircos}_d^{(i)}) \langle \mathbf{ind}_s^{(i)}, \mathbf{ind}_e^{(i)} \rangle \right), \quad \mathbf{ind}_e^{(i)} = \begin{bmatrix} \delta_{1,i} \\ \delta_{2,i} \\ \vdots \\ \delta_{N_d,i} \end{bmatrix} \quad (\text{B-36})$$

もしくは，

$$\mathbf{K}_{se} = \mathbf{K}_{es}^T = \sum_{i=1}^{N_d} \left(-k_e^{(i)} \mathbf{dircos}_d^{(i)} \langle \mathbf{ind}_s^{(i)}, \mathbf{ind}_e^{(i)} \rangle \right) = -\mathbf{C}_p \mathbf{K}_e \quad (\text{B-37})$$

境界条件を考慮すると，式(B-31)の運動方程式は， $\tilde{\mathbf{u}} = [\hat{\mathbf{u}}^T \quad \mathbf{u}_e^T]^T$ の代わりにそこから常に $\mathbf{0}$ である成分を除外した一般化変位ベクトル $\tilde{\mathbf{u}}_{\text{free}} = \tilde{\mathbf{u}} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{ind}_{\hat{\mathbf{u}}_{\text{free}}} \\ \mathbf{1}_{N_d} \end{bmatrix} \right\} = [\hat{\mathbf{u}} \{ \mathbf{ind}_{\hat{\mathbf{u}}_{\text{free}}} \}^T \quad \mathbf{u}_e \{ \mathbf{1}_{N_d} \}^T]^T = [\hat{\mathbf{u}}_{\text{free}}^T \quad \mathbf{u}_e^T]^T$ を用いた次式となる．

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{M}}_{\text{bou}} \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_{\text{free}} + \tilde{\mathbf{K}}_{\text{bou}} \tilde{\mathbf{u}}_{\text{free}} &= -\tilde{\mathbf{M}}_{\text{bou}} (\tilde{\mathbf{e}}_{x\text{bou}} \ddot{w}_{x0} + \tilde{\mathbf{e}}_{y\text{bou}} \ddot{w}_{y0} + \tilde{\mathbf{e}}_{z\text{bou}} \ddot{w}_{z0}), \\
\tilde{\mathbf{M}}_{\text{bou}} &= \tilde{\mathbf{M}}_{\text{all}} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{ind}_{\hat{u}\text{free}} \\ \mathbf{1}_{N_d} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{ind}_{\hat{u}\text{free}} \\ \mathbf{1}_{N_d} \end{bmatrix} \right\}, \quad \tilde{\mathbf{K}}_{\text{bou}} = \tilde{\mathbf{K}}_{\text{all}} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{ind}_{\hat{u}\text{free}} \\ \mathbf{1}_{N_d} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{ind}_{\hat{u}\text{free}} \\ \mathbf{1}_{N_d} \end{bmatrix} \right\}, \quad (\text{B-38}) \\
\tilde{\mathbf{e}}_{x\text{bou}} &= \tilde{\mathbf{e}}_x \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{ind}_{\hat{u}\text{free}} \\ \mathbf{1}_{N_d} \end{bmatrix} \right\}, \quad \tilde{\mathbf{e}}_{y\text{bou}} = \tilde{\mathbf{e}}_y \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{ind}_{\hat{u}\text{free}} \\ \mathbf{1}_{N_d} \end{bmatrix} \right\}, \quad \tilde{\mathbf{e}}_{z\text{bou}} = \tilde{\mathbf{e}}_z \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{ind}_{\hat{u}\text{free}} \\ \mathbf{1}_{N_d} \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

または、式(B-19)の記号を用いて次のようにも書ける。

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{M}}_{\text{bou}} \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_{\text{free}} + \tilde{\mathbf{K}}_{\text{bou}} \tilde{\mathbf{u}}_{\text{free}} &= -\tilde{\mathbf{M}}_{\text{bou}} (\tilde{\mathbf{e}}_{x\text{bou}} \ddot{w}_{x0} + \tilde{\mathbf{e}}_{y\text{bou}} \ddot{w}_{y0} + \tilde{\mathbf{e}}_{z\text{bou}} \ddot{w}_{z0}), \\
\tilde{\mathbf{M}}_{\text{bou}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\text{bou}} & \mathbf{0}_{N_{\hat{u}\text{free}} \times N_d} \\ \mathbf{0}_{N_d \times N_{\hat{u}\text{free}}} & \mathbf{M}_e \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{K}}_{\text{bou}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{bou}} + \mathbf{K}_{\text{s bou}} & \mathbf{K}_{\text{se bou}} \\ \mathbf{K}_{\text{es bou}} & \mathbf{K}_e \end{bmatrix}, \\
\mathbf{K}_{\text{s bou}} &= \mathbf{K}_s \{ \mathbf{ind}_{\hat{u}\text{free}}, \mathbf{ind}_{\hat{u}\text{free}} \}, \\
\mathbf{K}_{\text{se bou}} &= \mathbf{K}_{\text{es bou}}^T = \mathbf{K}_{\text{se}} \{ \mathbf{ind}_{\hat{u}\text{free}}, \mathbf{1}_{N_d} \} = \mathbf{K}_{\text{es}} \{ \mathbf{1}_{N_d}, \mathbf{ind}_{\hat{u}\text{free}} \}^T, \\
\tilde{\mathbf{e}}_{x\text{bou}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{x\text{bou}} \\ \mathbf{0}_{N_d} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{e}}_{y\text{bou}} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{y\text{bou}} \\ \mathbf{0}_{N_d} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{e}}_{z\text{bou}} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{z\text{bou}} \\ \mathbf{0}_{N_d} \end{bmatrix}
\end{aligned} \quad (\text{B-39})$$

要素質量行列 \mathbf{M} が整合質量行列である場合、上記運動方程式が、IMD付の配管系ための直接的に解くべき振動問題となる。一方、要素質量行列 \mathbf{M} が集中質量行列である場合は、式(B-19)の直下で説明した通り \mathbf{M}_{bou} は特異であって $\tilde{\mathbf{M}}_{\text{bou}}$ も特異となるため、上記運動方程式を直接的に振動問題を解く対象として扱うことができない。

そのような場合のために、式の変形を考えよう。一般化変位ベクトル $\tilde{\mathbf{u}}_{\text{free}}$ と同じ成分からなるが成分の順番が異なるベクトル $[\mathbf{u}_{\text{free}}^T \ \mathbf{u}_e^T \ \boldsymbol{\theta}_{\text{free}}^T]^T = \left[\tilde{\mathbf{u}} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{ind}_{\hat{u}\text{free}} \\ \mathbf{0}_{N_d} \end{bmatrix} \right\}^T \tilde{\mathbf{u}} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N_{\hat{u}\text{free}}} \\ \mathbf{1}_{N_d} \end{bmatrix} \right\}^T \tilde{\mathbf{u}} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{ind}_{\hat{\theta}\text{free}} \\ \mathbf{0}_{N_d} \end{bmatrix} \right\}^T \right]^T = [\hat{\mathbf{u}} \{ \mathbf{ind}_{\hat{u}\text{free}} \}^T \ \mathbf{u}_e \{ \mathbf{1}_{N_d} \}^T \ \hat{\mathbf{u}} \{ \mathbf{ind}_{\hat{\theta}\text{free}} \}^T]^T$ で表記する式(B-38)または式(B-39)と同様な意味を持つ運動方程式は、接続ベクトルの回転の自由度に関する成分が全て0であること、および、剛性行列 \mathbf{K}_s 、 \mathbf{K}_{se} および \mathbf{K}_{es} の回転の自由度に関する成分が全て0であること（IMDモデル中のばねが全て並進ばねであるため並進の自由度に関する成分だけが残る）を考慮すれば、次式となる。

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{M}}_{\text{bou}'} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{\text{free}} \\ \ddot{\mathbf{u}}_e \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{free}} \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{K}}_{\text{bou}'} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\text{free}} \\ \mathbf{u}_e \\ \boldsymbol{\theta}_{\text{free}} \end{bmatrix} &= -\tilde{\mathbf{M}}_{\text{bou}'} (\tilde{\mathbf{e}}_{x\text{bou}'} \ddot{w}_{x0} + \tilde{\mathbf{e}}_{y\text{bou}'} \ddot{w}_{y0} + \tilde{\mathbf{e}}_{z\text{bou}'} \ddot{w}_{z0}), \\
\tilde{\mathbf{M}}_{\text{bou}'} &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\text{all}}\{\mathbf{ind}_{\text{ufree}}, \mathbf{ind}_{\text{ufree}}\} & \mathbf{O}_{N_{\text{ufree}} \times N_d} & \mathbf{M}_{\text{all}}\{\mathbf{ind}_{\text{ufree}}, \mathbf{ind}_{\theta\text{free}}\} \\ \mathbf{O}_{N_d \times N_{\text{ufree}}} & \mathbf{M}_e & \mathbf{O}_{N_d \times N_{\theta\text{free}}} \\ \mathbf{M}_{\text{all}}\{\mathbf{ind}_{\theta\text{free}}, \mathbf{ind}_{\text{ufree}}\} & \mathbf{O}_{N_{\theta\text{free}} \times N_d} & \mathbf{M}_{\text{all}}\{\mathbf{ind}_{\theta\text{free}}, \mathbf{ind}_{\theta\text{free}}\} \end{bmatrix}, \\
\tilde{\mathbf{K}}_{\text{bou}'} &= \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{\text{all}} + \mathbf{K}_s)\{\mathbf{ind}_{\text{ufree}}, \mathbf{ind}_{\text{ufree}}\} & \mathbf{K}_{se}\{\mathbf{ind}_{\text{ufree}}, \mathbf{1}_{N_d}\} & \mathbf{K}_{\text{all}}\{\mathbf{ind}_{\text{ufree}}, \mathbf{ind}_{\theta\text{free}}\} \\ \mathbf{K}_{es}\{\mathbf{1}_{N_d}, \mathbf{ind}_{\text{ufree}}\} & \mathbf{K}_e & \mathbf{O}_{N_d \times N_{\theta\text{free}}} \\ \mathbf{K}_{\text{all}}\{\mathbf{ind}_{\theta\text{free}}, \mathbf{ind}_{\text{ufree}}\} & \mathbf{O}_{N_{\theta\text{free}} \times N_d} & \mathbf{K}_{\text{all}}\{\mathbf{ind}_{\theta\text{free}}, \mathbf{ind}_{\theta\text{free}}\} \end{bmatrix}, \\
\tilde{\mathbf{e}}_{x\text{bou}'} &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x\{\mathbf{ind}_{\text{ufree}}\} \\ \mathbf{0}_{N_d} \\ \mathbf{0}_{N_{\theta\text{free}}} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{e}}_{y\text{bou}'} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_y\{\mathbf{ind}_{\text{ufree}}\} \\ \mathbf{0}_{N_d} \\ \mathbf{0}_{N_{\theta\text{free}}} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{e}}_{z\text{bou}'} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_z\{\mathbf{ind}_{\text{ufree}}\} \\ \mathbf{0}_{N_d} \\ \mathbf{0}_{N_{\theta\text{free}}} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{B-40}$$

または、式(B-20)の記号を用いて次のようにも書ける。

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{M}}_{\text{bou}'} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{\text{free}} \\ \ddot{\mathbf{u}}_e \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{free}} \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{K}}_{\text{bou}'} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\text{free}} \\ \mathbf{u}_e \\ \boldsymbol{\theta}_{\text{free}} \end{bmatrix} &= -\tilde{\mathbf{M}}_{\text{bou}'} (\tilde{\mathbf{e}}_{x\text{bou}'} \ddot{w}_{x0} + \tilde{\mathbf{e}}_{y\text{bou}'} \ddot{w}_{y0} + \tilde{\mathbf{e}}_{z\text{bou}'} \ddot{w}_{z0}), \\
\tilde{\mathbf{M}}_{\text{bou}'} &:= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_{\text{bou}'TT} & \tilde{\mathbf{M}}_{\text{bou}'TR} \\ \tilde{\mathbf{M}}_{\text{bou}'RT} & \tilde{\mathbf{M}}_{\text{bou}'RR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\text{bou}'TT} & \mathbf{O}_{N_{\text{ufree}} \times N_d} & \mathbf{M}_{\text{bou}'TR} \\ \mathbf{O}_{N_d \times N_{\text{ufree}}} & \mathbf{M}_e & \mathbf{O}_{N_d \times N_{\theta\text{free}}} \\ \mathbf{M}_{\text{bou}'RT} & \mathbf{O}_{N_{\theta\text{free}} \times N_d} & \mathbf{M}_{\text{bou}'RR} \end{bmatrix}, \\
\tilde{\mathbf{K}}_{\text{bou}'} &:= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{\text{bou}'TT} & \tilde{\mathbf{K}}_{\text{bou}'TR} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{\text{bou}'RT} & \tilde{\mathbf{K}}_{\text{bou}'RR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{bou}'TT} + \mathbf{K}_{\text{sbou}'TT} & \mathbf{K}_{\text{sebou}'T} & \mathbf{K}_{\text{bou}'TR} \\ \mathbf{K}_{\text{esbou}'T} & \mathbf{K}_e & \mathbf{O}_{N_d \times N_{\theta\text{free}}} \\ \mathbf{K}_{\text{bou}'RT} & \mathbf{O}_{N_{\theta\text{free}} \times N_d} & \mathbf{K}_{\text{bou}'RR} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{K}_{\text{sbou}'TT} &= \mathbf{K}_s\{\mathbf{ind}_{\text{ufree}}, \mathbf{ind}_{\text{ufree}}\}, \\
\mathbf{K}_{\text{sebou}'T} &= \mathbf{K}_{\text{esbou}'T}^T = \mathbf{K}_{se}\{\mathbf{ind}_{\text{ufree}}, \mathbf{1}_{N_d}\} = \mathbf{K}_{es}\{\mathbf{1}_{N_d}, \mathbf{ind}_{\text{ufree}}\}^T, \\
\tilde{\mathbf{e}}_{x\text{bou}'} &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x\{\mathbf{ind}_{\text{ufree}}\} \\ \mathbf{0}_{N_d} \\ \mathbf{0}_{N_{\theta\text{free}}} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{e}}_{y\text{bou}'} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_y\{\mathbf{ind}_{\text{ufree}}\} \\ \mathbf{0}_{N_d} \\ \mathbf{0}_{N_{\theta\text{free}}} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{e}}_{z\text{bou}'} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_z\{\mathbf{ind}_{\text{ufree}}\} \\ \mathbf{0}_{N_d} \\ \mathbf{0}_{N_{\theta\text{free}}} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{B-41}$$

ここで、 $\mathbf{M}_{\text{bou}'}$ は、要素質量行列 \mathbf{M} が集中質量行列である場合は、次の簡単な形になる。

$$\tilde{\mathbf{M}}_{\text{bou}'} := \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_{\text{bou}'TT} & \mathbf{O}_{(N_{\text{ufree}}+N_d) \times N_{\theta\text{free}}} \\ \mathbf{O}_{N_{\theta\text{free}} \times (N_{\text{ufree}}+N_d)} & \mathbf{O}_{N_{\theta\text{free}} \times N_{\theta\text{free}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\text{bou}'TT} & \mathbf{O}_{N_{\text{ufree}} \times N_d} & \mathbf{O}_{N_{\text{ufree}} \times N_{\theta\text{free}}} \\ \mathbf{O}_{N_d \times N_{\text{ufree}}} & \mathbf{M}_e & \mathbf{O}_{N_d \times N_{\theta\text{free}}} \\ \mathbf{O}_{N_{\theta\text{free}} \times N_{\text{ufree}}} & \mathbf{O}_{N_{\theta\text{free}} \times N_d} & \mathbf{O}_{N_{\theta\text{free}} \times N_{\theta\text{free}}} \end{bmatrix} \tag{B-42}$$

式(B-41)と式(B-42)を考慮すれば、一般化変位ベクトル $\tilde{\mathbf{u}}_{\text{free}} = [\hat{\mathbf{u}}_{\text{free}}^T \ \mathbf{u}_e^T]^T$ の代わりに変位ベクトル（回転の成分を含まない） $\mathbf{u}_{\text{free}\&e} = [\mathbf{u}_{\text{free}}^T \ \mathbf{u}_e^T]^T$ を用いて記述される自由度が縮小された運動方程式、および、変位ベクトル $\mathbf{u}_{\text{free}\&e}$ と回転角ベクトル $\boldsymbol{\theta}_{\text{free}}$ の関係式は、次式となる。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}}_{\text{red}} \ddot{\mathbf{u}}_{\text{free}\&e} + \tilde{\mathbf{K}}_{\text{red}} \mathbf{u}_{\text{free}\&e} &= -\tilde{\mathbf{M}}_{\text{red}} (\tilde{\mathbf{e}}_{\text{xred}} \dot{w}_{x0} + \tilde{\mathbf{e}}_{\text{yred}} \dot{w}_{y0} + \tilde{\mathbf{e}}_{\text{zred}} \dot{w}_{z0}), \\ \tilde{\mathbf{M}}_{\text{red}} &= \tilde{\mathbf{M}}_{\text{bou}'TT}, \quad \tilde{\mathbf{K}}_{\text{red}} = \tilde{\mathbf{K}}_{\text{bou}'TT} - \tilde{\mathbf{K}}_{\text{bou}'TR} \tilde{\mathbf{K}}_{\text{bou}'RR}^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_{\text{bou}'RT}, \\ \tilde{\mathbf{e}}_{\text{xred}} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \{\text{ind}_{\text{ufree}}\} \\ \mathbf{0}_{N_d} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{\text{xred}} \\ \mathbf{0}_{N_d} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{e}}_{\text{yred}} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_y \{\text{ind}_{\text{ufree}}\} \\ \mathbf{0}_{N_d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{\text{yred}} \\ \mathbf{0}_{N_d} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{e}}_{\text{zred}} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_z \{\text{ind}_{\text{ufree}}\} \\ \mathbf{0}_{N_d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{\text{zred}} \\ \mathbf{0}_{N_d} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B-43})$$

$$\boldsymbol{\theta}_{\text{free}} = -\tilde{\mathbf{K}}_{\text{bou}'RR}^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_{\text{bou}'RT} \mathbf{u}_{\text{free}\&e} \quad (\text{B-44})$$

要素質量行列 \mathbf{M} が集中質量行列である場合、上記の運動方程式が、IMD付の配管系のための直接的に解くべき振動問題となる。運動方程式(B-43)を解くことで得られる変位ベクトル $\mathbf{u}_{\text{free}\&e}$ を関係式(B-44)に代入すれば、回転角ベクトル $\boldsymbol{\theta}_{\text{free}}$ が解かれる。

式(B-39)によって $\tilde{\mathbf{u}}_{\text{free}}$ が、もしくは、式(B-43)と式(B-44)によって $\mathbf{u}_{\text{free}\&e}$ と $\boldsymbol{\theta}_{\text{free}}$ が既知となれば、拘束された自由度の一般化変位が0（境界条件）であるため、解としての全節点の一般化変位ベクトル $\hat{\mathbf{u}}$ および全IMDの相対変位ベクトル \mathbf{u}_e は、次のベクトル成分の再配置の操作を意味する式によって作成できる。

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 \\ \hat{\mathbf{u}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}_{N_{\text{nod}}} \end{bmatrix} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{u}}_{\text{free}} \begin{Bmatrix} \mathbf{1}_{N_{\text{ufree}}} \\ \mathbf{0}_{N_d} \end{Bmatrix} \langle \text{ind}_{\text{ufree}} \rangle & , \mathbf{M} \text{が整合質量行列の場合} \\ \mathbf{u}_{\text{free}\&e} \begin{Bmatrix} \mathbf{1}_{N_{\text{ufree}}} \\ \mathbf{0}_{N_d} \end{Bmatrix} \langle \text{ind}_{\text{ufree}} \rangle + \boldsymbol{\theta}_{\text{free}} \langle \text{ind}_{\boldsymbol{\theta}_{\text{free}}} \rangle & , \mathbf{M} \text{が集中質量行列の場合} \end{cases} \quad (\text{B-45})$$

$$\mathbf{u}_e = \begin{bmatrix} u_e^{(1)} \\ u_e^{(2)} \\ \vdots \\ u_e^{(N_d)} \end{bmatrix} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{u}}_{\text{free}} \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_{N_{\text{ufree}}} \\ \mathbf{1}_{N_d} \end{Bmatrix} & , \mathbf{M} \text{が整合質量行列の場合} \\ \mathbf{u}_{\text{free}\&e} \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_{N_{\text{ufree}}} \\ \mathbf{1}_{N_d} \end{Bmatrix} & , \mathbf{M} \text{が集中質量行列の場合} \end{cases} \quad (\text{B-46})$$

IMD付配管系の各節点の一般化変位が式(B-45)によって既知となれば、これを式(B-25)から式(B-28)に適用することで、IMDが適用されていない場合と同様に、管の健全性の評価に用いるための要素毎の両端の一般化力 $\hat{\mathbf{f}}_{\text{Ieva}}^{(i)}$, $\hat{\mathbf{f}}_{\text{Jeva}}^{(i)}$, $i = 1, \dots, N_{\text{ele}}$ を求めることができ、また、式(B-29)や式(B-30)に適用することで、同様に、ばね支持部（レストレイント等によるもの）の健全性の評価に用いるための全ての反力または反モーメント $f_{\text{spr}}^{(i)}$ or $m_{\text{spr}}^{(i)}$, $i = 1, \dots, N_{\text{spr}}$ を求めることができる。

また、各 IMD の中間点の相対変位が式(B-46)によって既知となれば、IMD の全ての反力を表すベクトル \mathbf{f}_d は、次式によって求められる。

$$\mathbf{f}_d = \begin{bmatrix} f_d^{(1)} \\ f_d^{(2)} \\ \vdots \\ f_d^{(N_d)} \end{bmatrix}, \quad (\text{B-47})$$

$$f_d^{(i)} = k_e^{(i)} (\mathbf{u}_s^{(i)} - \mathbf{u}_e^{(i)}) = k_e^{(i)} (\mathbf{dircos}_d^{(i)T} \mathbf{u}_{n_{\text{nodd}}}^{(i)} - \mathbf{u}_e^{(i)}),$$

$$\mathbf{u}_{n_{\text{nodd}}}^{(i)} = \hat{\mathbf{u}}_{n_{\text{nodd}}}^{(i)} \begin{Bmatrix} \mathbf{1}_3 \\ \mathbf{0}_3 \end{Bmatrix} = [\mathbf{I}_3 \quad \mathbf{0}_3] \hat{\mathbf{u}}_{n_{\text{nodd}}}^{(i)}$$

ここで、 $\mathbf{u}_s^{(i)}$ は i 番目 ($i = 1, \dots, N_d$) の IMD の取付節点の変位ベクトル $\mathbf{u}_{n_{\text{nodd}}}^{(i)} = [u_{xn_{\text{nodd}}}^{(i)} \quad u_{yn_{\text{nodd}}}^{(i)} \quad u_{zn_{\text{nodd}}}^{(i)}]^T$ に方向余弦を適用することで求められる取付方向成分としての変位であり、 $(\mathbf{u}_s^{(i)} - \mathbf{u}_e^{(i)})$ は各ばねの変形量を意味する。また、上式は $\mathbf{u}_s^{(i)}$ を $i = 1, \dots, N_d$ の順に集めたベクトル \mathbf{u}_s を用いれば次のように表すこともできる。

$$\mathbf{f}_d = \begin{bmatrix} f_d^{(1)} \\ f_d^{(2)} \\ \vdots \\ f_d^{(N_d)} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_e (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_e), \quad (\text{B-48})$$

$$\mathbf{u}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_s^{(1)} \\ \mathbf{u}_s^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_s^{(N_d)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{dircos}_d^{(1)T} \mathbf{u}_{n_{\text{nodd}}}^{(1)} \\ \mathbf{dircos}_d^{(2)T} \mathbf{u}_{n_{\text{nodd}}}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{dircos}_d^{(N_d)T} \mathbf{u}_{n_{\text{nodd}}}^{(N_d)} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_p^T \hat{\mathbf{u}},$$

上記 \mathbf{f}_d の各成分である各 IMD 支持部の反力を仕様としての許容値と比較することで設置される IMD の健全性の評価が行われる。

参考文献

- [1] Pegon, P., Derivation of consistent proportional viscous damping matrices, JRC-Special Publication No.I.96.49 (1996), p. 4, available from <<https://www.researchgate.net/publication/339384112>> (accessed on 7 April, 2021).
- [2] Hanson, K. L. and Jahsman, W. E., An evaluation of piping analysis methods (1955), available from <<https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=mdp.39015095111921>> (accessed on 27 April, 2021).
- [3] 日置興一郎, 村田賢, 等分布荷重を受ける異方性弾性長方形断面梁の平面応力状態解の古典理論解からの誘導, 日本建築学会構造系論文集, Vol. 75, No. 656, doi: [10.3130/aijs.75.1837](https://doi.org/10.3130/aijs.75.1837) (2010).
- [4] 野津厚, Timoshenko 梁の振動方程式, 第2版, 地震工学に関する解説書 (2020), 入手先 <https://www.pari.go.jp/bsh/jbn-kzo/jbn-bst/taisin/tutorial_jpn.html> (参照日 2021年4月27日).
- [5] Johnson, F. R. and Holland, T. J., SAP IV user's guide version 1.0 - A structural analysis program for static and dynamic response of linear systems (1993), p. 74, available from <<https://apps.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a266907.pdf>> (accessed on 27 April, 2021).
- [6] 日本機械学会, 発電用原子力設備規格 設計・建設規格 (2005年版) 〈第I編 軽水炉規格〉 JSME S NC1-2005 (2005), p. I-5-43, p. I-解説 5-31.
- [7] M. W. Kellogg Company, Design of piping system, Revised second edition (1965).
- [8] 柴田明德, 最新耐震構造解析, 第3版, 森北出版 (2014), pp. 257-258.

謝辞

本論文は、筆者が新潟大学大学院自然科学研究科博士後期課程材料生産システム専攻機械科学コース在学中に行った研究の成果をまとめたものである。

博士後期課程への進学を勧められ、また在学期間中終始懇切丁寧なご指導ご鞭撻を賜りました、新潟大学 平元和彦教授に心からお礼申し上げます。筆者は、三和テッキ株式会社に入社する以前、秋田大学で学部生および博士前期課程の院生の生活を送っていましたが、当時、平元先生は秋田大学にご勤務されており、制御関係の授業でお世話になって以来のご縁がありました。特に、研究室所属以降は、他研究室の先生ではありましたが、研究上の接点が多く、特に台湾国家地震工学研究センターでの実験の前後等では多くのご助力をいただきました。当時を含め、改めて、ここに深く感謝申し上げます。

また、本論文の執筆にあたっては、審査委員である新潟大学 安部隆教授、松原幸治教授、横山誠准教授、坂本秀一准教授には、有益な議論の機会とご助言を賜りました。ここに厚くお礼申し上げます。

新潟大学 阿部和久教授には、付録 B に関係する思いがけないご助言をいただき、関連する知識を深めることができました。ここに感謝の意を表します。

秋田大学名誉教授であり、前年度まで三和テッキ株式会社非常勤顧問であった、前記研究室時代の恩師 砂子田勝昭先生には、長期にわたり活力にあふれる熱心なご指導を賜りました。三和テッキ株式会社入社以降も、再度ご指導を受けながら（先生が退官後、古巣 三和テッキ株式会社に顧問として戻られたことには、当時大変驚くと共に嬉しい思いがありました）、IMD の一種であるコンパクトメカニカル防振器の開発に従事できたことは貴重な経験でした。2017 年には、共著者としてお供させていただいた国際会議の旅先で平元先生との再会の機会を設けて下さり、これが進学の契機となりました。書ききれないこともございますが、ここに厚くお礼申し上げます。

また、明治大学 松岡太一教授（当時秋田大学にご勤務）には、前記研究室時代に、研究への向き合い方から文書の作成のいろはや図面の見方等の細かい所まで時に厳しくも丁寧にご指導いただきました。これは、技術系の仕事をする上での基礎となり、また、現在の研究にも活かされております。ここに感謝の意を表します。

博士後期課程への進学をご許可下さいました三和テッキ株式会社 宇佐美道雅会長（当時社長）および現在も研究継続にご理解いただいております野島正社長に深く感

謝申し上げますとともに、多くの関係する皆様への筆者進学に関する推薦にご尽力いただきました。九州三和鉄軌株式会社 袖山博社長（当時三和テッキ株式会社 開発第2部長）に心からお礼申し上げます。

また、上司である中津雅延開発第2部長、柴田和彦同部開発2課長には、研究に煮詰まり悩んでる頃合いを見付けてはご助言いただいたり、学業や私事への有形無形のご配慮をいただいたりする等、いつも暖かくお見守り下さいましたことに厚くお礼申し上げます。

また、配管解析や配管支持の実務的内容に関する質問や議論に快く応じていただいた技術第2部の皆様に、また、公私の様々に疲れた時等に励ましていただいた同じ部署の同僚や同期の皆様に、深く感謝申し上げます。

最後に、常に筆者を支え応援してくれた両親に心から感謝致します。