

博士論文の要旨及び審査結果の要旨

氏名	佐々木 善雅
学位	博士 (理学)
学位記番号	新大院博 (理) 第 467 号
学位授与の日付	令和3年3月23日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
博士論文名	Stability of approximate solutions constructed by the wave front tracking method for conservation laws (保存則方程式の波面追跡法から構成される近似解の安定性)
論文審査委員	主査 教授・三浦 毅 副査 教授・田中 環 副査 教授・渡邊 恵一 副査 教授・小島 秀雄 副査 准教授・應和 宏樹 副査 助教・大井 志穂

博士論文の要旨

本論文では、単独保存則方程式の波面追跡法から構成される近似解の安定性についての申請者自身による研究成果が述べられている。本論文は第1章～第4章までで構成されている。以下で各章の内容と論評について述べる。

第1章

この章では、単独保存則方程式の解の存在性に関する波面追跡法を用いた結果、その安定性に関する結果、著者自身が得た結果の位置づけなどについて書かれている。本論文に書かれている通り、1972年に C. Dafermos が波面追跡法から構成される近似解の部分列の極限関数が単独保存則方程式の解であることを示したが、その極限関数が部分列の取り方に依存しないこと、すなわち、安定性に関する結果を得ることは長年の課題であり、難しい問題であった。実際、1986年に B. J. Lucier, 2015年に H. Holden and N. H. Risebro が  $L^1$  の枠組みで安定性を示しているが、波面追跡法から構成される近似解の極限関数への収束の意味は  $L^1_{loc}$  であるため、これらの結果は仮定を加えていることになり、真に安定性を示したことにはなっていなかった。そのような状況の中で、申請者は、2020年に  $L^1_{loc}$  の枠組みで安定性を示すことに成功した。その証明は初等的な証明手法による非常に明快なものであり、その証明自体も大変興味深い。また、今後さらなる結果を得ることが期待される有意義な手法であると思われる。

第2章

この章では、C. Dafermos による単独保存則方程式の波面追跡法を用いた近似解の構成方法について、A. Bressan (2000)の専門書などを参考にして、わかりやすく説明している。論文や専門書では、省略されているような証明や計算までしっかりと書いてあり、その説明自体もわかりやすく、学術的にも価値があると思われる。

第3章

この章では、申請者自身による研究成果、すなわち、 $L^1_{loc}$  の枠組みで安定性を示すための基本評価について、その結果と証明が述べられている。この章で述べられている証明手法は、1999年の T. P. Liu and T. Yang による単独保存則方程式の解の一意性に関する証明テクニックがベースになっていると思われるが、T. P. Liu and T. Yang による証明は難解

で複雑な表現をもつ。しかし、申請者自身による証明手法は、上でも述べたように、初等的な証明手法による非常に明快なものである。このような意味で、その証明自体も大変興味深く、申請者自身の数学力の高さが垣間見える。

#### 第4章

この章では、第3章で与えられた結果を用いて、1970年のS. N. Kružkovによる doubling method を適用することにより、 $L^1_{loc}$  の枠組みで安定性を示している。その証明は、B. J. Lucier や H. Holden and N. H. Risebro の  $L^1$  の枠組みでの安定性の証明では見られなかった、まったく新しい手法である。また、従来の手法ではわからなかった近似解の列の収束率までも明確になる。もちろん、その証明手法は、 $L^1$  の枠組みでの安定性の証明にも適用することができ、このような意味で、B. J. Lucier や H. Holden and N. H. Risebro の証明手法とそれらの結果の局所一般化にもなっている。

#### 審査結果の要旨

##### 学術的背景

一般に、保存則方程式の近似解の安定性に関する議論は難しい。実際、解の存在定理や一意性定理と比較すると、安定性に関する結果は非常に少ないと言える。その主な原因として考えられるのは、保存則方程式の解構造が見えにくいことにある。また、申請者自身が得た結果である  $L^1_{loc}$  の枠組みでの安定性は、1970年のS. N. Kružkovによる保存則方程式の解の一意性定理の結果から得られることは明らかであったが、その手法では背理法（安定性が得られなければ矛盾するという論理）を用いる必要があり、そのため、近似解の列の収束率などはまったくわからず、直接的な証明手法の開発が長年待ちわびられていた。

##### 審査要旨

申請者は、単独保存則方程式の解構造を見るために、波面追跡法から構成される近似解の解構造を明確にし、その結果、その近似解の列の  $L^1_{loc}$  の枠組みでの安定性を直接的に示すことに成功した。したがって、この証明手法により、近似解の列の収束率が明確になる。申請者による結果は、国際的な数学雑誌である *Journal of Mathematical Analysis and Applications* に掲載され、保存則方程式の研究に大きく貢献したものである。また、その証明手法は、今までに見られなかったものであり、その証明自体も大変興味深く、今後さらなる結果を得ることが期待される有意義な手法であると思われる。

よって、本論文は博士（理学）の博士論文として十分であると認定した。