

2020年度 博士論文

地上ニュートリノ実験で探る右巻き
ニュートリノによる宇宙バリオン数生成

吉田 貴裕

F18J003F

新潟大学大学院自然科学研究科 博士後期課程
数理物質科学専攻 物理学コース

素粒子論研究室

目次

第1章 導入	3
第2章 素粒子標準模型とその問題点	5
2.1 素粒子標準模型	5
2.2 フェルミオンの質量	6
2.3 標準模型を超える物理	7
2.3.1 ニュートリノ振動	7
2.3.2 ニュートリノ質量	8
2.3.3 カサス-イバーラパラメトリゼーション	9
2.3.4 宇宙バリオン数非対称性	10
第3章 右巻きニュートリノの反応によるバリオン数の生成	13
3.1 レプトン数生成機構	13
3.1.1 レプトン数を破る過程	14
3.1.2 CP 対称性の破れた過程	14
3.1.3 熱平衡からずれた過程	17
3.2 散乱過程	18
3.2.1 $\Delta L = 2$ の過程	18
3.2.2 $\Delta L = 1$ の過程	19
3.2.3 右巻きニュートリノの対生成・対消滅過程	21
3.3 レプトン数生成を記述する方程式	21
3.3.1 ボルツマン方程式	22
3.3.2 右巻きニュートリノ残存量とレプトン数生成量のボルツマン方程式	22
3.4 レプトン数生成のフレーバー効果	23
3.5 共鳴レプトン数生成機構	25
第4章 TeV スケール質量を持つ右巻きニュートリノによるレプトン数生成	28
4.1 TeV スケールの右巻きニュートリノ	28
4.2 バリオン数非対称性とレプトンセクターの CP 対称性の破れ	29
4.3 ニュートリノを伴わない二重ベータ崩壊	33
第5章 モジュラー A_4 不変な理論におけるレプトン数生成	37
5.1 モジュラー群とその商群	37
5.2 モジュラー A_4 対称性を持つフレーバー模型	39
5.3 レプトン数生成	44
5.4 BAU の符号と大きさ	45
第6章 結論	49
付録A ニュートリノ振動確率	52

付録 B	散乱断面積	54
付録 C	右巻きニュートリノの崩壊率と CP 非対称パラメータの評価	56
付録 D	熱浴中での質量と結合定数	60
	D.1 熱浴中での粒子の質量	60
	D.2 くりこみ群方程式	60
付録 E	A_4 群の計算則	62
付録 F	モジュラー形式	63

第1章 導入

素粒子が引き起こす様々な現象は標準模型 (the Standard Model, SM) [1-3] と呼ばれる理論によって高い精度で記述される。標準模型は自然界に存在する4つの基本相互作用 (強い相互作用, 電磁相互作用, 弱い相互作用, 重力相互作用) のうち重力相互作用を除く3つの相互作用を記述する。素粒子間の相互作用はゲージ理論に基づいて記述され, $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ のゲージ対称性を持っている。ヒッグス場が真空期待値を持つことにより, $SU(2)_L \times U(1)_Y$ の対称性を $U(1)_{EM}$ に自発的に破る。これにより3つの相互作用を記述し, 同時に素粒子が質量を獲得する。

標準模型は電弱スケール以下の物理現象をほぼ矛盾なく説明するが, 標準模型では説明できない現象も観測されている。例えば, ニュートリノが持つ極微な質量, ダークマターの存在, 宇宙バリオン数非対称性, 宇宙背景放射の温度揺らぎ (インフレーション) などがあげられる。また基本相互作用である重力が量子化できない, といった根本的な問題も抱えている。そこでこれらの問題を解決する, 標準模型の背後にある新しい理論を提案し, またその理論を実験で直接検証することが重要な課題となっている。

本論文では先にあげた問題のうち, 特にニュートリノが持つ極微な質量の起源, 及び宇宙バリオン数非対称性の問題に注目し, その解決方法を考察した。

ニュートリノは左巻き場しか見つかっておらず, 標準模型には右巻きニュートリノ場が導入されていない。そのため, ヒッグスが真空期待値を持つことにより他の素粒子が質量を獲得したのと同様にヒッグス機構を通じては質量を持つことができない。スーパーカミオカンデ実験などのニュートリノ振動実験により, ニュートリノにはわずかながら質量があることが観測されている。この事実を説明するためには標準模型には何らかの拡張が必要がある。

バリオン数非対称性 (Baryon Asymmetry of the Universe, BAU) とはバリオンの数と反バリオンの数に差があることをいう。宇宙初期にはインフレーションと呼ばれる指数関数的な膨張があったことが観測から示唆されている。インフレーション直後の宇宙ではバリオンと反バリオンは数の差を持たない。しかし, 元素合成の時期にヘリウムなどの軽元素が作られるためにはその時期において, バリオンと反バリオンに数の差がなければならないことが知られている。このことから, インフレーション終了後から元素合成の時期までの間にバリオンと反バリオンで数の差を作らなければならない。しかし標準模型ではこのバリオンと反バリオンの数の差を作る機構を説明できないことが知られている。これら2つの問題については2章で詳しく説明する。

これらの標準模型で説明できない2つの現象を解決するため, 本論文では標準模型に非常に大きなマヨラナ質量を持つ右巻きニュートリノを導入したモデルを採用する。このモデルでは右巻きニュートリノを新たに加えたことにより, ヒッグス場が真空期待値を持つと湯川相互作用を通じてディラック質量を獲得する。また, 右巻きニュートリノがマヨラナ質量を持つことからニュートリノに新たな混合が生じ, 軽いニュートリノと重いニュートリノが現れる (シーソー機構という [4-8])。このことについても2章で述べる。もう一つの問題であるバリオンの数と反バリオンの数に差を作る機構については, レプトン数生成機構 [9] と呼ばれる機構で説明する。この機構では右巻きニュートリノの反応によりまずレプトン数が作られる。作られたレプトン数が量子異常の効果を通じてバリオン数へ一部受け渡される。この機構については3章で詳しく見る予定である。また, 右巻きニュートリノによるシーソー機構とレプトン数生成機構を同時に説明可能な右巻きニュートリノ質量領域は $\mathcal{O}(1)\text{MeV}$ から $\mathcal{O}(10^{15})\text{GeV}$ と非常に幅広く許されている。その質量に応じて, 右巻きニュート

リノが $\mathcal{O}(10^9)$ GeV 以上と重い領域では右巻きニュートリノの崩壊によるレプトン数生成機構 [9], 電弱スケール ($\mathcal{O}(10^2)$ GeV) より重い縮退した質量を持つ右巻きニュートリノによる共鳴レプトン数生成機構 [10], 電弱スケール以下の縮退した質量を持つ右巻きニュートリノの振動を通じてレプトン数を生成する機構 [11, 12] と質量スケールに応じた BAU の生成機構が提案されている. このような背景のもと、地上実験等を通じて右巻きニュートリノの質量を特定し, BAU の生成機構を識別することが現在の重要な課題となっている.

宇宙初期の高温状態において, 高エネルギーの素粒子反応でバリオン数が生成されるためには, CP 対称性が破れていることが必要である. したがって, 高エネルギー領域での CP 対称性の破れ方を理解することが BAU の起源を解明する上で重要である. 一方で, 地上実験で探索可能な低エネルギー領域での CP 対称性の破れは, ニュートリノの混合行列により記述され, 将来実験的に測定されることが期待されている. 低エネルギーの物理に現れる CP 対称性の破れが高エネルギーでの CP 対称性の破れと関係しているかどうかは, 非常に興味深い疑問である. そこで本博士論文では, ニュートリノ観測量と BAU との関係を明らかにし, 将来の地上実験によってレプトン数生成機構の選別方法を提案する. 特にニュートリノ観測量の領域を示し, 生成機構選別のための具体的判定条件を示す.

本研究では, 以下の 2 つの場合について, BAU 生成を議論する. まず 4 章では, 1 TeV の質量を持つ右巻きニュートリノを導入し, 共鳴レプトン数生成によって宇宙のバリオン数を説明することを検討する. このスケールでは右巻きニュートリノの崩壊によって共鳴的にレプトン数を生成することで BAU を説明する. しかし, ニュートリノ観測量と BAU との関係については, 明らかにされていない. そこで, 本研究ではこの両者の関係について研究を行った. 特にアクティブニュートリノセクターのみに CP 対称性の破れがある場合を検討し, ニュートリノの CP 位相がバリオン数と非常に密接に関係することを示す. 加えて, 標準模型では生じないレプトン数を破る反応であるニュートリノを伴わない二重ベータ崩壊との関連についても議論する. 5 章では, レプトンセクターに余剰次元のトーラスコンパクト化に由来するモジュラー A_4 対称性を課した模型 [13, 14] を検討し, この模型における BAU 生成を世界で初めて調査する. 対称性を導入したことにより, アクティブニュートリノの CP 対称性の破れとバリオン数に関係する CP 対称性の破れとの間に相関が現れる. このことを中心に解説し, ニュートリノ振動実験に与える影響を議論する. また右巻きニュートリノの質量にも制限が与えられることを示す. 6 章で本研究の結論を述べる.

第2章 素粒子標準模型とその問題点

素粒子標準模型 (以下では標準模型と書くことにする) [1-3] は $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 対称性に基づくゲージ理論で記述される. 標準模型は強い相互作用, 弱い相互作用, 電磁相互作用が関わる現象をよく説明する. しかし, 標準模型により説明できない現象や観測事実も見つかっており, それらを説明するため標準模型は拡張される必要がある.

本章では, 標準模型について説明し, さらに標準模型では説明できない事象のうち, 特に本研究にて注目する, ニュートリノ質量と宇宙バリオン数非対称性について述べる.

2.1 素粒子標準模型

標準模型のラグランジアン \mathcal{L}_{SM} は, ゲージ固定項を除いて,

$$\mathcal{L}_{\text{SM}} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_\Phi + \mathcal{L}_Y,$$

で表される. ここで, $\mathcal{L}_G, \mathcal{L}_F, \mathcal{L}_\Phi$ はそれぞれゲージ場, フェルミオン場, ヒッグス場のラグランジアン, \mathcal{L}_Y は湯川相互作用のラグランジアンであり, 以下で与えられる.

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} (G_{\mu\nu}^a)^2 - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^p)^2 - \frac{1}{4} (A_{\mu\nu})^2, \quad (2.1)$$

$$\mathcal{L}_F = \sum_{\psi_i} \bar{\psi}_i i \not{D} \psi_i, \quad (2.2)$$

$$\mathcal{L}_\Phi = |D_\mu \Phi|^2 - V(\Phi), \quad (2.3)$$

$$\mathcal{L}_Y = \left[-f_{ij}^{(u)} \bar{q}_{Li} \Phi u_{Rj} - f_{ij}^{(d)} \bar{q}_{Li} \tilde{\Phi} d_{Rj} - f_{ij}^{(e)} \bar{l}_i \tilde{\Phi} e_{Rj} \right] + \text{h.c.} \quad (2.4)$$

ここで, パウリ行列

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

を用いて, $\tilde{\Phi} \equiv i\sigma^2 \Phi^* = (\phi^+, -\phi^0)^T$ と定義した. $G_{\mu\nu}^a, F_{\mu\nu}^p, A_{\mu\nu}$ はそれぞれ $SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y$ の場の強さテンソルで,

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_3 f_{abc} G_\mu^b G_\nu^c, \quad (2.6)$$

$$F_{\mu\nu}^p = \partial_\mu A_\nu^p - \partial_\nu A_\mu^p + g_2 \epsilon_{pqr} A_\mu^q A_\nu^r, \quad (2.7)$$

$$A_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \quad (2.8)$$

で表され, 添字 $a, b, c = 1, 2, \dots, 8, p, q, r = 1, 2, 3$ はそれぞれ $SU(3)_C, SU(2)_L$ のインデックスを表す. 式 (2.2) はフェルミオンについての項である. ψ_i は表 2.1 にまとめたスピン 1/2 の粒子すべてを表す. 共変微分 D_μ は,

$$D_\mu = \partial_\mu - i g_3 \hat{T}_3 G_\mu^\alpha - i g_2 \hat{T}_2 A_\mu^p - i g_1 Y B_\mu, \quad (2.9)$$

場	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$	スピン
G_μ^A	8	1	0	1
A_μ^a	1	3	0	
B_μ	1	1	0	
$L_\alpha = \begin{pmatrix} \nu_{L\alpha} \\ e_{L\alpha} \end{pmatrix}$	1	2	-1	$\frac{1}{2}$
$e_{R\alpha}$	1	1	-2	
$q_{L\alpha} = \begin{pmatrix} u_{L\alpha} \\ d_{L\alpha} \end{pmatrix}$	3	2	$\frac{1}{3}$	
$u_{R\alpha}$	3	1	$\frac{4}{3}$	
$d_{R\alpha}$	3	1	$-\frac{2}{3}$	
$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^0 \\ \phi^- \end{pmatrix}$	1	2	-1	0

表 2.1: 標準模型における場の電荷とスピン

で与えられる. g_1, g_2, g_3 はそれぞれ $U(1)_Y, SU(2)_L, SU(3)_C$ のゲージ結合定数であり, \hat{T}_2, \hat{T}_3 は $SU(2)_L, SU(3)_C$ の生成子, Y はハイパーチャージを表す. 式 (2.3) はヒッグス場 Ψ に関する項を表していて,

$$D_\mu \Phi = \left[\partial_\mu - ig A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} + i \frac{g_Y}{2} B_\mu \right] \Phi, \quad (2.10)$$

$$V(\Phi) = -\mu^2 |\Phi|^2 + \lambda |\Phi|^4, \quad (2.11)$$

である. ここで定数 $\mu^2 > 0$ かつ $\lambda > 0$ である. 式 (2.4) はフェルミオン場とヒッグス場の相互作用項を表していて, $f_{ij}^{(u)}, f_{ija'}^{(d)}, f_{ij}^{(e)}$ は湯川結合定数である.

2.2 フェルミオンの質量

標準模型はカイラル変換に対して不変な理論で書かれているため, ラグランジアンレベルで質量を持つことは禁止されている.

式 (2.11) よりヒッグス場のポテンシャルは $|\Phi| = \sqrt{\mu^2/2\lambda}$ で最小値をとる [15]. ヒッグス場の真空期待値を,

$$\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} \frac{v}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

$$v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \quad (2.13)$$

のように取れば, フェルミオンは湯川相互作用項の Φ に比例する部分から質量項を獲得する [15]. 湯川相互作用項のヒッグス場の真空期待値に比例する部分だけ取り出すと以下のようなになる.

$$\mathcal{L}_{mass} = \left[-M_{ij}^{(u)} \overline{u_{Li}} u_{Rj} - M_{ij}^{(d)} \overline{d_{Li}} d_{Rj} - M_{ij}^{(e)} \overline{e_{Li}} e_{Rj} \right] + \text{h.c.} \quad (2.14)$$

ここで,

$$\begin{aligned} M_{ij}^{(u)} &\equiv f_{ij}^{(u)} \frac{v}{\sqrt{2}}, \\ M_{ij}^{(d)} &\equiv f_{ij}^{(d)} \frac{v}{\sqrt{2}}, \\ M_{ij}^{(e)} &\equiv f_{ij}^{(e)} \frac{v}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

と表し, $M^{(u)}$, $M^{(d)}$, $M^{(e)}$ はそれぞれアップ型クォーク, ダウン型クォーク, 電子型レプトンの質量行列となる. ここで得られた質量行列は一般に対角的でないが, 2つのユニタリー変換で対角化可能である.

$$\begin{aligned} M_{\text{diag}}^{(u)} &= \text{diag}(m_u, m_c, m_t) = V_L^{(u)\dagger} M^{(u)} V_R^{(u)} \\ M_{\text{diag}}^{(d)} &= \text{diag}(m_d, m_s, m_b) = V_L^{(d)\dagger} M^{(d)} V_R^{(d)} \\ M_{\text{diag}}^{(e)} &= \text{diag}(m_e, m_\mu, m_\tau) = V_L^{(e)\dagger} M^{(e)} V_R^{(e)} \end{aligned} \quad (2.16)$$

以上のように, 標準模型ではアップ型クォーク, ダウン型クォーク, 荷電レプトンについてはヒッグスの真空期待値により質量を持つが, ニュートリノについては右巻きニュートリノが導入されておらず湯川相互作用項も書くことができないため, ニュートリノは質量を持たない.

2.3 標準模型を超える物理

2.3.1 ニュートリノ振動

ニュートリノ振動は伝播するニュートリノが時間発展し世代を変化させる現象で, 1950年代後半から1960年台前半にポンテコルボや牧-中川-坂田により提唱された [16, 17]. 実験では, 1998年にスーパーカミオカンデ (Super-Kamiokande, SK) 実験によって発見された [18]. 3世代のニュートリノがあるときエネルギー E を持つ, ν_α の時刻 t における ν_β ($\alpha, \beta = e, \mu, \tau$) への振動確率は以下の式で与えられる.

$$\begin{aligned} P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} &\simeq \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i>j} \text{Re}(U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ij}^2}{4E} t \right) \\ &\quad + 2 \sum_{i>j} \text{Im}(U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j}) \sin \left(\frac{\Delta m_{ij}^2}{2E} t \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

導出は巻末の付録Aに記す. ここで, $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$ ($i, j = 1, 2, 3$) は異なる質量固有状態間のニュートリノの質量二乗差である. $U_{\alpha i}$ は混合行列であり, 次のように取る.

$$U = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & c_{23} & s_{23} \\ & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & & s_{13} e^{-i\delta_{\text{CP}}} \\ & 1 & \\ -s_{13} e^{i\delta_{\text{CP}}} & & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} \\ -s_{12} & c_{12} \\ & & 1 \end{pmatrix} P \quad (2.18)$$

ここで, $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$, $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ と表した. $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$ はニュートリノの混合角であり, $0^\circ \leq \theta_{ij} \leq 90^\circ$ である. δ_{CP} ($-\pi \leq \delta_{\text{CP}} < \pi$) はディラック位相であり, ニュートリノの混合行列が持つ CP 対称性を破る位相パラメータである. P は対角行列で, ニュートリノがディラック型である場合には単位行列 $P = \text{diag}(1, 1, 1)$, マヨラナ型である場合には $P = \text{diag}(1, e^{i\alpha_{21}/2}, e^{i\alpha_{31}/2})$ である. ここで, α_{21}, α_{31} ($0 \leq \alpha_{ij} < 2\pi$) はマヨラナ位相と呼ばれる. ユニタリー行列 U はポンテコルボ-牧-中川-坂田 (PMNS) 行列と呼ばれている.

	$\sin^2 \theta_{12}$	$\sin^2 \theta_{23}$	$\sin^2 \theta_{13}$	Δm_{21}^2 [eV ²]	$\Delta m_{3\ell}^2$ [eV ²]
NH	0.304	0.573	0.02219	7.42×10^{-5}	$+2.517 \times 10^{-3}$ ($\ell = 1$)
IH	0.304	0.575	0.02238	7.42×10^{-5}	-2.498×10^{-3} ($\ell = 2$)

表 2.2: 複数のニュートリノ振動実験から求めたニュートリノの混合角, 及び質量二乗差 [19].

式 (2.17) より $\alpha \neq \beta$ の時, $P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} \neq 0$ のためには, $\theta_{ij} \neq 0$ と $\Delta m_{ij}^2 \neq 0$ である必要がある. 実際ニュートリノ振動の精密測定により, 表 2.2 に示したように, 3 個の混合角と 2 つの質量二乗差が測定されている [19]. ニュートリノの質量差が 2 つ観測されていることから, 少なくとも 2 世代のニュートリノが質量を持つことが分かる. 標準模型ではニュートリノは質量を持たないため, ニュートリノ振動現象を説明するためには標準模型は拡張される必要がある.

現在までにニュートリノ質量の絶対値 (m_1, m_2, m_3) は分かっておらず, 質量の大きさについては, 順階層型 (Normal Hierarchy, NH) である $m_1 < m_2 < m_3$ の可能性と, 逆階層型 (Inverted Hierarchy, IH) である $m_3 < m_1 < m_2$ の可能性がある. さらに, ニュートリノの CP 対称性の破れを測定する T2K 実験では, CP が保存する $\delta_{CP} = 0$ である可能性を 3σ (99.7%) 信頼区間で排除している [20].

2.3.2 ニュートリノ質量

2.3.1 節で, ニュートリノが質量を持たなければならないことを示した. しかし, 標準模型ではニュートリノは質量を持たない. それは, 標準模型には左巻きニュートリノのみが導入されているためである.

ニュートリノに質量を持たせるために, 標準模型に新たに, 3 世代のゲージ一重項の場 (以下, 右巻きニュートリノと書く,) ν_{RI} ($I=1,2,3$) を導入する. 右巻きニュートリノを加えたことにより, ラグランジアンは以下のように与えられる.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SM} + i\overline{\nu_{RI}}\not{\partial}\nu_{RI} + \left[-F_{\alpha I}\overline{L}_\alpha\Phi\nu_{RI} - \frac{M_{MIJ}}{2}\overline{\nu_{RI}^c}\nu_{RJ} \right] + \text{h.c.} \quad (2.19)$$

ここで, ν_{RI}^c は ν_{RI} の荷電共役 $\nu_{RI}^c = C\overline{\nu_{RI}}^T$ を表す¹. \mathcal{L}_{SM} に追加された第一項は右巻きニュートリノの運動項, 第二項は湯川相互作用項, 第三項は右巻きニュートリノのマヨラナ質量項を表す². $F_{\alpha I}$ は左巻きレプトン二重項 L_α と右巻きニュートリノ ν_{RI} , ヒッグス二重項 Φ 間の湯川結合定数である.

電弱対称性が自発的に破れ, ヒッグス場 Φ が (2.13) 式真空期待値 v を持つと, ニュートリノは標準模型の他のフェルミオンと同じように質量,

$$M_D \equiv F\langle\Phi\rangle = \frac{vF}{\sqrt{2}}, \quad (2.20)$$

を持つ. M_D をディラック質量と呼ぶ. これとマヨラナ質量項を合わせて, ニュートリノ質量項のラグランジアンは,

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_{\nu\text{mass}} &= M_{D\alpha I}\overline{\nu_{L\alpha}}\nu_{RI} + \frac{M_{MIJ}}{2}\overline{\nu_{RI}^c}\nu_{RJ} + \text{h.c.} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \overline{\nu_L} & \overline{\nu_R^c} \end{pmatrix} \hat{M} \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R \end{pmatrix} + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

¹ $C = i\gamma^0\gamma^2$ と定義した.

²一般に電荷を持つ場ではこのような項があるとゲージ対称性を破るが, 右巻きニュートリノはゲージ一重項であるため禁止することができない.

と表すことができる。ここで \hat{M} は 6×6 の質量行列であり、以下のように表される。

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & M_D \\ M_D^T & M_M \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

またこの行列は $\hat{M}^T = \hat{M}$ の対称行列である。 \hat{M} が対称行列であるから、ユニタリー行列を用いて対角化することができる。 $M_D \ll M_M$ を仮定すると、 \hat{M} は次の行列で近似的にブロック対角化することができる。

$$\hat{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 & \Theta \\ -\Theta^\dagger & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

$|\Theta| \ll 1$ は 3×3 の複素行列である。 $|\Theta| \ll 1$ を仮定すると、 \hat{U}_1 は $\mathcal{O}(\Theta)$ で近似的にユニタリー性を満たす。

$$\hat{U}_1^\dagger \hat{U}_1 = \hat{U}_1 \hat{U}_1^\dagger = \begin{pmatrix} \mathbf{1} + \Theta\Theta^\dagger & 0 \\ 0 & \mathbf{1} + \Theta^\dagger\Theta \end{pmatrix} = \mathbf{1} + \mathcal{O}(\Theta^2). \quad (2.24)$$

この行列を用いて \hat{M} を次のようにブロック対角化する。

$$\begin{aligned} \hat{M}^{\text{bd}} = \hat{U}_1^\dagger \hat{M} \hat{U}_1^* &= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\Theta \\ \Theta^\dagger & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & M_D \\ M_D^T & M_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\Theta \\ \Theta^\dagger & \mathbf{1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -M_D\Theta^T - \Theta M_D^T + \Theta M_M \Theta^T & M_D - \Theta M_D^T \Theta^* - \Theta M_M \\ -\Theta^\dagger M_D \Theta^T + M_D^T - M_M \Theta^T & \Theta^\dagger M_D + M_D^T \Theta^* + M_M \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$= \begin{pmatrix} M_V & 0 \\ 0 & M_N \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

$\mathcal{O}(\Theta^2)$ を無視すれば、 $\mathcal{O}(\Theta)$ までで次のような関係が得られる。

$$\Theta \simeq M_D M_M^{-1}, \quad (2.27)$$

$$M_V \simeq -M_D M_M^{-1} M_D^T, \quad (2.28)$$

$$M_N \simeq M_M. \quad (2.29)$$

$M_D \ll M_M$ だから (2.27) より、 $|\Theta| \ll 1$ は満たされている。また (2.28) を見ると、 $M_D M_M^{-1} \ll 1$ であるから M_V はディラック質量 M_D と比べて非常に小さくなる。これにより観測されているニュートリノが標準模型の他のフェルミオンに比べ小さな質量を持つことが自然に説明できる。この機構をシーソー機構 [4–8] と呼ぶ。

M_V は 3×3 の対称行列であるから 3×3 のユニタリー行列 U によって次のように対角化できる。

$$U^\dagger M_V U^* = \text{diag}(m_1, m_2, m_3) \equiv D_V. \quad (2.30)$$

こうして得られた m_1, m_2, m_3 が観測されている3種類の軽いニュートリノ（アクティブニュートリノ）の質量を表す。ここで用いたユニタリー行列 U は式 (2.18) の PMNS 行列である。

2.3.3 カサス-イバーラパラメトリゼーション

2.3.2 節で導入したニュートリノの湯川結合定数 $F_{\alpha I}$ 、右巻きニュートリノのマヨラナ質量 M_M は自由なパラメータであるが、ニュートリノ振動実験で測定される観測値 ($\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}, \Delta m_{21}^2, \Delta m_{3\ell}$) を説明する必要がある。この節では、これらの観測値を常に表すためのパラメトリゼーションを導出する。

右巻きニュートリノ ν_{RI} が質量固有状態である基底,

$$M_M = D_N \equiv \text{diag}(M_1, M_2, M_3), \quad M_I > 0, \quad (I = 1, 2, 3), \quad (2.31)$$

ととる³.

(2.30) で表された D_ν を書き直すと次のようになる.

$$\begin{aligned} D_\nu &= U^\dagger M_\nu U^* = \text{diag}(m_1, m_2, m_3) \\ &= -U^\dagger M_D D_N^{-1} M_D^T U^* \\ &= -\langle \phi^0 \rangle^2 U^\dagger F D_N^{-1} F^T U^*. \end{aligned} \quad (2.32)$$

(2.32) の両辺に両側から $D_\nu^{-1/2} = \text{diag}(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \sqrt{m_3})$ を掛けると次のように書くことができる.

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= -\langle \phi^0 \rangle^2 D_\nu^{-1/2} U^\dagger F D_N^{-1/2} D_N^{-1/2} F^T U^* D_\nu^{-1/2} \\ &= \Omega \Omega^T. \end{aligned} \quad (2.33)$$

ここで Ω を次式のような 3×3 の複素直交行列と定義した.

$$\Omega \equiv -i \langle \phi^0 \rangle D_\nu^{-1/2} U^\dagger F D_N^{-1/2}. \quad (2.34)$$

この式を F について解けば, 湯川結合定数は

$$F = \frac{i}{\langle \phi^0 \rangle} U D_\nu^{1/2} \Omega D_N^{1/2}, \quad (2.35)$$

のように表すことができる. これをカサス-イバーラパラメトリゼーションと呼ぶ [21]. このとき湯川結合定数はニュートリノ混合角 $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$, デイラック位相 δ_{cp} , マヨラナ位相 α_{21}, α_{23} , 軽いニュートリノの質量 m_1, m_2, m_3 , マヨラナ質量 M_1, M_2, M_3 , 任意の 3×3 複素直交行列 Ω により表すことができる.

2.3.4 宇宙バリオン数非対称性

バリオンは陽子や中性子, すなわちクォーク 3 つから構成される粒子のことを指し, 陽子, 中性子がバリオン電荷 1 となるようにすると, クォーク場 ($u_{Li}, u_{Ri}, d_{Li}, d_{Ri}$) はバリオン電荷 1/3 を持つ. バリオンの数密度 n_b と反バリオンの数密度 $n_{\bar{b}}$ を用いて, バリオン数密度 n_B を

$$n_B = n_b - n_{\bar{b}}, \quad (2.36)$$

と定義する. 宇宙で観測されるバリオン数が $n_B = 0$ であれば, “バリオン対称な宇宙” であるといい, $n_B \neq 0$ であれば, “バリオン非対称な宇宙” であるという.

バリオン数 n_B は光子の数密度 n_γ との比,

$$\eta \equiv \frac{n_B}{n_\gamma}, \quad (2.37)$$

$$(2.38)$$

を用いて評価される. ここで, 温度 T における n_γ は

$$n_\gamma = \frac{g_\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{p} f_\gamma(\mathbf{p}) = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3, \quad (2.39)$$

³右巻きニュートリノはシングレットであるので, ν_{RI} の再定義により, 一般性を失うことなく M_M は対角的に取ることができる.

$g_\gamma = 2$ は光子の自由度, $f_\gamma(\mathbf{p}) = 1/[\exp(E/T) - 1]$, $E = |\mathbf{p}|$ で与えられる.

現在宇宙に存在する軽元素の量はビッグバン元素合成 (Big-Bang nucleosynthesis, BBN) と呼ばれる理論により非常によく説明されることが知られている. 図 2.1 から, BBN により現在の軽元素の残存量を矛盾なく説明するためには, バリオン数と光子の数密度の比 η^{bbn} は,

$$5.8 \times 10^{-10} \leq \eta^{bbn} \leq 6.5 \times 10^{-10} \quad (95\% \text{ CL}). \quad (2.40)$$

と予言される [22]. また, 宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) の観測 [23] は 1σ の誤差で, $\eta = 6.12 \pm 0.04$ を与える.

また, バリオン数の非対称度はバリオン数の密度 n_B とエントロピー密度 s との比で,

$$Y_B \equiv \frac{n_B}{s}, \quad (2.41)$$

と表すこともできる. エントロピー密度 s と n_γ の比は,

$$\frac{s}{n_\gamma} = \frac{\frac{2\pi^2}{45} g_* T^3}{\frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3} \simeq 7.04, \quad (2.42)$$

となる. ここで, g_* は内部自由度であり, $g_* = 3.91$ である. よって, Y_B と η の関係は,

$$\eta = \frac{s}{n_\gamma} \frac{n_B}{s} \simeq 7.04 Y_B, \quad (2.43)$$

で与えられる. したがって CMB による現在のバリオン数の存在量 Y_B^{obs} は, 1σ の誤差で,

$$Y_B^{obs} = (8.69 \pm 0.057) \times 10^{-11}, \quad (2.44)$$

と与えられる. つまり現在の宇宙は“バリオン非対称な宇宙”である.

したがって, BBN による元素合成が成功するためには, BBN の起きる $\mathcal{O}(1)$ MeV の宇宙よりも以前 (温度 $T \gg 1$ MeV) に宇宙バリオン数非対称性 (Baryon Asymmetry of the Universe, BAU) の観測量 Y_B^{obs} が存在しなければならない.

宇宙の平坦性問題, 地平線問題, CMB の密度揺らぎの起源などの観点から, インフレーション宇宙が支持されている. インフレーション理論 [24–28] (詳しくは文献 [29, 30] においてレビューされている.) を仮定すると, インフレーション期の宇宙は真空のエネルギーが支配的であり, それ以前にバリオン数が存在していたとしても, インフレーション終了時には希釈され 0 とみなすことができる. そのため, インフレーション終了以降からビッグバン元素合成までにバリオン数非対称性が作られる必要がある. この非対称性を作る機構のことをバリオン数生成機構 (バリオジェネシス, baryogenesis) と呼ぶ.

バリオン数非対称な宇宙が作られるためにはサハロフの 3 条件と呼ばれる条件が全て満たされる必要がある. それらの条件は,

- バリオン数を破る過程が存在すること
- C 対称性, CP 対称性を破る過程が存在すること
- 熱平衡からずれた過程が存在すること

である. 1つ目の条件はインフレーション直後の宇宙ではバリオン数が 0 であるので, バリオン数を作るため, バリオン数を生成する過程が必要なためである. また C 対称性が存在するとバリオンを生成する過程と反バリオンを生成する過程が同数起きてしまうため C 対称性が破れていることが必要である. さらに CP 対称性が存在すると, バリオンを作る過程とバリオンを減らす過程が同じだ

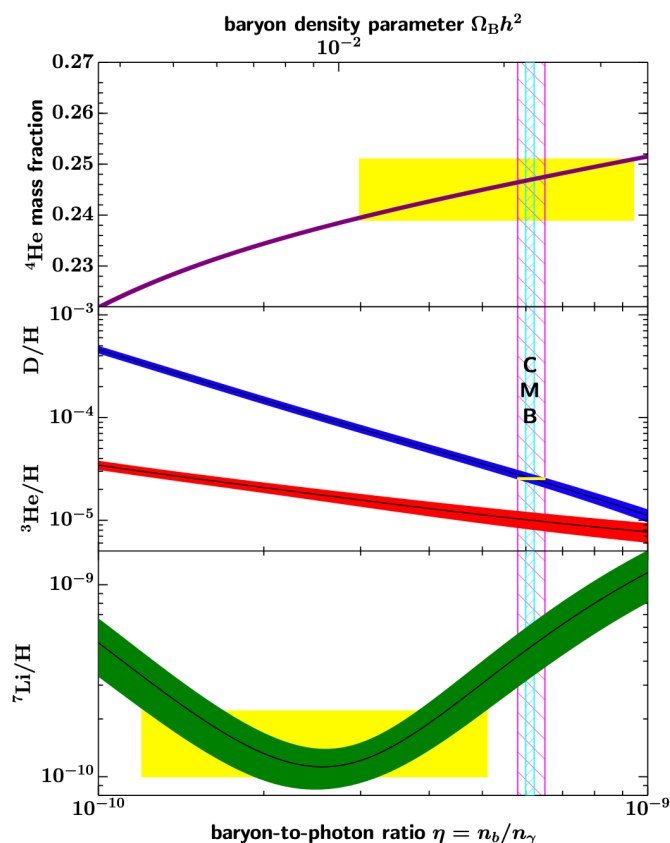


図 2.1: 軽元素存在量の予言値と観測値. 紫, 青, 赤, 緑の帯はそれぞれ BBN により予言される ${}^4\text{He}$, D , ${}^3\text{He}$, ${}^7\text{Li}$ の存在量を表す. 黄色の箱はそれぞれの軽元素存在量の観測値を表している. マゼンタとシアンの斜線はそれぞれビッグバン元素合成による η の予言値, 宇宙マイクロ波背景放射による η の観測値である. 図は文献 [22] より転載した.

け起きてしまう. このため C 対称性と CP 対称性が両方破れていることが必要である. 3つ目に, 熱平衡状態にあると, 反応が可逆反応となり釣り合ってしまう. このためバリオン数を生成するためには熱平衡からずれた反応が存在することが必要である.

標準模型では第一の条件は標準模型のラグランジアンはバリオン数を破っていない. しかし, スファレロンと呼ばれる量子異常の効果により宇宙の高温領域 (温度が $\mathcal{O}(10^2)$ GeV 以上) ではバリオン数が活発に破れている. このため 1つ目の条件は満たすことができる. 二番目に標準模型では弱い相互作用により C 対称性は大きく破れている. さらに, カビボ-小林-益川 (CKM) 行列の複素位相により CP 対称性が破れている. しかし, この破れの効果は小さく, 観測されているバリオン数非対称性を説明できるほど大きくはないことが知られている. したがって, 二番目の条件は満足できない. 三つ目の熱平衡からずれた過程の存在は電弱対称性の破れが一次相転移であれば満たすことができる. しかし, 観測されたヒッグスの質量領域では電弱対称性の破れは一次相転移でないことが示されているため, 三つ目の条件も満たすことができない. このことから, 宇宙バリオン数の非対称性を説明するためには標準模型に何らかの拡張をする必要がある. 本研究では, 前節でニュートリノの質量を説明するために導入した, 右巻きニュートリノがバリオン数の生成を担うレプトン数生成機構 (レプトジェネシス, leptogenesis) に着目する. レプトン数生成機構によってバリオン数をどのように生成するか説明は次章で行う.

第3章 右巻きニュートリノの反応によるバリオン数の生成

前章において、標準模型では宇宙のバリオン数非対称性が説明できないことをみた。この章ではニュートリノに質量を持たせるために導入した右巻きニュートリノにより BAU が説明できることを見ていく。

3.1 レプトン数生成機構

標準模型では、バリオン数 B 、レプトン数 L はラグランジアンレベルでは保存しているが、スファレロンと呼ばれる量子異常の効果により、バリオン数、レプトン数ともに破れる [31]。この破れは B と L で同じだけ起こるので、バリオン数とレプトン数の和 ($B+L$) は破れている。しかしバリオン数とレプトン数の差 ($B-L$) は保存する。 B の生成量 Y_B と $B-L$ の生成量 Y_{B-L} は、

$$Y_B = \frac{8N_f + 4N_H}{22N_f + 13N_H} Y_{B-L}, \quad (3.1)$$

で与えられる。ここで、 N_f はフェルミオンの世代数、 N_H はヒッグス二重項の数を表す。標準模型では、 $N_f = 3$ 、 $N_H = 1$ なので、

$$Y_B = \frac{28}{79} Y_{B-L}, \quad (3.2)$$

の関係で表される。スファレロンによって作られる B と L の量は等しい。スファレロン過程以外で L が生成されれば、 $Y_{B-L} \neq 0$ となるため、その非対称性はスファレロン過程によりバリオン数の非対称性にも転換され、 $Y_B \neq 0$ となる。 B の生成量が L の生成量に比べて十分小さいと、 $(B-L)$ はスファレロン過程以外で作られた L に対応して相対的に逆符号の量となる。スファレロンによる B と L の破れは宇宙の温度がおよそ $T_{sph} \approx 131.7 \text{ GeV}$ の時期まで働くため [32]、レプトン数の破れを通じて、バリオン数を破るためには、宇宙の温度が $T > T_{sph}$ までにレプトン数が破れている必要がある。

非常に高温の宇宙において、右巻きニュートリノが崩壊することにより、レプトン数の非対称性 $Y_L = n_L/s$ を生成し、スファレロン過程により、作られたレプトン数をバリオン数に転換するバリオン数の生成機構をレプトン数生成機構（レプトジェネシス, leptogenesis） [9] という。バリオン数が生成されるためにはサハロフの3条件を全て満足することが必要であった。レプトン数が生成されるためにも同様に、

- レプトン数を破る過程が存在すること
- C 対称性, CP 対称性を破る過程が存在すること
- 熱平衡からずれた過程が存在すること

の条件が必要となる。これらがどのように実現されているかを以下で見ていく。

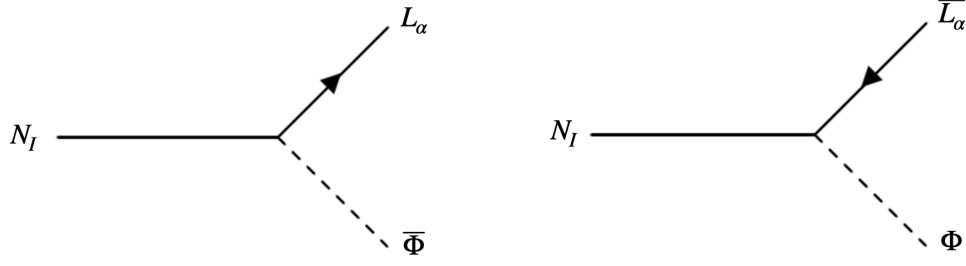


図 3.1: 右巻きニュートリノのツリーレベル崩壊過程. 左がレプトンと反ヒッグス, 右が反レプトンとヒッグスへの崩壊を表す.

3.1.1 レプトン数を破る過程

式 (2.19) で与えられるラグランジアンを考える. ここでは右巻きニュートリノ ν_{RI} のマヨラナ質量が対角的 $M_M = D_N = \text{diag}(M_1, M_2, M_3)$ の基底を取る. シーソー機構を考えると, 軽いニュートリノ (以下ではアクティブニュートリノと呼ぶ) の質量は M_ν で与えられ, その質量固有値は m_1, m_2, m_3 である. (2.29) の質量を持つ重いニュートリノ N_I も同時に存在する. このニュートリノの質量はほとんどマヨラナ質量であり, このニュートリノ N_I と右巻きニュートリノ ν_{RI} との関係は,

$$N_I \simeq \nu_{RI}, \quad (3.3)$$

であり, ほとんど右巻きニュートリノと同じようにみなせる¹. したがって, 本論文では重いニュートリノ N_I も右巻きニュートリノと呼ぶ. N_I は右巻きニュートリノ湯川相互作用項,

$$-F_{\alpha I} \bar{L}_\alpha \Phi N_I + \text{h.c.}, \quad (3.4)$$

を通じて相互作用する.

右巻きニュートリノ N_I のマヨラナ質量項

$$-\frac{M_I}{2} \bar{N}_I^c N_I + \text{h.c.}, \quad (3.5)$$

に着目する. N_I はレプトン数 1 を持つ場である. $N_I^c = \bar{C} N_I^T$ であるから \bar{N}_I^c は,

$$\bar{N}_I^c = -N_I^T C^\dagger. \quad (3.6)$$

よって, マヨラナ質量項 (3.5) はレプトン数を 2 破るような項になっている. したがって, 標準模型にマヨラナ質量を持つ右巻きニュートリノを導入した理論ではレプトン数が破れている.

3.1.2 CP 対称性の破れた過程

右巻きニュートリノはマヨラナ粒子であるため湯川相互作用を通じ, レプトン, 反レプトンの両方へ崩壊することができる.

$$N_I \rightarrow L_\alpha + \bar{\Phi}, \quad (3.7)$$

$$\rightarrow \bar{L}_\alpha + \Phi. \quad (3.8)$$

¹ ν_{RI} と $\nu_{L\alpha}$ との混合 $\Theta_{\alpha I}$ が非常に小さいため無視した.

この2つの崩壊率はツリーレベルでは等しく,

$$\begin{aligned}\Gamma(N_I \rightarrow L_\alpha + \bar{\Phi}) &= \Gamma(N_I \rightarrow \bar{L}_\alpha + \Phi) \\ &= \frac{F^\dagger I_\alpha F_{\alpha I}}{16\pi} M_I,\end{aligned}\quad (3.9)$$

となる. N_I の崩壊過程において, (3.7), (3.8) が主要な寄与を占める. したがって, N_I の崩壊率は全体で以下ようになる.

$$\begin{aligned}\Gamma_{N_I} &= \sum_\alpha \Gamma(N_I \rightarrow L_\alpha + \bar{\Phi}) + \sum_\alpha \Gamma(N_I \rightarrow \bar{L}_\alpha + \Phi) \\ &= \frac{(F^\dagger F)_{II}}{8\pi} M_I.\end{aligned}\quad (3.10)$$

崩壊の反応率 γ_{N_I} は,

$$\gamma_{N_I} \simeq n_{N_I}^{eq} \frac{K_1(\sqrt{a_I} z)}{K_2(\sqrt{a_I} z)} \Gamma_{N_I} \quad (3.11)$$

$$= \frac{(F^\dagger F)_{II}}{8\pi^3} M_I^4 a_I \sqrt{a_I} \frac{K_1(\sqrt{a_I} z)}{z}. \quad (3.12)$$

で定義される.

$$a_I = \left(\frac{M_I}{M_1} \right)^2, \quad (3.13)$$

$$z = \frac{M_1}{T}, \quad (3.14)$$

とした. ここで, z は温度 T の逆数を M_1 で規格化したものであるから, 宇宙の温度 T が下がる, つまり時刻が進むほど z は大きな値をとり, $z \sim 1$ が右巻きニュートリノ N_1 の崩壊が逆崩壊に比べて優勢になる典型的な値である. また $K_i(z)$, ($\text{Re}[z] > 0$), ($i = 1, 2, \dots$) は変形ベッセル関数

$$\frac{K_1(z)}{z} = \int_1^\infty dy \sqrt{y^2 - 1} e^{-zy}, \quad (3.15)$$

$$\frac{K_2(z)}{z} = \int_1^\infty dy y \sqrt{y^2 - 1} e^{-zy}, \quad (3.16)$$

である. しかし, 1ループレベルを考えると, ツリーと1ループの干渉による効果で崩壊率に違いが生じる (図 3.2). この違いはパラメータ ε_I を用いて

$$\begin{aligned}\varepsilon_I &\equiv \frac{\sum_\alpha \Gamma(N_I \rightarrow L_\alpha + \bar{\Phi}) - \sum_\alpha \Gamma(N_I \rightarrow \bar{L}_\alpha + \Phi)}{\sum_\alpha \Gamma(N_I \rightarrow L_\alpha + \bar{\Phi}) + \sum_\alpha \Gamma(N_I \rightarrow \bar{L}_\alpha + \Phi)} \\ &= \frac{1}{8\pi} \sum_{J \neq I} \frac{\text{Im}(F^\dagger F)_{IJ}^2}{(F^\dagger F)_{II}} \left[f\left(\frac{a_J}{a_I}\right) + g\left(\frac{a_J}{a_I}\right) \right],\end{aligned}\quad (3.17)$$

と表される [9]. 関数 $f(x)$, $g(x)$ は以下のようにした.

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 + (1+x) \log\left(\frac{x}{1+x}\right) \right\}, \quad (3.18)$$

$$g(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1-x}. \quad (3.19)$$

$f(x)$ はツリーとヴァーテックス補正の1ループとの干渉から生じる寄与, $g(x)$ は輻射補正の1ループとの干渉から生じる寄与である. この ε_I が CP 対称性の破れの大きさを表すパラメータである. (3.17) 式から湯川相互作用に複素位相があれば, $\varepsilon_I \neq 0$ がとなる. (2.35) のパラメータ表現をとると,

$$F^\dagger F = \frac{1}{\langle \phi^0 \rangle^2} D_N^{\frac{1}{2}} \Omega^\dagger D_\nu \Omega D_N^{\frac{1}{2}}, \quad (3.20)$$

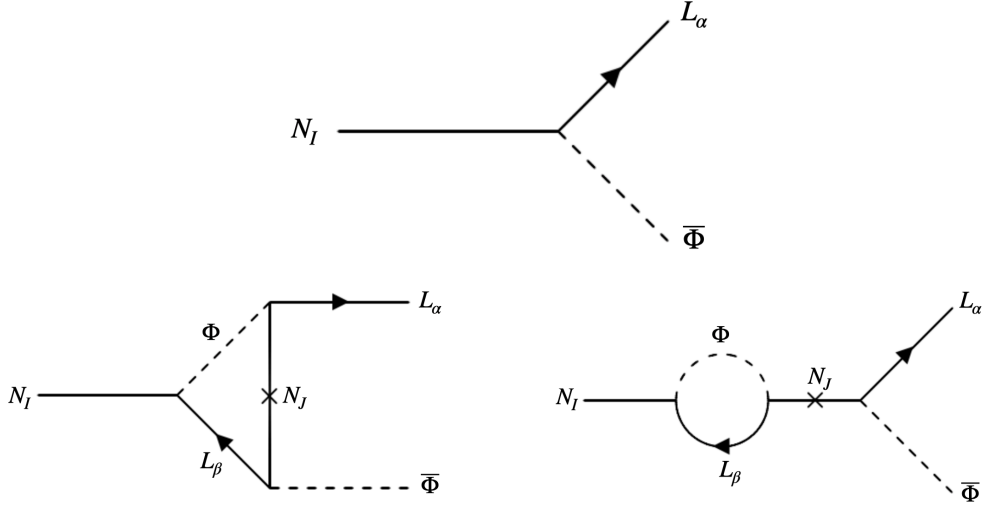


図 3.2: $N_I \rightarrow L_\alpha + \bar{\Phi}$ のツリーレベルと 1 ループレベルの寄与.

である. D_N, D_ν は実数だから, $\varepsilon_I \neq 0$ であるためには, Ω が複素行列であればよい. Ω は複素直行列なので, CP 対称性を破る過程が存在するという条件も満たすことができる.

右巻きニュートリノ N_I の質量 M_I が階層的 ($M_1 \ll M_2 \ll M_3$) の場合を考える. この場合にレプトジェネシスに有効なのは, 最も軽い右巻きニュートリノ N_1 に依るものである. $x \gg 1$ のとき,

$$f(x) \simeq -\frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (3.21)$$

$$g(x) \simeq -\frac{1}{\sqrt{x}}, \quad (3.22)$$

であるので,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{8\pi} \sum_{j=2,3} \frac{\text{Im}(F^\dagger F)_{1j}^2}{(F^\dagger F)_{11}} \left[f\left(\frac{M_j^2}{M_1^2}\right) + g\left(\frac{M_j^2}{M_1^2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{8\pi} \left[\frac{1}{\langle \phi^0 \rangle^2 \sum_i |\Omega_{i1}|^2 m_i M_1} \left\{ \left(\sum_j \Omega_{j1}^* \Omega_{j2} m_j \right)^2 M_1 M_2 \frac{-3M_1}{2M_2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\sum_j \Omega_{j1}^* \Omega_{j3} m_j \right)^2 M_1 M_3 \frac{-3M_1}{2M_3} \right\} \right] \\ &= -\frac{3}{16\pi \langle \phi^0 \rangle^2 \sum_i |\Omega_{i1}|^2 m_i} \left[\left(\sum_j \Omega_{j1}^* \Omega_{j2} m_j \right)^2 + \left(\sum_j \Omega_{j1}^* \Omega_{j3} m_j \right)^2 \right] M_1, \quad (3.23) \end{aligned}$$

となる. よって, CP の破れ ε_1 は一番軽い右巻きニュートリノ質量 M_1 に比例する. このことから, レプトジェネシスのシナリオにより BAU の観測を説明するための右巻きニュートリノ質量には下限が存在し, 最も軽い右巻きニュートリノ質量 $M_{lightest} \gtrsim \mathcal{O}(10^9)$ GeV であることが見積もられている [33].²

²右巻きニュートリノ ν_R がインフラトンの崩壊によって非熱的に生成されるシナリオでは, 質量の加減は $\mathcal{O}(10^6)$ GeV まで下げることができる [34–36].

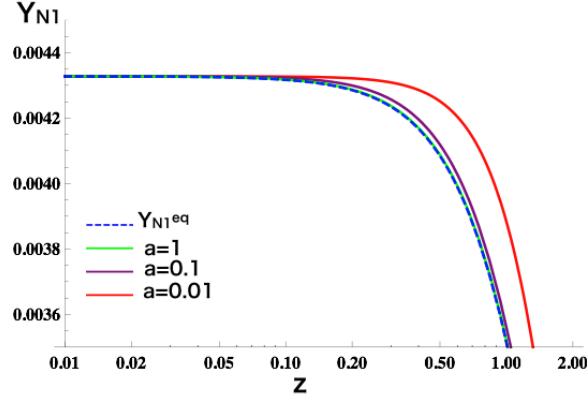


図 3.3: Y_{N_I} の熱平衡からのずれの例. $a \equiv \frac{\gamma_{N_I}}{sH(T)z}$ とし, $a = 1, 0.1, 0.01$ の時の熱平衡からのずれ方をみた.

3.1.3 熱平衡からずれた過程

右巻きニュートリノ残存量について考える. 右巻きニュートリノの崩壊のみを考えた場合, 以下のような発展方程式に従う.

$$\frac{Y_{N_I}}{z} = -\frac{1}{sH(T)z} \left(\frac{Y_{N_I}}{Y_{N_I}^{eq}} - 1 \right) \gamma_{N_I}, \quad (3.24)$$

ここで, s はエントロピー密度, $H(T)$ は温度 T での宇宙の膨張率を表し, それぞれ以下の式で表される.

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g_{*s} T^3, \quad (3.25)$$

$$H(T) = \sqrt{\frac{\pi^2 g_{*s}}{90}} \frac{T^2}{M_{pl}} \quad (3.26)$$

また, $Y_{N_I}^{eq}$ は熱平衡の時の N_I の残存量であり,

$$Y_{N_I}^{eq} = \frac{45}{2\pi^4 g_{*s}} a_I z^2 K_2(\sqrt{a_I} z), \quad (3.27)$$

で表される. (3.24) を見ると, ある時刻で $Y_{N_I} = Y_{N_I}^{eq}$ の時, 右辺は 0 となり, その時刻において Y_{N_I} は変化しない. ところが, N_I は質量を持つ粒子であるため, $Y_{N_I}^{eq}$ は z が大きくなると減少し, (3.24) の右辺は 0 からずれる. その際, (3.24) の右辺は, Y_{N_I} を $Y_{N_I}^{eq}$ に近づけるように働くが, その近づき方は,

$$a \equiv \frac{\gamma_{N_I}}{sH(T)z}, \quad (3.28)$$

の大きさによって決まる. $a < 1$ であると Y_{N_I} の熱平衡への近づき方は緩やかになり, N_I の残存量は熱平衡からずれる. つまり, 熱平衡からずれた過程が存在するためには, 右巻きニュートリノの反応率 γ_{N_I} が宇宙の膨張率 $H(T)$ よりも小さくなる必要がある. (3.28) の分母を見ると T^4 に比例, つまり, z^{-4} に比例している. 一方, γ_{N_I} は変形ベッセル関数 $K_2(z)$ が $z \gg 1$ で指数関数的に小さくなる関数であるから, 右巻きニュートリノの崩壊は熱平衡からずれて起きる. よって三番目の条件も満たすことができる.

以上から, レプトン数を生成するための条件を全て満たすことができるので, レプトン数生成が可能となる.

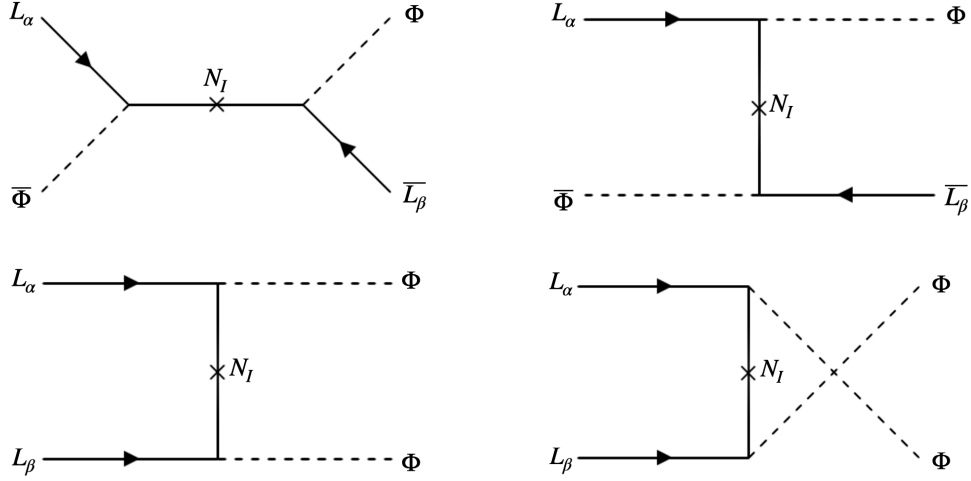


図 3.4: 右巻きニュートリノが中間状態に現れ, 始状態から終状態でレプトン数が 2 減る ($\Delta L=2$ の) 過程. 図の上段 2 つが $L_\alpha + \bar{\Phi} \rightarrow \bar{L}_\beta + \Phi$ の過程. 下段の 2 つが $L_\alpha + L_\beta \rightarrow \Phi + \Phi$ の過程.

3.2 散乱過程

前節で右巻きニュートリノの崩壊により, レプトン数を作ることができるを見た. この節では, 右巻きニュートリノやレプトンの散乱の効果について見ていく. 各散乱過程 $i+j \rightarrow k+l$ の反応率は次式で定義される.

$$\gamma(i+j \rightarrow k+l) \equiv \frac{T}{64\pi^4} \int_{(m_i+m_j)^2}^{\infty} ds \hat{\sigma}(s) \sqrt{s} K_1 \left(\frac{\sqrt{2}}{T} \right). \quad (3.29)$$

ここで, m_i, m_j は粒子 i, j の質量, $\hat{\sigma}(s)$ は $i+j \rightarrow k+l$ の無次元化された散乱断面積を表す. 各過程の $\hat{\sigma}(s)$ は巻末の付録 B に載せている.

3.2.1 $\Delta L=2$ の過程

右巻きニュートリノはマヨラナ質量項を持つためレプトン数を 2 破ることができる. 右巻きニュートリノが媒介粒子となる過程では図 3.4 に表すような, 右巻きニュートリノが中間状態に現れ, レプトン数を 2 破る過程が存在する. これらの過程は, 右巻きニュートリノが存在しなくなった後もウォッシュアウトとして寄与する. これらの過程の反応率を以下に記す.

- $L_\alpha + \bar{\Phi} \rightarrow \bar{L}_\beta + \Phi, (\bar{L}_\alpha + \Phi \rightarrow L_\beta + \bar{\Phi})$

$$\gamma_N^{(1)\alpha\beta} \equiv \gamma(L_\alpha + \bar{\Phi} \rightarrow \bar{L}_\beta + \Phi), \quad (3.30)$$

$$= \gamma(\bar{L}_\alpha + \Phi \rightarrow L_\beta + \bar{\Phi}). \quad (3.31)$$

- $L_\alpha + L_\beta \rightarrow \Phi + \Phi, (\bar{L}_\alpha + \bar{L}_\beta \rightarrow \bar{\Phi} + \bar{\Phi})$

$$\gamma_N^{(2)\alpha\beta} \equiv \gamma(L_\alpha + L_\beta \rightarrow \Phi + \Phi), \quad (3.32)$$

$$= \gamma(\bar{L}_\alpha + \bar{L}_\beta \rightarrow \bar{\Phi} + \bar{\Phi}). \quad (3.33)$$

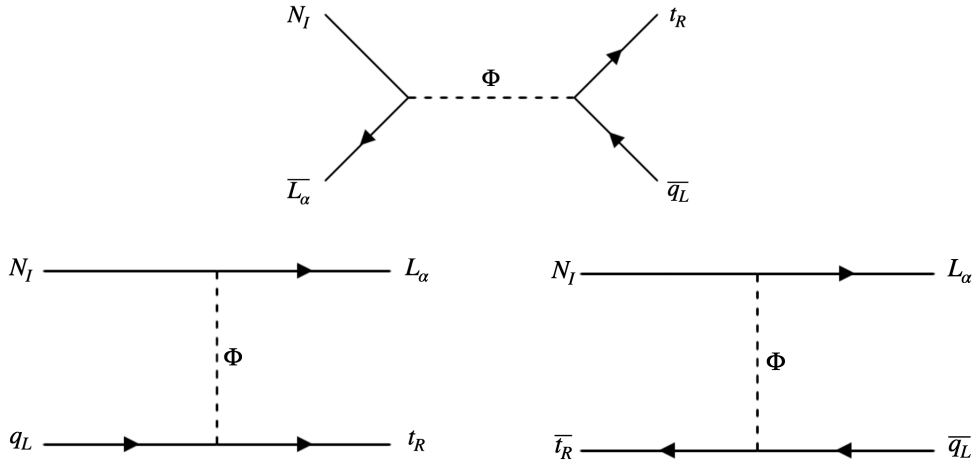


図 3.5: 右巻きニュートリノがトップ湯川を通じて相互作用する過程. 始状態から終状態で標準模型粒子のレプトン数が 1 増える.

外線のレプトンについて和をとった反応率を,

$$\gamma_N^{(i)} = \sum_{\alpha, \beta} \gamma_N^{(i)\alpha\beta}, \quad (3.34)$$

と定義する.

3.2.2 $\Delta L = 1$ の過程

標準模型のレプトン数を 1 変化させる, $\Delta L = 1$ の過程は, 右巻きニュートリノが湯川相互作用を通じて, 標準模型の粒子と相互作用する過程に現れる. ヒッグス場が媒介する寄与のため, 湯川相互作用ではトップ湯川を通じる過程の寄与が支配的になる. そのため図 3.5 の反応率を考えればよい. またこの過程は右巻きニュートリノの数を 1 変化させる寄与も持つ. 反応率はそれぞれ以下のようになる.

- $N_I + \bar{L}_\alpha \rightarrow t_R + \bar{q}_L, (N_I + L_\alpha \rightarrow \bar{t}_R + q_L)$

$$\gamma_{N_I t}^{(1)\alpha} \equiv \gamma(N_I + \bar{L}_\alpha \rightarrow t_R + \bar{q}_L), \quad (3.35)$$

$$= \gamma(N_I + L_\alpha \rightarrow \bar{t}_R + q_L). \quad (3.36)$$

- $N_I + q_L \rightarrow L_\alpha + t_R, (N_I + \bar{t}_R \rightarrow L_\alpha + \bar{q}_L, N_I + t_R \rightarrow \bar{L}_\alpha + q_L, N_I + \bar{q}_L \rightarrow \bar{L}_\alpha + \bar{t}_R)$

$$\gamma_{N_I t}^{(2)\alpha} \equiv \gamma(N_I + q_L \rightarrow L_\alpha + t_R), \quad (3.37)$$

$$= \gamma(N_I + \bar{t}_R \rightarrow L_\alpha + \bar{q}_L), \quad (3.38)$$

$$= \gamma(N_I + t_R \rightarrow \bar{L}_\alpha + q_L), \quad (3.39)$$

$$= \gamma(N_I + \bar{q}_L \rightarrow \bar{L}_\alpha + \bar{t}_R), \quad (3.40)$$

$$\gamma_{N_I t}^{(i)} = \sum_{\alpha} \gamma_{N_I t}^{(i)\alpha}. \quad (3.41)$$

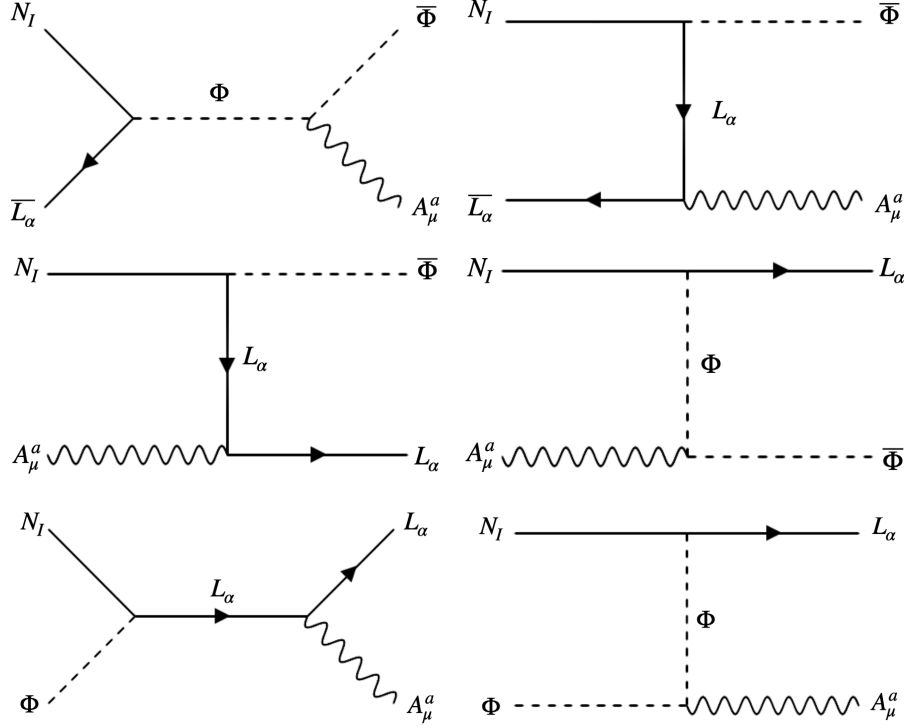


図 3.6: 右巻きニュートリノと $SU(2)_L$ ゲージボゾンとが関わる散乱過程についてのファインマン図. 始状態から終状態で標準模型のレプトン数が 1 増える. $U(1)_Y$ ゲージボゾンとの過程は図の A_μ^a を B_μ に置き換えることで得られる.

と定義する.

また, ヒッグス場を通じて $SU(2)_L$ のゲージ場, $U(1)_Y$ のゲージ場と相互作用する過程も標準模型粒子のレプトン数と右巻きニュートリノの数を 1 だけ変化させる過程である. 反応率は以下のように書かれる.

- $N_I + \bar{L}_\alpha \rightarrow \bar{\Phi} + A, (N_I + L_\alpha \rightarrow \Phi + A)$

$$\gamma_{N_I A}^{(1)\alpha} \equiv \gamma(N_I + \bar{L}_\alpha \rightarrow \bar{\Phi} + A), \quad (3.42)$$

$$= \gamma(N_I + L_\alpha \rightarrow \Phi + A). \quad (3.43)$$

- $N_I + A \rightarrow L_\alpha + \bar{\Phi}, (N_I + A \rightarrow \bar{L}_\alpha + \Phi)$

$$\gamma_{N_I A}^{(2)\alpha} \equiv \gamma(N_I + A \rightarrow L_\alpha + \bar{\Phi}), \quad (3.44)$$

$$= \gamma(N_I + A \rightarrow \bar{L}_\alpha + \Phi). \quad (3.45)$$

- $N_I + \Phi \rightarrow L_\alpha + A, (N_I + \bar{\Phi} \rightarrow \bar{L}_\alpha + A)$

$$\gamma_{N_I A}^{(3)\alpha} \equiv \gamma(N_I + \Phi \rightarrow L_\alpha + A), \quad (3.46)$$

$$= \gamma(N_I + \bar{\Phi} \rightarrow \bar{L}_\alpha + A). \quad (3.47)$$

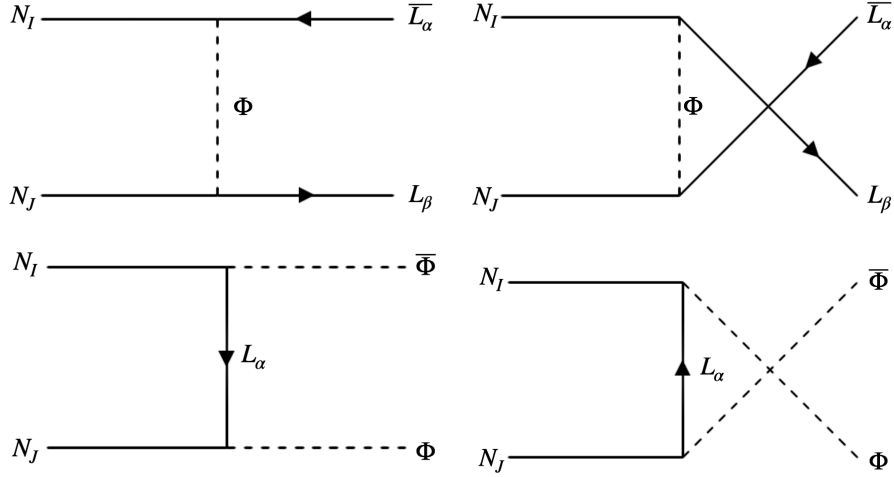


図 3.7: 右巻きニュートリノの対消滅過程

ここで, A は $SU(2)_L$ ゲージボソンを表し, 反応率において, $SU(2)_L$ ゲージボソンの寄与はすべての寄与を足し合わせている.

$$\gamma_{N_I A}^{(i)} = \sum_{\alpha} \gamma_{N_I A}^{(i)\alpha}. \quad (3.48)$$

とする. $U(1)_Y$ ゲージボソンの寄与 $\gamma_{N_I B}^{(i)}$ は $\gamma_{N_I A}^{(i)}$ の A を B と置き換えて定義する.

3.2.3 右巻きニュートリノの対生成・対消滅過程

この過程はレプトン数は変化しないが, 右巻きニュートリノの数を変化させる効果がある. 外線に右巻きニュートリノが2つ現れるため, エネルギーの高い領域で右巻きニュートリノの数の変化に影響を及ぼす. 反応率は以下のように表す.

- $N_I + N_J \rightarrow \bar{L}_{\alpha} + L_{\beta}$

$$\gamma_{N_I N_J}^{(1)\alpha\beta} \equiv \gamma(N_I + N_J \rightarrow \bar{L}_{\alpha} + L_{\beta}). \quad (3.49)$$

- $N_I + N_J \rightarrow \bar{\Phi} + \Phi$

$$\gamma_{N_I N_J}^{(2)} \equiv \gamma(N_I + N_J \rightarrow \bar{\Phi} + \Phi), \quad (3.50)$$

$$\gamma_{N_I N_J}^{(1)} = \sum_{\alpha, \beta} \gamma_{N_I N_J}^{(1)\alpha\beta}, \quad (3.51)$$

と定義する.

3.3 レプトン数生成を記述する方程式

この節では, 右巻きニュートリノ残存量とレプトン数生成量の時間発展の方程式を導いていく.

3.3.1 ボルツマン方程式

膨張宇宙において粒子 ψ の数の時間変化は以下の式で記述される.

$$\begin{aligned} \frac{dn_\psi}{dt} + 3Hn_\psi = & - \int d\Pi_\psi d\Pi_a \cdots d\Pi_i d\Pi_j \cdots (2\pi)^4 \delta(p_\psi + p_a + \cdots - p_i - p_j - \cdots) \\ & \times \{ |\mathcal{M}(\psi + a + \cdots \rightarrow i + j + \cdots)|^2 f_\psi f_a \cdots (1 \pm f_i)(1 \pm f_j) \cdots \\ & - |\mathcal{M}(i + j + \cdots \rightarrow \psi + a + \cdots)|^2 f_i f_j \cdots (1 \pm f_\psi)(1 \pm f_a) \cdots \}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

ここで,

$$d\Pi_X = \frac{g_X}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{p}_X}{2E_X}, \quad (3.53)$$

$$f_X = \frac{1}{1 \pm \exp[-(E_X - \mu_X)/T]}, \quad (3.54)$$

である. $E_X = (\mathbf{p}_X^2 + m_X^2)^{1/2}$, g_X, μ_X はそれぞれ粒子 $X (= \psi, a, b, \dots, i, j, \dots)$ のエネルギー, 内部自由度, 化学ポテンシャルを表す. また, 粒子 X の質量を m_X とした. (3.52) の \pm は $+$ がボゾン, $-$ がフェルミオンの時の符号, (3.54) の \pm の符号は $+$ がフェルミオン, $-$ がボゾンの時の分布関数である. H は宇宙の膨張率を表す. また, $|\mathcal{M}|^2$ は始状態と終状態でスピンの平均をとっている.

(3.52) 左辺の第1項は ψ の数密度の時間変化を表し, 第2項は宇宙が膨張ことによる数密度の希釈の効果を表している. 右辺は $\psi + a + \cdots \leftrightarrow i + j + \cdots$ という反応で ψ が生成・消滅する効果を表している.

3.3.2 右巻きニュートリノ残存量とレプトン数生成量のボルツマン方程式

2体から2体への散乱過程 ($\psi + a \leftrightarrow i + j$) を考えた場合,

$$Y_X = \frac{n_X}{s}, \quad (3.55)$$

$$Y_X^{eq} = \frac{n_X^{eq}}{s}, \quad (3.56)$$

とすると, ($\psi + a \leftrightarrow i + j$) の過程は Y_ψ に対するボルツマン方程式の右辺に次のような寄与を与える.

$$-\frac{z}{sH(M_1)} \left(\frac{Y_\psi}{Y_\psi^{eq}} \frac{Y_a}{Y_a^{eq}} - \frac{Y_i}{Y_i^{eq}} \frac{Y_j}{Y_j^{eq}} \right) \gamma(\psi + a \rightarrow i + j), \quad (3.57)$$

ここで, z は M_1/T , $H(M_1)$ は宇宙の温度が M_1 の時の $H(T)$ を表している. レプトン数の生成量はレプトンと反レプトンの差,

$$Y_L = Y_\ell - Y_{\bar{\ell}}, \quad (3.58)$$

で定義され, Y_L^l はレプトジェネシスによって付加的に生成されるレプトン数の生成量を表す.

右巻きニュートリノ残存量とレプトン数の生成量について、前節までで議論した崩壊過程、生成過程の寄与を含めると、ボルツマン方程式はそれぞれ以下ようになる。

$$\begin{aligned} \frac{dY_{N_I}}{dz} = & -\frac{z}{sH(M_1)} \left\{ \left(\frac{Y_{N_I}}{Y_{N_I}^{eq}} - 1 \right) \left(\gamma_{N_I} + 2\gamma_{N_I t}^{(3)} + 4\gamma_{N_I t}^{(4)} \right) \right. \\ & \left. + \sum_{J=1}^3 \left(\frac{Y_{N_I} Y_{N_J}}{Y_{N_I}^{eq} Y_{N_J}^{eq}} - 1 \right) \left(\gamma_{N_I N_J}^{(2)} + \gamma_{N_I N_J}^{(3)} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \frac{dY_L^l}{dz} = & -\frac{z}{sH(M_1)} \left\{ \sum_{I=1}^3 \left[\varepsilon_I \left(1 - \frac{Y_{N_I}}{Y_{N_I}^{eq}} \right) \gamma_{N_I} + \frac{Y_L^l}{Y_\ell^{eq}} \frac{1}{2} \gamma_{N_I} \right] \right. \\ & + \frac{Y_L^l}{Y_\ell^{eq}} \left(2\gamma_N^{(2)} + 2\gamma_N^{(13)} \right) + \frac{Y_L^l}{Y_\ell^{eq}} \sum_{I=1}^3 \left[\frac{Y_{N_I}}{Y_{N_I}^{eq}} \gamma_{N_I t}^{(3)} + 2\gamma_{N_I t}^{(4)} \right. \\ & \left. \left. + \frac{Y_{N_I}}{Y_{N_I}^{eq}} \left(\gamma_{N_I A}^{(1)} + \gamma_{N_I B}^{(1)} \right) + \gamma_{N_I A}^{(2)} + \gamma_{N_I A}^{(3)} + \gamma_{N_I B}^{(2)} + \gamma_{N_I B}^{(3)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

(3.59) は N_I の数の変化に対するボルツマン方程式で、右辺は崩壊・散乱による寄与を表している。(3.60) はレプトン数の変化を表している。ここで、 $z = M_1/T$ である。上付添字 "eq" は熱平衡時の値を表す。1 自由度の質量を持たない粒子に対する熱平衡時の残存量を Y_ℓ^{eq} と表す。ボルツマン近似を適用してここでは、

$$Y_\ell^{eq} = \frac{45}{2\pi^4 g_{*s}}, \quad (3.61)$$

とした。ここで、有効自由度 g_{*s} は標準模型の時、温度がトップクォーク質量以上の高温で $g_{*s} = 106.75$ となる。

ここで、右巻きニュートリノの質量に階層性 ($M_1 \ll M_2 \ll M_3$) を仮定すると、レプトン数は右巻きニュートリノの反応が熱平衡からずれることにより作られる。温度が M_2 よりも高い領域では N_2 や N_3 の反応によりレプトン数が作られる可能性がある。しかし、質量を持つ粒子の数は (3.27) から、その粒子の質量よりも低い温度になると指数関数的に減少する。このため、温度 $T < M_2$ の領域では、右巻きニュートリノ N_2, N_3 によって作られたレプトン数はウォッシュアウトによりなくなってしまふ。したがって、($M_1 \ll M_2 \ll M_3$) の仮定の下では、ボルツマン方程式 (3.59), (3.60) において、右巻きニュートリノの寄与は N_1 のみ取り入れればよい。 Y_{B-L} はレプトジェネシスにより付加的に生成されるレプトン数 Y_L^l と、

$$Y_{B-L} = -Y_L^l, \quad (3.62)$$

という関係にあるので、(3.2) 式から、最終的に残るバリオン数は以下ようになる。

$$Y_B = -\frac{28}{79} Y_L^l. \quad (3.63)$$

3.4 レプトン数生成のフレーバー効果

前節で議論したボルツマン方程式ではレプトンフレーバーによる発展の違いを考慮していなかった。宇宙の温度が $\mathcal{O}(10^{12})$ GeV より高いような非常に高温である場合には、荷電レプトン e, μ, τ の湯川相互作用が化学平衡に入っていないため、 e, μ, τ を区別できない。したがって、レプトンの発展を一つのフレーバーとして扱うことができる。しかし、宇宙の温度が下がってくると、湯川相互作用が化学平衡に入るためフレーバーが区別される。これらの温度は文献 [37] で評価されている。各湯川相互作用が化学平衡に入る温度を表 3.1 にまとめた。宇宙の温度が $\mathcal{O}(10^{11})$ GeV でタウレプトン湯川

T_{ss}	2.4×10^{13} GeV	ストロングスファレロン
T_{ws}	1.8×10^{12} GeV	ウィークスファレロン
T_b	4.2×10^{12} GeV	ボトムクォーク湯川
T_c	3.8×10^{11} GeV	チャームクォーク湯川
T_s	2.5×10^9 GeV	ストレンジクォーク湯川
T_u	1.9×10^6 GeV	アップクォーク湯川
T_d	8.8×10^6 GeV	ダウンクォーク湯川
T_τ	3.7×10^{11} GeV	タウレプトン湯川
T_μ	1.3×10^9 GeV	ミューレプトン湯川
T_e	3.1×10^4 GeV	電子湯川

表 3.1: スファレロン過程と湯川相互作用が化学平衡となる温度

を通じる相互作用が化学平衡に入る. この温度より下の領域では, レプトン数は 2 つのフレーバー状態を分けて考える必要がある. さらに, $\mathcal{O}(10^9)$ GeV の温度でミューレプトン湯川を通じた相互作用が化学平衡に入る. これよりも下の温度では, 3 つのフレーバーに分けて考える必要がある. 電子型レプトン湯川も $\mathcal{O}(10^4)$ GeV で化学平衡に入る. そのために, 考える温度領域によって解くべき発展方程式が変わってくる. このフレーバーによる発展の違いを考慮したレプトン数生成のシナリオをフレーバーレプトン数生成機構 (フレーバーレプトジェネシス, flavored leptogenesis) [38–46] という.

フレーバーによる発展の違いを取り入れたボルツマン方程式は以下で与えられる.

$$\frac{dY_{N_i}}{dz} = -\frac{z}{sH(M)} \left\{ \left(\frac{Y_{N_i}}{Y_{N_i}^{\text{eq}}} - 1 \right) \left(\gamma_{N_i} + 2\gamma_{N_i t}^{(1)} + 4\gamma_{N_i t}^{(2)} \right) + \sum_{J=1}^3 \left(\frac{Y_{N_i}}{Y_{N_i}^{\text{eq}}} \frac{Y_{N_j}}{Y_{N_j}^{\text{eq}}} - 1 \right) \left(\gamma_{N_i N_j}^{(1)} + \gamma_{N_i N_j}^{(2)} \right) \right\}, \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \frac{dY_{X_\alpha}}{dz} = & -\frac{z}{sH(M)} \left\{ \sum_{I=1}^3 \left(\frac{Y_{N_i}}{Y_{N_i}^{\text{eq}}} - 1 \right) \varepsilon_{\alpha I} \gamma_{N_i} - \sum_{\beta} \left[\sum_{I=1}^3 \left(\frac{1}{2} (C_{\alpha\beta}^L - C_{\beta}^\Phi) \right) \gamma_{N_i}^\alpha \right. \right. \\ & + \left(C_{\alpha\beta}^L \frac{Y_{N_i}}{Y_{N_i}^{\text{eq}}} - \frac{C_{\beta}^\Phi}{2} \right) \gamma_{N_i t}^{(1)\alpha} + \left(2C_{\alpha\beta}^L - \frac{C_{\beta}^\Phi}{2} \left(1 + \frac{Y_{N_i}}{Y_{N_i}^{\text{eq}}} \right) \right) \gamma_{N_i t}^{(2)\alpha} + \left(C_{\alpha\beta}^L \frac{Y_{N_i}}{Y_{N_i}^{\text{eq}}} - C_{\beta}^\Phi \right) \left(\gamma_{N_i A}^{(1)\alpha} + \gamma_{N_i B}^{(1)\alpha} \right) \\ & + \left(C_{\alpha\beta}^L - C_{\beta}^\Phi \right) \left(\gamma_{N_i A}^{(2)\alpha} + \gamma_{N_i B}^{(2)\alpha} \right) + \left(C_{\alpha\beta}^L - C_{\beta}^\Phi \frac{Y_{N_i}}{Y_{N_i}^{\text{eq}}} \right) \left(\gamma_{N_i A}^{(3)\alpha} + \gamma_{N_i B}^{(3)\alpha} \right) \\ & \left. + \sum_{\gamma} \left(\left(C_{\alpha\beta}^L + C_{\gamma\beta}^L - 2C_{\beta}^\Phi \right) \left(\gamma_N^{(1)\alpha\gamma} + \gamma_N^{(2)\alpha\gamma} \right) + \sum_{I,J=1}^3 \left(C_{\alpha\beta}^L - C_{\gamma\beta}^L \right) \gamma_{N_i N_j}^{(1)\alpha\gamma} \right] \frac{Y_{X_\beta}}{Y^{\text{eq}}} \right\}. \quad (3.65) \end{aligned}$$

ここで, $X_\alpha = B/3 - L_\alpha$ であり, B はバリオン数, L_α は各フレーバーのレプトン数を表す (3 フレーバーの場合は $\alpha = e, \mu, \tau$). フレーバーが区別される場合には, $B - L$ ではなく, X_α が保存量となる. $B - L (= \sum_\alpha X_\alpha)$ 数は,

$$Y_{B-L} = \sum_\alpha Y_{X_\alpha}, \quad (3.66)$$

となるから,

$$Y_B = \frac{28}{79} Y_{B-L} = \sum_\alpha Y_{X_\alpha}, \quad (3.67)$$

となる。 C^L, C^Φ は考える温度による X_α とレプトン数, ヒッグスとの間の関係であり, 約 30 TeV 以下の温度領域の場合には以下で与えられる [40].

$$C^L = \frac{1}{711} \begin{pmatrix} -211 & 16 & 16 \\ 16 & -211 & 16 \\ 16 & 16 & -211 \end{pmatrix}, \quad (3.68)$$

$$C^\Phi = \frac{8}{79} (1, 1, 1). \quad (3.69)$$

$\varepsilon_{I\alpha}$ は N_I の崩壊によって生成されるフレーバー α への非対称度で,

$$\varepsilon_{I\alpha} \equiv \frac{\Gamma(N_I \rightarrow L_\alpha + \bar{\Phi}) - \Gamma(N_I \rightarrow \bar{L}_\alpha + \Phi)}{\sum_\alpha \Gamma(N_I \rightarrow L_\alpha + \bar{\Phi}) + \sum_\alpha \Gamma(N_I \rightarrow \bar{L}_\alpha + \Phi)}, \quad (3.70)$$

で定義され,

$$\varepsilon_{I\alpha} = \frac{1}{8\pi} \sum_{J \neq I} \frac{\text{Im}[F_{\alpha I}^* F_{\alpha J} (F^\dagger F)_{IJ}]}{(F^\dagger F)_{II}} \left[f\left(\frac{a_J}{a_I}\right) + g\left(\frac{a_J}{a_I}\right) \right], \quad (3.71)$$

で与えられる. 定義より,

$$\varepsilon_I = \sum_\alpha \varepsilon_{I\alpha}, \quad (3.72)$$

である. フレーバーレプトンジェネシスでは, 右巻きニュートリノの崩壊過程において, 全体の CP 対称性の破れが 0 ($\varepsilon_I = 0$) であっても, 各フレーバーの CP 対称性が破れていれば ($\varepsilon_I^\alpha \neq 0$), 散乱過程により各フレーバーの非対称性は別々に発展するため, 最終的なレプトンと反レプトンに数の差が生じる. これは, フレーバーを区別しない通常のレプトン数生成機構の場合と大きく異なる点である. また, (2.35) のパラメータ表現を取ると, $\varepsilon_{I\alpha}$ は, PMNS 行列 U にも依存することもわかる. したがって, フレーバー効果を取り込むとアクティブニュートリノの混合角 θ_{ij} や CP 位相 $\delta_{\text{CP}}, \alpha_{21}, \alpha_{31}$ も宇宙のバリオン数生成量を決めるパラメータとなる.

3.5 共鳴レプトン数生成機構

レプトン数生成機構で作られるレプトン数は $|\varepsilon_I|$ に比例して大きくなる. 式 (3.23) で見たように ε_I は右巻きニュートリノ N_I の質量 M_I に比例しているため, 生成されるレプトン数も右巻きニュートリノの質量が大きくなるにつれ大きくなる³. このため, レプトン数生成機構により宇宙のバリオン数非対称性を説明するために必要な右巻きニュートリノ質量には下限が存在し, その大きさは一番軽い右巻きニュートリノ質量が $\mathcal{O}(10^9)\text{GeV}$ である [33]. これは右巻きニュートリノ質量に階層性 $M_1 < M_2 < M_3$ がある場合の振る舞いである. 右巻きニュートリノ質量が準縮退 $M_I \simeq M_J$ ($I \neq J$) している場合には M_I が小さくても $|\varepsilon_{I\alpha}|$ を大きくできることが知られている. 以下ではこのことを説明する.

簡単のため, 右巻きニュートリノが 2 世代 N_1, N_2 で $M_1 < M_2$ である場合を考える.

$$\begin{cases} M_1 = M_N - \frac{\Delta M}{2} \\ M_2 = M_N + \frac{\Delta M}{2} \end{cases}, \quad (3.73)$$

³ 右巻きニュートリノ質量 M_I が大きすぎるとウォッシュアウトによって生成されるレプトン数は減らされるため, $M_I \sim 10^{14}\text{GeV}$ ではきちんと評価する必要がある.

とする. ここで, M_N は M_1 と M_2 の中心値, $\Delta M > 0$ は N_1, N_2 の質量差である. N_1 と N_2 の質量が準縮退 $M_1 \simeq M_2$, すなわち $\Delta M \ll M_N$ である場合を考える.

$$\delta \equiv \frac{\Delta M}{M_N} \ll 1, \quad (3.74)$$

と定義すると,

$$f\left(\frac{M_2^2}{M_1^2}\right) = f\left(\frac{(1+\delta/2)^2}{(1-\delta/2)^2}\right) \simeq 1 + (1+2\log 2)\delta, \quad (3.75)$$

$$g\left(\frac{M_2^2}{M_1^2}\right) = g\left(\frac{(1+\delta/2)^2}{(1-\delta/2)^2}\right) \simeq -\frac{1}{2\delta} - \frac{1}{2}. \quad (3.76)$$

とできるので, $|f(M_2^2/M_1^2)| \ll |g(M_2^2/M_1^2)|$ である. よって,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha 1} &= \frac{\Gamma(N_1 \rightarrow L_\alpha + \bar{\Phi}) - \Gamma(N_1 \rightarrow \bar{L}_\alpha + \Phi)}{\sum_\alpha \Gamma(N_1 \rightarrow L_\alpha + \bar{\Phi}) + \sum_\alpha \Gamma(N_1 \rightarrow \bar{L}_\alpha + \Phi)}, \\ &\simeq \frac{1}{8\pi} \frac{\text{Im}[F_{\alpha 1}^* F_{\alpha 2} (F^\dagger F)_{12}]}{(F^\dagger F)_{11}} \left(-\frac{1}{2\delta}\right), \end{aligned} \quad (3.77)$$

とできる. 式 (3.77) より, 2世代の右巻きニュートリノ質量差が小さいほど, ε_1 の大きさが大きくなることがわかる. つまり, 2つの右巻きニュートリノの質量差が小さいほど, レプトン数の差が作りやすくなることを表している. 2つの右巻きニュートリノが縮退した質量を持ち共鳴的にレプトン数を生成する機構を共鳴レプトン数生成機構 (レゾナントレプトジェネシス, resonant leptogenesis) という [10]. 共鳴レプトン数生成機構では, ニュートリノ湯川結合定数が小さい場合であっても, 質量の縮退度が大きいことにより, レプトン数を作ることが可能である. そのため, 右巻きニュートリノ質量が $\mathcal{O}(10^9)$ GeV よりも小さい (e.g. $\mathcal{O}(1)$ TeV) 場合であっても右巻きニュートリノの崩壊によって十分な BAU を生成することができる.⁴ さらに 2世代の右巻きニュートリノの質量が縮退しているため, 両方の崩壊によりレプトン数が生成される. CP の破れ方に注目する. ε_2 は, $g(x)$ の寄与は $\delta \rightarrow -\delta$ と置き換えることで得られるので,

$$\varepsilon_2 \simeq \frac{1}{8\pi} \frac{\text{Im}[F_{\alpha 2}^* F_{\alpha 1} (F^\dagger F)_{21}]}{(F^\dagger F)_{22}} \left(\frac{1}{2\delta}\right), \quad (3.78)$$

となる. ここで,

$$(F^\dagger F)_{II} = \sum_\alpha |F_{\alpha I}|^2 > 0, \quad (3.79)$$

$$(F^\dagger F)_{IJ} = (F^\dagger F)_{JI}^*, \quad (3.80)$$

であるから,

$$\text{Im}[F_{\alpha J}^* F_{\alpha I} (F^\dagger F)_{JI}] = -\text{Im}[F_{\alpha I}^* F_{\alpha J} (F^\dagger F)_{IJ}], \quad (3.81)$$

となるので,

$$\varepsilon_{\alpha 2} \simeq \frac{(F^\dagger F)_{11}}{(F^\dagger F)_{22}} \varepsilon_{\alpha 1} \simeq \frac{\Gamma_{N_1}}{\Gamma_{N_2}} \varepsilon_{\alpha 1}, \quad (3.82)$$

となり, $\varepsilon_{1,2}$ は同符号であることがわかる.

⁴右巻きニュートリノ質量がスファレロンの凍結する電弱スケール ($\mathcal{O}(10^2)$ GeV) 程度よりも小さな質量を持つ場合には, ν_R の振動によるバリオン数生成が議論されている [11, 12, 47–49].

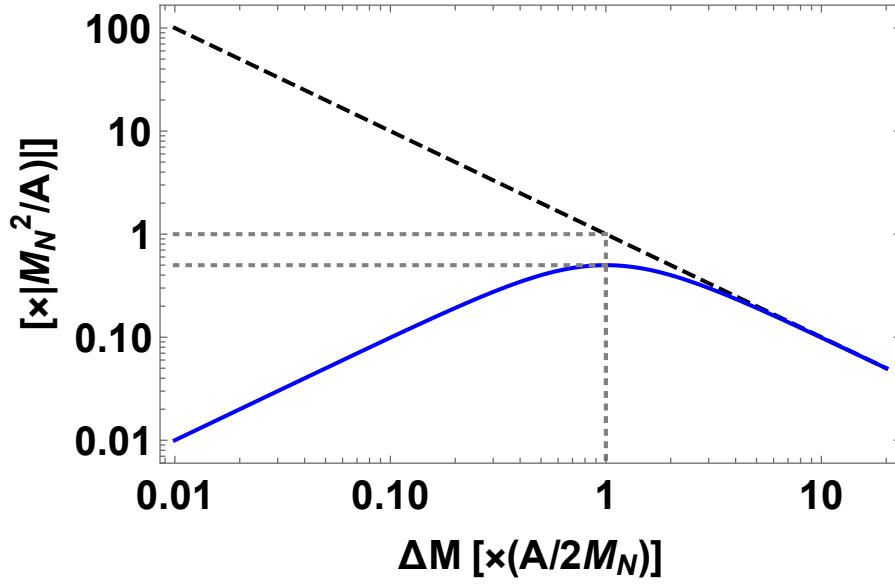


図 3.8: 因子 A による $\varepsilon_{\alpha I}$ の振る舞いの違い. 質量の中心値 $(M_1+M_2)/2 = M_N$, 質量差 $(M_2-M_1) = \Delta M$ とした時の, 関数 $|g(x)|$ (黒破線) $x = (M_2/M_1)^2$ と, $|M_1 M_2 (M_1^2 - M_2^2) / [(M_1^2 - M_2^2)^2 + A^2]|$ (青実線).

右巻きニュートリノ質量が縮退している場合の CP 対称性の破れの大きさ, (3.77) 式は量子効果を正確に取り入れて評価しなければならない. 量子効果を正確に考慮すると (3.77) 式の CP 対称性の破れの大きさは以下のように修正される [10].

$$\varepsilon_{\alpha 1} \simeq \frac{1}{8\pi} \frac{\text{Im}[F_{\alpha 1}^* F_{\alpha 2} (F^\dagger F)_{12}]}{(F^\dagger F)_{11}} \frac{M_1 M_2 (M_1^2 - M_2^2)}{(M_1^2 - M_2^2)^2 + A^2} \quad (3.83)$$

ここで, (3.83) 式の分母に含まれる A は,

$$A = M_1 \Gamma_{N_1} + M_2 \Gamma_{N_2}, \quad (3.84)$$

で定義される量である. 図 3.8 から分かるように, 質量差が崩壊率と比べて十分大きい ($\Delta M \gg \Gamma_{N_i}$) 場合には, 式 (3.77) と式 (3.84) で大きさはおよそ等しくなるが, 質量差が $\Delta M \sim \Gamma_{N_i}$ よりも小さくなると違いが生じる (特に, (3.83) の大きさが最大となる $\Delta M = A/(2M_N)$ の時, A を考慮しない場合と比べ, $1/2$ となる.) ため A の正確な評価が重要である. この量はボルツマン方程式に基づいた評価は精度が悪くなるが, 文献 [50,51] によって, より正確な評価法であるカダノフ-ペイム方程式を用いて評価されており, (3.84) 式のように見積もられている. (3.83) 式の $\varepsilon_{\alpha I}$, ($I = 1, 2$) についても (3.82) 式の関係が成り立つ.

(3.83) 式から右巻きニュートリノ質量が $|M_I^2 - M_J^2| = A$, ($I, J = 1, 2, J \neq I$) の条件を満たす時, $|\varepsilon_{\alpha I}|$ は最大となることがわかる. このことは右巻きニュートリノの質量差が $\Delta M = \Delta M_* \equiv A/(2M_N)$ を満たす時に $|\varepsilon_{\alpha I}|$ が最大になることを意味し, この時に BAU の生成量 Y_B の大きさも最大となることを意味する.

第4章 TeVスケール質量を持つ右巻きニュートリノによるレプトン数生成

本章では将来加速器実験で到達可能な 1 TeV スケールの質量を持つ右巻きニュートリノを考える。¹ この質量の右巻きニュートリノは質量が $\mathcal{O}(10^9)$ GeV と比べてはるかに小さいので、通常のレプトン数生成機構では十分な量のバリオン数を生成できない。ここでは 2 世代の右巻きニュートリノ質量が縮退した場合の共鳴レプトン数生成機構によるバリオン数の生成を考える。この機構であれば右巻きニュートリノ質量が 1 TeV と小さくても、質量の縮退性により右巻きニュートリノの崩壊によるレプトン数の生成量が増え、十分な量のバリオン数を生成することができる。² この場合フレーバー効果が働くため PMNS 行列の複素位相もバリオン数非対称性の生成の起源となり得る。ここでは PMNS 行列のディラック位相、マヨラナ位相と BAU との相関について議論する。

右巻きニュートリノ ν_R の質量はラグランジアンレベルでレプトン数を 2 破っている。このことが標準模型では起きない様々な現象を予言する。その一つが、ニュートリノを伴わない二重ベータ ($0\nu\beta\beta$) 崩壊 $(Z, A) \rightarrow (Z+2, A) + 2e^-$ [52] である。この崩壊率はニュートリノの有効質量 m_{eff} によって特徴付けられる。有効質量は、アクティブニュートリノの CP 位相に依存するため、BAU の生成量と関係する量となる。そこで、バリオン数の観測量から $0\nu\beta\beta$ 崩壊の有効質量 m_{eff} へ与える影響についても議論する。本章の内容は筆者らの論文 [53] での議論に基づく。

4.1 TeV スケールの右巻きニュートリノ

初めに、解析に用いる理論の枠組みを説明する。標準模型に 3 世代の右巻きニュートリノ ν_{RI} ($I=1,2,3$) を加える。ラグランジアンは (2.19) 式で与えられる。ここでは、荷電レプトンの質量行列と ν_R のマヨラナ質量行列が共に対角なベースを取り、 $[M_M]_{II} = M_I$ ($M_I > 0$) と取ることにする。

アクティブニュートリノの非常に小さな質量を生成するためにシーソー機構を適用する、つまりシーソー機構を適用できるための条件 $M_I \gg ||[M_D]_{\alpha I}| = |F_{\alpha I}| \langle \Phi \rangle$ を仮定する。この場合、軽い方の質量固有状態はアクティブニュートリノ ν_i ($i=1,2,3$) となり、それらの質量 m_i はシーソー行列 $M_\nu = -M_D^T M_M^{-1} M_D$ を対角化した行列 $U^\dagger M_\nu U^* = D_\nu = \text{diag}(m_1, m_2, m_3)$ によって与えられる。ここで、 U は PMNS 行列 [16, 17] である。 δ_{CP} はディラック位相であり、 $\alpha_{21,31}$ はマヨラナ位相を表す。これらの位相はニュートリノの CP 対称性の破れと関係する重要なパラメータである。ニュートリノ振動実験のグループにより表 4.1 に示すような混合角 θ_{ij} 、質量二乗差 $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$ が得られている [54]。ニュートリノ質量の階層性については順階層型 $m_3 > m_2 > m_1$ と逆階層型 $m_2 > m_1 > m_3$ の 2 つの可能性を調査する。

一方、大きな質量固有値は質量 M_I の重い右巻きニュートリノ N_I である。ヒッグスの非零の真空期待値を通して、 N_I とアクティブニュートリノ ν_i は $\nu_{L\alpha} = U_{\alpha i} \nu_i + \Theta_{\alpha I} N_I$ のように混合する。ここで、 $\Theta_{\alpha I} = [M_D]_{\alpha I} M_I^{-1}$ である。この混合は $\Theta_{\alpha I}$ で抑制された右巻きニュートリノ N_I の弱い相互作用を導く。右巻きニュートリノ N_I の性質は質量 M_I と湯川相互作用 $F_{\alpha I}$ によって決まる。シーソー

¹ 現在到達できている最大のエネルギーは LHC 実験の重心系エネルギー $\sqrt{s} = 14\text{TeV}$ 、現在計画中の加速器である FCC は $\sqrt{s} = 100\text{TeV}$ である。

² 右巻きニュートリノ質量が $\mathcal{O}(1)$ MeV- $\mathcal{O}(10^2)$ GeV と非常に小さくても、 ν_R の世代間振動によって十分な量の BAU を生成することが可能である [11, 12, 47-49]。

	θ_{12}	θ_{23}	θ_{13}	Δm_{21}^2 [eV ²]	$\Delta m_{3\ell}^2$ [eV ²]
NH	33.62°	47.2°	8.54°	7.40×10^{-5}	$+2.494 \times 10^{-3}$ ($\ell = 1$)
IH	33.62°	48.1°	8.58°	7.40×10^{-5}	-2.465×10^{-3} ($\ell = 2$)

表 4.1: 複数のニュートリノ振動実験の結果を統合して得られたニュートリノの混合角, 及び質量二乗差 [54].

機構を通してニュートリノ振動の観測値, 混合角と質量二乗差を常に得るために, 湯川相互作用を (2.35) 式のカサス・イバーラパラメトリゼーションによって表す [21]. ここで, Ω は任意の 3×3 複素直行行列で,

$$\Omega = \begin{pmatrix} \cos\omega_{12} & \sin\omega_{12} & 0 \\ -\sin\omega_{12} & \cos\omega_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega_{13} & 0 & \sin\omega_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\omega_{13} & 0 & \cos\omega_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega_{23} & \sin\omega_{23} \\ 0 & -\sin\omega_{23} & \cos\omega_{23} \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

のように表す. ここで, ω_{IJ} は複素の混合パラメータである.

簡単のため, この解析では我々は 2 世代の右巻きニュートリノ質量がシーソー機構とレプトン数生成に寄与する場合を考える. 残った 1 世代の右巻きニュートリノ質量は十分大きく, 湯川相互作用は十分小さいとする. このように仮定することで一番軽いアクティブニュートリノの質量は 0 となる, すなわち順階層型な質量の場合 $m_3 > m_2 > m_1 = 0$ であり, 2 世代の右巻きニュートリノ ν_{R2} 及び ν_{R3} の混合パラメータは,

$$\omega_{12} = \omega_{13} = 0, \quad \omega_{23} \neq 0, \quad (4.2)$$

と取ることを考える. 一方で逆階層型的 $m_2 > m_1 > m_3 = 0$ な場合 ν_{R1}, ν_{R2} の混合パラメータは,

$$\omega_{13} = \omega_{23} = 0, \quad \omega_{12} \neq 0, \quad (4.3)$$

となる. この状況のもとで, BAU の源となり得る CP 対称性を破るパラメータは, ディラック位相 δ_{CP} , マヨラナ位相の 1 種類の組み合わせ *i.e.* NH の場合 ($\alpha_{21} - \alpha_{31}$), IH の場合 α_{21} と右巻きニュートリノの混合パラメータの虚部, *i.e.* NH の場合 $\text{Im}\omega_{23}$, IH の場合 $\text{Im}\omega_{12}$ となる. この解析では, CP 対称性の破れが PMNS 行列にのみあることを仮定し, ω_{IJ} は実数と取る. このことについては例えば文献 [43–45, 47] を参照のこと. 次の節では 1 TeV スケールの質量を持つ 2 世代の右巻きニュートリノによって十分な量の BAU が生成可能かどうかを議論する.

4.2 バリオン数非対称性とレプトンセクターの CP 対称性の破れ

この節では TeV スケールの右巻きニュートリノによる共鳴レプトン数生成機構 [10] を通じたバリオン数生成のシナリオを調査する. 式 (2.44) で与えられた BAU の観測値は右巻きニュートリノの質量が十分縮退していると説明することが可能である. ここでは, 順階層型の場合には, $M_3 = M_N + \Delta M/2$, $M_2 = M_N - \Delta M/2$ ととり, 一方逆階層型の場合には $M_2 = M_N + \Delta M/2$, $M_1 = M_N - \Delta M/2$ ととる ($M_N \gg \Delta M > 0$). この場合には, BAU の生成は宇宙の温度が TeV スケールの時に最も有効となり, レプトン数生成機構におけるフレーバー効果を取り入れる必要がある [39–46]. このことは PMNS 行列に現れる CP 対称性の破れによるバリオン数の生成に対して決定的に重要である³. これから,

³BAU の PMNS 行列に対する依存性は非常に重い右巻きニュートリノに対して 1 フレーバーレプトンジェネシスを考えた場合にはその影響は消える ($\sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha I} = 0$).

TeV スケールの右巻きニュートリノによる BAU の生成量と PMNS 行列に含まれる低エネルギーでの CP 非対称性のパラメータに対する依存の仕方を見積もる。

この解析では、BAU の生成量を見積もるために (3.65) 式のボルツマン方程式を用いる。ただし、ゲージ相互作用を通じた散乱過程については考慮しない。右巻きニュートリノ N_I の崩壊過程において、ニュートリノ湯川相互作用が CP 対称性を破るため、にツリーレベルとヴァーテックス、輻射補正の 1 ループレベルのダイアグラムとの表面項によりレプトン数非対称性が生成される。この破れの度合いを表す非対称パラメータ $\varepsilon_{\alpha I}$ は (3.70) 式で定義され、今、 $\Delta M \ll M_N$ の場合を考えると、輻射補正からくる寄与がヴァーテックスからくる寄与と比べて非常に大きくなるため、ヴァーテックス補正からの寄与は無視できる。そのため $\varepsilon_{\alpha I}$ は (3.82) 式と同様に、

$$\varepsilon_{\alpha I} \simeq \frac{1}{8\pi} \sum_{J \neq I} \frac{\text{Im} \left[F_{\alpha I}^* F_{\alpha J} (F^\dagger F)_{IJ} \right]}{(F^\dagger F)_{II}} \frac{M_I M_J (M_I^2 - M_J^2)}{(M_I^2 - M_J^2)^2 + A^2}, \quad (4.4)$$

で与えられる [10]. この式において、 $A = M_I \Gamma_{N_I} + M_J \Gamma_{N_J}$ である。 $\varepsilon_{\alpha I}$ の PMNS 行列への依存の仕方については、付録 C に示した。右巻きニュートリノ質量が $A = |M_I^2 - M_J^2|$ の条件を満たす時 $|\varepsilon_{\alpha I}|$ は最大となる。すなわち、右巻きニュートリノの質量差が $\Delta M = \Delta M_* \equiv A/(2M_N)$ を満たす時に $|\varepsilon_{\alpha I}|$ が最大となり、順階層型の場合には、

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha 2} |_{\Delta M = \Delta M_*} &\simeq -\frac{1}{16\pi} \frac{\text{Im} [F_{\alpha 2}^* F_{\alpha 3} (F^\dagger F)_{23}]}{(F^\dagger F)_{22}} \frac{M_2 M_3}{M_2 \Gamma_{N_2} + M_3 \Gamma_{N_3}} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\text{Im} [F_{\alpha 2}^* F_{\alpha 3} (F^\dagger F)_{23}]}{(F^\dagger F)_{22} (F^\dagger F)_{33}} \frac{M_2 \Gamma_{N_3}}{M_2 \Gamma_{N_2} + M_3 \Gamma_{N_3}}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\varepsilon_{\alpha 3} |_{\Delta M = \Delta M_*} \simeq -\frac{1}{2\pi} \frac{\text{Im} [F_{\alpha 2}^* F_{\alpha 3} (F^\dagger F)_{23}]}{(F^\dagger F)_{22} (F^\dagger F)_{33}} \frac{M_3 \Gamma_{N_2}}{M_2 \Gamma_{N_2} + M_3 \Gamma_{N_3}}, \quad (4.6)$$

となる。一方で逆階層型の場合には、

$$\varepsilon_{\alpha 1} |_{\Delta M = \Delta M_*} \simeq -\frac{1}{2\pi} \frac{\text{Im} [F_{\alpha 1}^* F_{\alpha 2} (F^\dagger F)_{12}]}{(F^\dagger F)_{11} (F^\dagger F)_{22}} \frac{M_1 \Gamma_{N_2}}{M_1 \Gamma_{N_1} + M_2 \Gamma_{N_2}}, \quad (4.7)$$

$$\varepsilon_{\alpha 2} |_{\Delta M = \Delta M_*} \simeq -\frac{1}{2\pi} \frac{\text{Im} [F_{\alpha 1}^* F_{\alpha 2} (F^\dagger F)_{12}]}{(F^\dagger F)_{11} (F^\dagger F)_{22}} \frac{M_2 \Gamma_{N_1}}{M_1 \Gamma_{N_1} + M_2 \Gamma_{N_2}}, \quad (4.8)$$

となる。今後、 $\Delta M = \Delta M_*$ の時の BAU の生成量は Y_B^{MAX} と書く。 $\text{Im} \omega_{IJ} = 0$ の時、 ΔM_* を具体的に書き下すと以下ようになる。

$$\Delta M_* = \frac{M_N^2}{16\pi \langle \phi^0 \rangle^2} (m_2 + m_3) \quad \text{順階層型}, \quad (4.9)$$

$$\Delta M_* = \frac{M_N^2}{16\pi \langle \phi^0 \rangle^2} (m_1 + m_2) \quad \text{逆階層型}. \quad (4.10)$$

具体的な計算は付録 C を参照すること。 N_I の生成量 Y_{N_I} とバリオン数 B と世代ごとのレプトン数 L_α の差 $X_\alpha = B/3 - L_\alpha$ に対するボルツマン方程式を用いて BAU の生成量を評価する。⁴ 初期条件は $Y_{N_I} = Y_{N_I}^{\text{eq}}$, $X_\alpha = 0$ とする、ここで $Y_{N_I}^{\text{eq}}$ は Y_{N_I} が熱平衡の時の量を表す。方程式を初期温度 $T_i \gg M_N$ ⁵ から $T_f = T_{\text{sph}}$ まで解き、BAU の生成量を計算する。ここで、 T_{sph} はスファレロン凍結温度で観測されたヒッグスボソン質量に対しては $T_{\text{sph}} = 131.7 \text{ GeV}$ [32] となる。右巻きニュートリノ質量を $M_N = 1 \text{ TeV}$ ととり、質量差を $\Delta M = \Delta M_*$ と取ることにより、バリオン数生成量の最大値 Y_B^{MAX} を評

⁴カダノフ-ペイム方程式を用いたレプトン数の評価については文献 [55, 56] で行われている。

⁵数値計算では $T_i/M_N = 100$ とする。

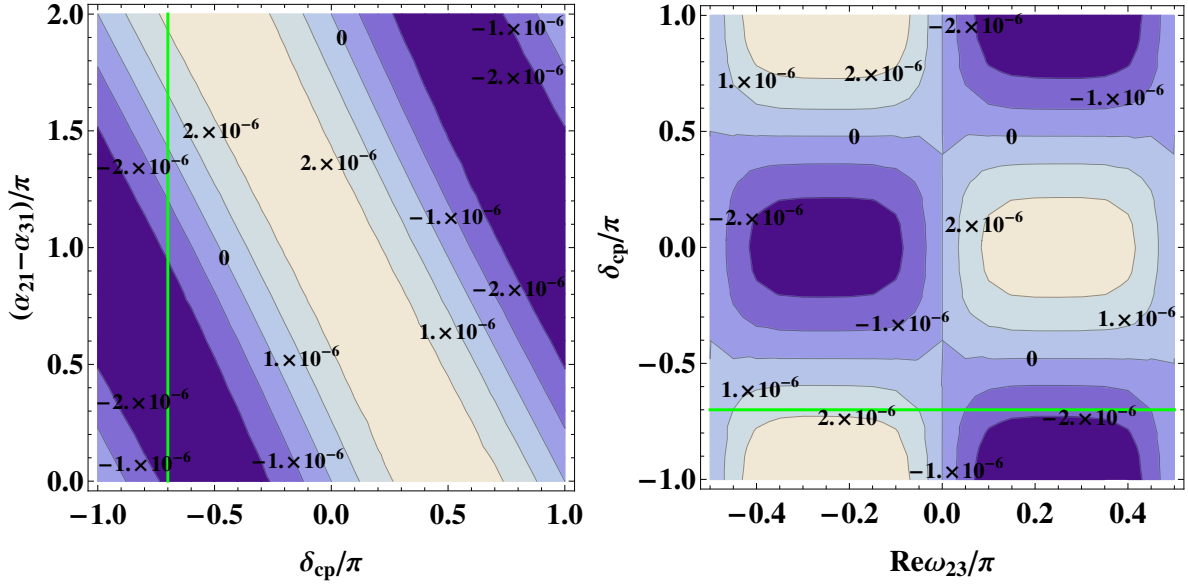


図 4.1: 順階層型の場合の Y_B^{MAX} の等高線. Y_B^{MAX} は色の明るいところで正の値, 暗いところで負の値を取る. 左側の図は $\text{Re}\omega_{23} = \pi/4$ とした時の $\delta_{\text{CP}} - (\alpha_{21} - \alpha_{31})$ 平面, 右側の図は $\alpha_{21} - \alpha_{31} = \pi$ とした時の $\text{Re}\omega_{23} - \delta_{\text{CP}}$ 平面をそれぞれ表す. 緑色の線はニュートリノ振動実験によって示唆されている δ_{CP} の中心値を表している.

価する. 加えて, 前節で説明したように CP 対称性の破れがアクティブニュートリノの混合行列 U のみによって起きている場合 (*i.e.* $\text{Im}\omega_{IJ} = 0$ ととる.) を考える. アクティブニュートリノの混合角 θ_{ij} と質量二乗差 Δm_{ij} は簡単のために表 4.1 に示した中心値を用いる. この状況において, Y_B が CP 位相 δ_{CP} と α_{ij} , 右巻きニュートリノの混合角 $\text{Re}\omega_{IJ}$ にどのように依存しているかを見積もる.

最初に, 図 4.1 に示した順階層型の場合を見ていく. Y_B^{MAX} が $\mathcal{O}(10^{-6})$ の大きさで生成されることがわかる, これは (2.44) でみた観測されている BAU の値に比べてはるかに大きい. 左側の図は右巻きニュートリノの混合角を $\text{Re}\omega_{23} = \pi/4$ と取った時のディラック位相とマヨラナ位相に対する Y_B^{MAX} の等高線を表している. ここで, Y_B^{MAX} は $\Delta M = \Delta M_*$ とした結果を示している. つまり図の $Y_B^{\text{MAX}} \geq Y_B^{\text{obs}}$ の領域では (2.44) の Y_B^{obs} は質量差 $\Delta M \geq \Delta M_*$ を調整することにより説明可能であることを意味する. この場合に順階層型で意味のあるマヨラナ位相の組み合わせは $\alpha_{21} - \alpha_{31}$ である. 図 4.1 から BAU の生成量はディラック位相とマヨラナ位相の両方共に強く依存していることがわかる.⁶ つまり, ディラック位相に対する実験, *e.g.* 加速器ニュートリノ [20, 58], からの情報は BAU の符号の決定に非常に重要となることを意味する. Y_B の CP 対称性を破る位相への依存の仕方は近似的に,

$$Y_B \propto \sin\left(\frac{\alpha_{21} - \alpha_{31}}{2} + \delta_{\text{CP}}\right), \quad (4.11)$$

で与えられる. この依存の仕方は $\varepsilon_{\alpha I}$ の構造とウォッシュアウト効果の強さ, つまり部分崩壊率 $\Gamma(N_I \rightarrow L_\alpha + \bar{\Phi})$ の構造, から見積もることができる. 一方で, 図 4.1 の右側の図は $\alpha_{21} - \alpha_{31} = \pi$ とした時の混合角 $\text{Re}\omega_{23}$ と δ_{CP} 平面における Y_B の等高線を表す. Y_B^{MAX} は $\text{Re}\omega_{23}$ に依存することがわかり, BAU の観測量は ν_R の混合角が $\text{Re}\omega_{23} = 0, \pi/2$ となる時に説明できないことがわかる.

次に逆階層型の場合を考える. 図 4.2 から Y_B^{MAX} は大体 $\mathcal{O}(10^{-8})$ であることがわかり, 従って逆階層型の場合の共鳴レプトン数生成は順階層型の場合と比較して効果が小さくなることがわかる. さらに CP 位相への依存の仕方も順階層型の場合とは異なる. 図 4.2 の左側の図は $\text{Re}\omega_{21} = \pi/4$ とした

⁶ $\text{Im}\omega_{23}$ への依存の仕方は文献 [57] で議論されている.

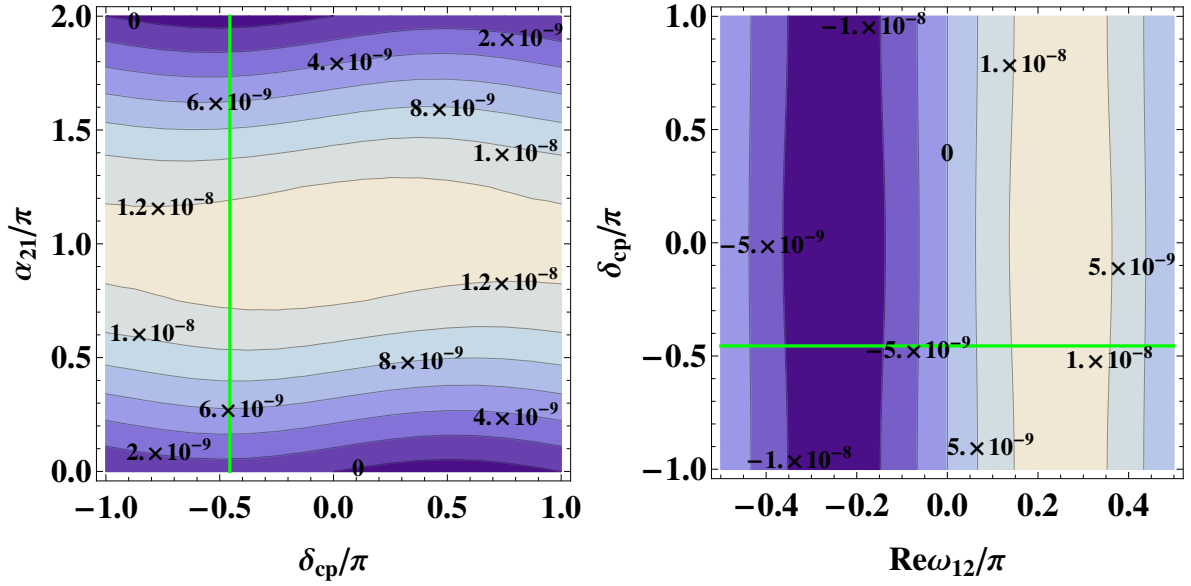


図 4.2: 逆階層型の場合の Y_B^{MAX} の等高線. Y_B^{MAX} は明るい領域ほど大きく, 暗い領域ほど小さい. 左の図は $\text{Re}\omega_{12} = \pi/4$ とした時の $\delta_{\text{CP}}-\alpha_{21}$ 平面, 右側の図は $\alpha_{21} = \pi$ とした時の $\text{Re}\omega_{12}-\delta_{\text{CP}}$ 平面をそれぞれ表している. 緑色の実線はニュートリノ振動の global analysis の δ_{CP} の中心値を表している.

時の $\delta_{\text{CP}}-\alpha_{21}$ 平面における Y_B^{MAX} の等高線を表している. これから Y_B のマヨラナ位相への依存は順階層型の時と同様に重要であることがわかる. ところが, ディラック位相への依存の仕方は順階層型の時と比べて非常に穏やかになることがわかる. この振る舞いは $\alpha_{21} = \pi$ と取った時の $\text{Re}\omega_{12}-\delta_{\text{CP}}$ 平面での Y_B^{MAX} の等高線を表した右側の図からも読み取ることができる. Y_B の CP 位相への依存の仕方は近似的に,

$$Y_B \propto \sin\left(\frac{\alpha_{12}}{2}\right). \quad (4.12)$$

で与えられる. ただし, NH の場合と比べて上記の依存性を乱すサブリーディングの効果は大きい. ν_R の混合角が $\text{Re}\omega_{12} = 0, \pi/2$ となる時, NH の時と同様 BAU の観測値は説明できない. 加えて, BAU の符号は $\text{Re}\omega_{12}$ の符号と関連している.

上で述べたように, Y_B^{MAX} はディラック位相, マヨラナ位相, ν_R の混合角に依存する. ディラック位相を文献 [54] のニュートリノ振動実験から得られる中心値に取った場合について議論する.

$$\delta_{\text{CP}} = \begin{cases} -0.700\pi \quad (234^\circ) & (\text{順階層型の場合}) \\ -0.456\pi \quad (278^\circ) & (\text{逆階層型の場合}) \end{cases}. \quad (4.13)$$

この場合, 図 4.3 に示したように BAU の符号はマヨラナ位相と ν_R の混合角によって決定される. 左図は順階層型の場合における $\text{Re}\omega_{23}-(\alpha_{21}-\alpha_{31})$ 平面での Y_B^{MAX} の等高線を表す. 興味深いことに, マヨラナ位相の値がどのような場合であっても, $\text{Re}\omega_{23}$ を適切に選ぶことで, 正しい Y_B の値が実現できることがわかる. 一方で, 図 4.3 の右側の図は逆階層型の場合における $\text{Re}\omega_{12}-\alpha_{21}$ 平面での Y_B^{MAX} の等高線を表す. バリオン数の生成は $\text{Re}\omega_{12} < 0$ と $\text{Re}\omega_{12} > 0$ の両方で実現できることがわかる. $\text{Re}\omega_{12} < 0$ の時 $\alpha_{21} = 2\pi$ が必要であり, この時には δ_{CP} による CP の破れも必要であることがわかる.

ν_R のマヨラナ質量の平均値 M_N との依存性について述べておく. 今考えている状況では, $\Delta M = \Delta M_*$ としたため, 式 (4.5) から (4.8) で与えられる CP 対称性の非対称度パラメータ $\varepsilon_{\alpha I}$ は M_N に依存しない. これは Y_B^{MAX} は大体 $M_N \lesssim 30 \text{ TeV}$ の領域では, 得られる結果が M_N には依存しないこと

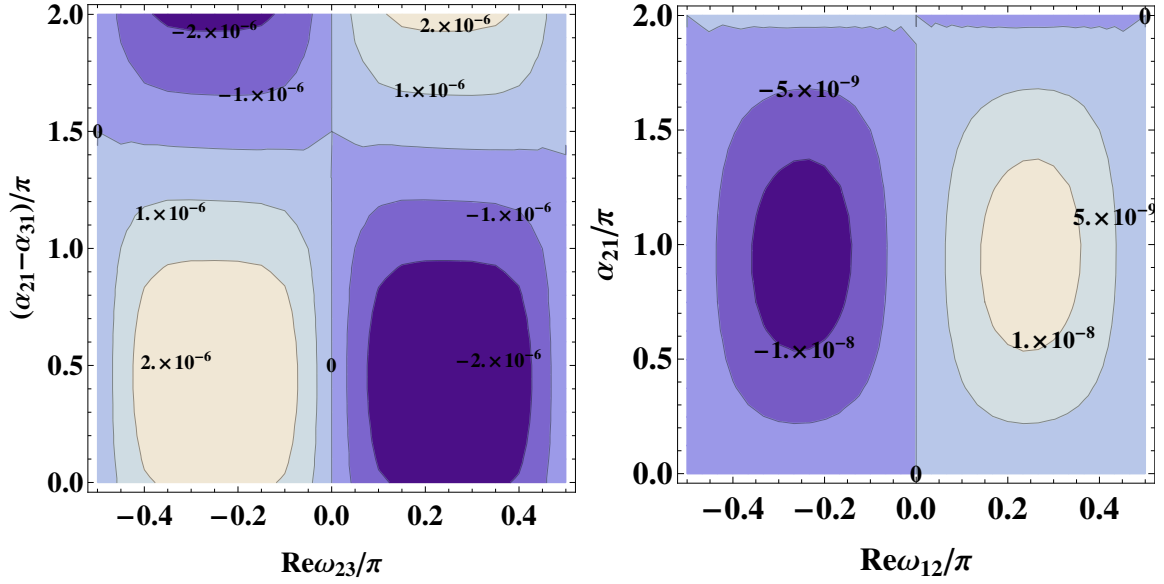


図 4.3: 式 (4.13) にディラック位相を取った時の Y_B^{MAX} の等高線. 順階層型の場合が左側の図, 逆階層型の場合が右側の図を表す. Y_B が正の領域は明るい色, 負の領域は暗い色に示している.

を意味する. このような質量領域では M_N の小さな依存性が M_N とスファレロン凍結温度 T_{sph} の相対的な大きさから生じる. M_N が TeV スケールの領域の時, レプトン数生成が起きるのは T_{sph} から離れていない温度のときである. これはウォッシュアウト過程のために, レプトン数をバリオン数へ転換するのが妨げられることを意味する. そのために最終的な BAU の値は M_N に依存する. もし M_N が T_{sph} よりも十分に大きければ, $T = T_{\text{sph}}$ に達する前に Y_B が凍結するためこのような効果は消える. 加えて, Y_B^{MAX} は散乱過程からも影響を受けるため, これらから M_N の小さな依存性が生じる. 一方で, $M_N \gtrsim 30$ TeV の時には, 全てのクォーク, 電子を含む全てのレプトンの湯川相互作用による反応がレプトン数生成時期に熱平衡であるとする我々の解析の仮定が成立しなくなる [37]. そのような場合には, フレーバー効果に対する取り扱いを変えなければならないため, Y_B^{MAX} の評価は大幅に修正される. それゆえ, ここで示した解析結果は M_N が 30 TeV と比べ十分小さいならばその大きさによらない.

共鳴レプトン数生成機構による BAU 生成量の解析から, 生成される BAU の符号と大きさはディラック位相とマヨラナ位相の両方に依存していることが分かった. そのうちディラック位相については, ニュートリノ振動実験によって観測が期待されている. ここでの議論から, レプトジェネシスの検証のためにはディラック位相 δ_{CP} だけでなく, マヨラナ位相 α_{21}, α_{31} を測定することも重要であることが分かった. ディラック位相が測定されれば, 残りのパラメータは, 右巻きニュートリノ質量のパラメータを除いて, マヨラナ位相 α_{ij} と $\text{Re}\omega_{IJ}$ である. 地上実験によって, これらのパラメータ, *i.e.* α_{ij} とアクティブニュートリノと右巻きニュートリノの混合角 $\Theta_{\alpha I}$ が測定されれば, BAU 生成のシナリオを検証することが可能であると言える. そこで, マヨラナ位相 α_{ij} が関わる物理現象であるニュートリノを伴わない二重ベータ ($0\nu\beta\beta$) 崩壊について次節でみていく.

4.3 ニュートリノを伴わない二重ベータ崩壊

シーソー機構を考えるとアクティブニュートリノはマヨラナフェルミオンとなり, 標準模型とは対照的にレプトン数が破れている. レプトン数が破れている一つの面白い過程は $0\nu\beta\beta$ 崩壊: $(A, Z) \rightarrow (A, Z+2) + 2e^-$ [52] である. その崩壊率は m_{eff}^2 に比例する. ここでニュートリノ有効質量は

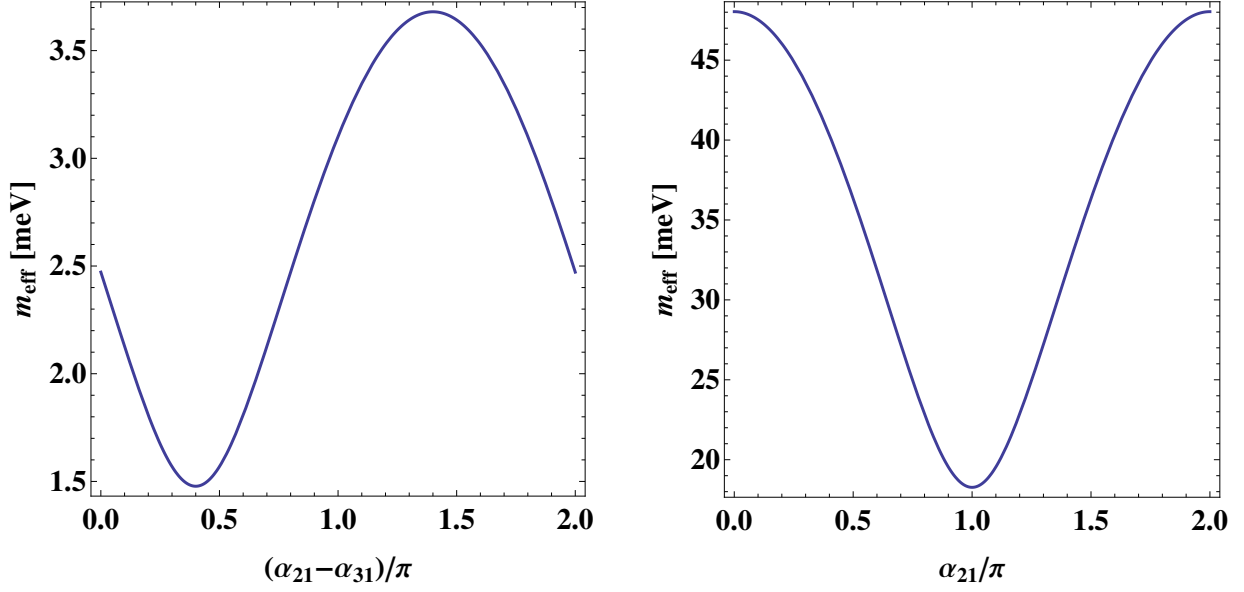


図 4.4: ニュートリノを伴わない二重ベータ崩壊における有効ニュートリノ質量 m_{eff} のマヨラナ位相への依存性. 順階層型の場合, $(\alpha_{21} - \alpha_{31})/\pi$ (左図). 逆階層型の場合, α_{21}/π (右図).

次式で与えられる.

$$m_{\text{eff}} = \left| \sum_i m_i U_{ei}^2 \right|. \quad (4.14)$$

ここで, 有効質量にはアクティブニュートリノのみの寄与を取り入れている. 右巻きニュートリノからの寄与については考えている状況では無視できる.

シーソー機構のニュートリノ質量に 2 世代の右巻きニュートリノのみが寄与する場合を仮定したため, 一番軽いアクティブニュートリノ質量は 0 となる. この場合には有効質量は順階層型の場合,

$$m_{\text{eff}}^2 = m_2^2 c_{13}^4 s_{12}^4 + m_3^2 s_{13}^4 + 2 m_2 m_3 c_{13}^2 s_{12}^2 s_{13}^2 \cos(\alpha_{21} - \alpha_{31} + 2\delta_{\text{CP}}), \quad (4.15)$$

逆階層型の場合,

$$m_{\text{eff}}^2 = c_{13}^4 [m_1^2 c_{12}^4 + m_2^2 s_{12}^4 + 2 m_1 m_2 c_{12}^2 s_{12}^2 \cos \alpha_{21}], \quad (4.16)$$

となる. 2 つの式を見れば, m_{eff} が CP 位相と同様にアクティブニュートリノの混合角にも依存することがわかる. 式 (4.13) で示した δ_{CP} の中心値, 混合角, 質量二乗差についてもニュートリノ振動実験の中心値を代入すると図 4.4 に示したようにマヨラナ位相によって有効質量は決定できる. 許される有効質量の範囲は,

$$m_{\text{eff}} = \begin{cases} (1.5 - 3.7) \text{ meV} & (\text{順階層型の場合}) \\ (18 - 48) \text{ meV} & (\text{逆階層型の場合}) \end{cases}. \quad (4.17)$$

ここで順階層型の時は $\alpha_{21} - \alpha_{31} = 0.4\pi$ と 1.4π , 逆階層型の時は $\alpha_{21} = \pi$ と 0 でそれぞれ有効質量が最初値, 最大値を取る.

前節で見たように, 共鳴レプトン数生成によるシナリオが成功するためには右巻きニュートリノの混合角 (*i.e.* 順階層型の場合 $\text{Re}\omega_{23}$, 逆階層型の場合 $\text{Re}\omega_{12}$) と同様にマヨラナ位相 (*i.e.* 順階層型の場合 $\alpha_{21} - \alpha_{31}$, 逆階層型の場合 α_{21}) が特定の範囲を取ることが必要であった. それゆえに, レプトン数生成により十分な量の BAU を生成するためには m_{eff} の範囲が限定されることが期待される.

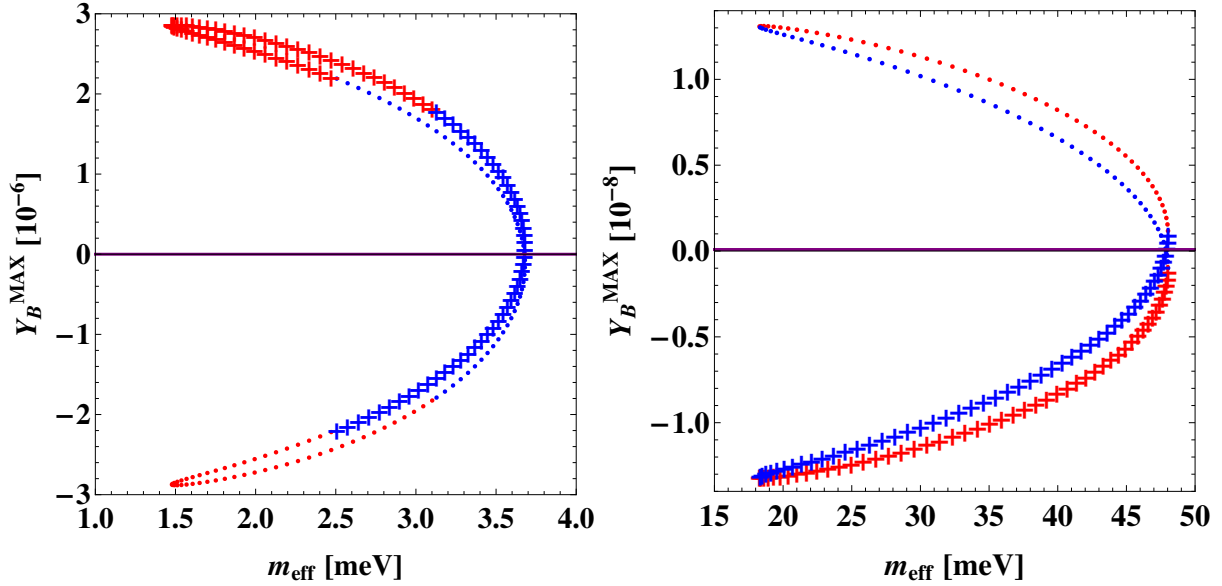


図 4.5: 有効ニュートリノ質量 m_{eff} に対する BAU の生成量 Y_B^{MAX} . 左図は順階層型の場合で, $\text{Re}\omega_{23} = -\pi/4$ と $(\alpha_{21} - \alpha_{31}) = 0$ から π (赤十字), $\text{Re}\omega_{23} = +\pi/4$ と $(\alpha_{21} - \alpha_{31}) = 0$ から π (赤点), $\text{Re}\omega_{23} = -\pi/4$ と $(\alpha_{21} - \alpha_{31}) = \pi$ から 2π (青十字), $\text{Re}\omega_{23} = +\pi/4$ and $(\alpha_{21} - \alpha_{31}) = \pi$ から 2π (青点), のように取った. 右図は順階層型の場合で, $\text{Re}\omega_{12} = -\pi/4$ と $\alpha_{21} = 0$ から π (赤十字), $\text{Re}\omega_{12} = +\pi/4$ と $\alpha_{21} = 0$ から π (赤点), $\text{Re}\omega_{12} = -\pi/4$ と $\alpha_{21} = \pi$ から 2π (青十字), $\text{Re}\omega_{12} = +\pi/4$ と $\alpha_{21} = \pi$ から 2π (青十字). 水平の実線は BAU の観測値 Y_B^{obs} .

右巻きニュートリノの混合角 $\text{Re}\omega_{23}$ か $\text{Re}\omega_{12}$ を与えると Y_B^{MAX} と m_{eff} が依存する決まらないパラメータはマヨラナ位相だけであるので, これらの間に非自明な関係を与えることができる. この関係を図 4.5 に示した. 特に, 混合角の値を変えることにより $m_{\text{eff}}-Y_B^{\text{MAX}}$ 平面で奇跡が描かれる特徴がある.

図 4.6 において BAU の観測量を説明するために, m_{eff} の範囲に対して与えられる予言を示す. 順階層型の場合, $0\nu\beta\beta$ 崩壊に対する影響は $\text{Re}\omega_{23}$ の値に依存して異なる. $\text{Re}\omega_{23} < 0$ の時, m_{eff} の予言される範囲は BAU によって影響を受けない. ところが, $\text{Re}\omega_{23} > 0$ の場合, m_{eff} は BAU の観測値を説明するためには下限を持つことがわかる. したがって, $\text{Re}\omega_{23}$ を特定しないと, BAU によって m_{eff} 上限と下限は影響を受けないが, $\text{Re}\omega_{23}$ が正の値を取る場合には, m_{eff} の範囲は狭まる. また, ΔM が大きくなると BAU の観測量は上限も与える. そして, $\Delta M \geq \mathcal{O}(10^5)\Delta M_*$ となると許される領域がなくなる, すなわち十分なバリオン数を生成する領域がなくなることを意味する.

一方で, 逆階層型の場合, バリオン数生成は $\text{Re}\omega_{12} \neq 0, \pi/2$ で実現できる. $\text{Re}\omega_{12} < 0$ の場合には, BAU はマヨラナ位相が $\alpha_{21} \approx 2\pi$ であることを要求する, すなわちこれは m_{eff} が許される最大値付近の値に予言されることを表す. さらに, 先にも述べたように m_{eff} は BAU からさらに上限がつく可能性がある. 図 4.6 に見られるようにバリオン数の生成が成功する領域は $\Delta M \gtrsim 300\Delta M_*$ で消失する.

この解析ではディラック位相の値に式 (4.13) の値を用いた. 順階層型の場合図 4.6 の許される領域は δ_{CP} の値によって変わる. 一方で逆階層型の場合には許される領域はほとんど変わらない. 順階層型の場合, $\text{Re}\omega_{23} > 0$ の時には δ_{CP} が中心値から 200° に近づくほど有効質量に対してより厳しい下限を与える. 一方で δ_{CP} が 270° に近づくると下限に対する制限は弱くなる. 一方で, $\text{Re}\omega_{23} < 0$ の場合にはディラック位相を中心値から 1σ の範囲 ($\delta_{\text{CP}} = 203^\circ - 277^\circ$ [54]) で動かした場合にも上限と下限は変わらない. この違いは Y_B の δ_{CP} 依存性から生じている. このため, 実験によって δ_{CP} を

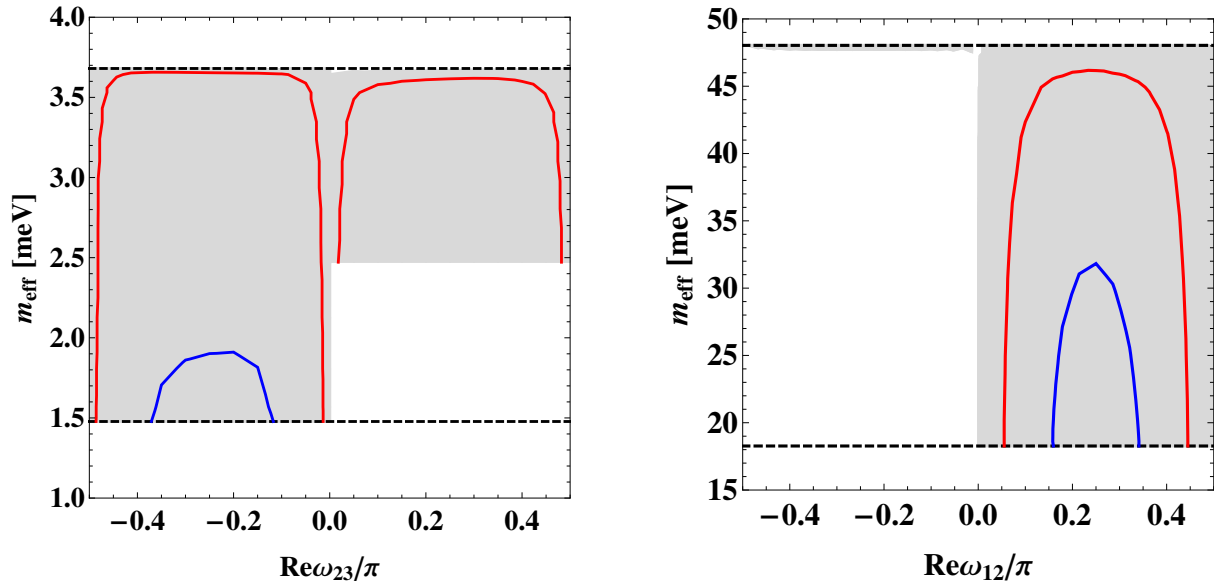


図 4.6: BAU を説明する有効質量 m_{eff} の範囲. 左図が NH, 右図が IH の場合である. 灰色の色付きの領域が許される. NH の場合, 赤線は $\Delta M = 1.0 \times 10^4 \Delta M_*$ の時の許される上限, 青線は $\Delta M = 6.0 \times 10^4 \Delta M_*$ の時の許される上限をそれぞれ表している. NH の場合, 赤線は $\Delta M = 1.0 \times 10^2 \Delta M_*$ の時の許される上限, 青線は $\Delta M = 2.5 \times 10^2 \Delta M_*$ の時の許される上限をそれぞれ表している.

決定することは $0\nu\beta\beta$ 崩壊だけでなく, BAU の予言に対しても重要である.

第5章 モジュラー A_4 不変な理論におけるレプトン数生成

標準模型には同じゲージ電荷を持ち、質量の異なるフェルミオンが3世代存在する (e.g., d, c, b). これらのフェルミオンは互いに混合している. 標準模型では質量や混合の大きさといったフレーバー構造を説明することはできない. フレーバー構造の起源として面白いのはフェルミオンの世代間対称性を考え、対称性が破れた結果として、フレーバー構造が説明されるものである. これはフレーバー対称性と呼ばれる. 特に、レプトンセクターに注目すると、3世代のニュートリノ ν_e, ν_μ, ν_τ の混合の大きさはトリ・バイマキシマル混合 ($\sin^2 \theta_{12} \simeq 1/3, \sin^2 \theta_{23} \simeq 1/2, \sin^2 \theta_{13} \simeq 0$) に近く、その混合が自然に説明される非可換離散対称性 S_3, A_4, S_4, A_5 などが調べられてきた [59–63].

近年、モジュラー群の部分群 $\Gamma_3 \simeq A_4$ を対称性として持つレプトンフレーバー模型が提案された [13]. モジュラー対称性とは二次元トーラス T^2 の幾何学的対称性であり、トーラスはモジュラスと呼ばれる複素場によって特徴付けられる. モジュラー群にはその有限部分群として S_3, A_4, S_4, A_5 が存在する [64]. モジュラー対称性をフレーバー対称性として持つ枠組みでは、湯川結合はモジュラー形式によって書かれ、これはフレーバー対称性の非自明な表現を持つモジュラスの関数として記述される. 湯川結合がこれらの特徴を持つので、フレーバー対称性を破るゲージシングレットのスカラール場を必要としない模型構築が可能となる. レプトンセクターのモジュラー対称性に基づく模型として、 S_3 [65], A_4 [13, 14, 65–71], S_4 [72–74], A_5 [75, 76] が調査されてきた.

モジュラー対称性は超弦理論の観点からも面白く、トーラスコンパクト化は余剰次元の最も単純なコンパクト化の一つであり、超弦理論の余剰次元コンパクト化によってモジュラー対称性やその有限部分群をフレーバー対称性として導くような理論的研究もされている [77–82].

レプトンセクターにモジュラー対称性を持つ模型では、次元5のワインバーグ演算子や右巻きニュートリノによるシーソー機構によって、ニュートリノ質量や混合角を予言する. このような右巻きニュートリノを含む理論において、右巻きニュートリノによるレプトジェネシスにより BAU を説明可能かどうか疑問としてあげられる. そこで本章ではレプトンセクターにモジュラー群の商群である Γ_3 対称性を持つ模型を検討し、これがニュートリノ振動の観測値を説明し、かつ宇宙のバリオン数非対称性を説明可能な理論であるか調査する. さらに、宇宙のバリオン数とニュートリノセクターの CP 対称性を破る非対称度パラメータとの相関を明らかにする. この章の内容は筆者らの論文 [83] に基づいて議論する.

5.1 モジュラー群とその商群

この説では、トーラス上のモジュラー対称性について説明する. 二次元トーラス T^2 は \mathbb{R}^2/Λ により構成される. ここで Λ は 2次元格子を表す. 複素平面 \mathbb{R}^2 とし、 Λ の基底ベクトルを $\alpha_1 = 2\pi R$, $\alpha_2 = 2\pi R\tau$ とする. ここで、 R は実数で τ はモジュラスと呼ばれる複素平面上の上半平面の値を取る複素数である (i.e. $\text{Im}\tau > 0$). このような格子を構成する基底ベクトルの選び方は1通りではない. 二次元格子 Λ は以下のような基底ベクトル α'_1, α'_2 で張ることができる.

$$\begin{pmatrix} \alpha'_2 \\ \alpha'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}), \quad (5.1)$$

ここで,

$$SL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\} \equiv \Gamma. \quad (5.2)$$

である. この変換をモジュラス $\tau \equiv \alpha_2/\alpha_1$ の意味で書き直すと以下のようなになる.

$$\tau \rightarrow \tau' = \gamma\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}). \quad (5.3)$$

モジュラー群は二次元格子 Λ を変えないような変換群である. (5.3) から, γ と $-\gamma$ は τ に作用し同じ点に移す. つまり, モジュラー群は $PSL(2, \mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z})/\{\mathbf{I}, -\mathbf{I}\} \equiv \bar{\Gamma}$ と準同型な群である. ここで, $\mathbf{I} = \text{diag}(1, 1)$ は単位行列である. モジュラー群は 2 つの生成子 S と T によって作られる. S と T はそれぞれ以下のような形で与えられる行列である.

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

モジュラス τ に対してはそれぞれ次のように作用する. $S: \tau \rightarrow -1/\tau$, $T: \tau \rightarrow \tau + 1$. S, T について次のような代数的関係が得られる.

$$S^2 = \mathbf{I}, \quad (5.5)$$

$$(ST)^3 = \mathbf{I}. \quad (5.6)$$

次のような群 $\Gamma(N)$, $N = 1, 2, 3, \dots$ を導入する.

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}. \quad (5.7)$$

また, $N = 1, 2$ に対して $\bar{\Gamma}(N) = \Gamma(N)/\{\mathbf{I}, -\mathbf{I}\}$, $N > 2$ に対して $\bar{\Gamma}(N) = \Gamma(N)$ と定義する. 群 $\bar{\Gamma}(N)$ はモジュラー群の無限部分群である. 商群 $\Gamma_N \equiv \bar{\Gamma}/\bar{\Gamma}(N)$ はモジュラー群の有限部分群であり, 有限モジュラー群と呼ばれる. 有限モジュラー群 Γ_N において, 生成子はさらに $T^N = \mathbf{I}$ という代数的関係を満たしている. $N = 2, 3, 4, 5$ について群 Γ_N はそれぞれ S_3, A_4, S_4, A_5 と同型である [64].

重さ k , レベル N のモジュラー形式 $f(\tau)$ は $\Gamma(N)$ のもとで次のように変換する正則関数である.

$$f(\gamma\tau) = (c\tau + d)^k f(\tau), \quad \gamma \in \Gamma(N). \quad (5.8)$$

ここで k は負でない偶数を取り, モジュラーウェイトと呼ばれる. $\Gamma_3 \simeq A_4$ の場合, A_4 で重さ 2 の 3 表現のモジュラー形式 $Y^{A_4}(\tau) = (Y_1(\tau), Y_2(\tau), Y_3(\tau))^T$ は具体的に次のように与えられる [13].¹

$$\begin{aligned} Y_1(\tau) &= \frac{i}{2\pi} \left(\frac{\eta'(\tau/3)}{\eta(\tau/3)} + \frac{\eta'((\tau+1)/3)}{\eta((\tau+1)/3)} + \frac{\eta'((\tau+2)/3)}{\eta((\tau+2)/3)} - \frac{27\eta'(3\tau)}{\eta(3\tau)} \right), \\ Y_2(\tau) &= \frac{-i}{\pi} \left(\frac{\eta'(\tau/3)}{\eta(\tau/3)} + \omega^2 \frac{\eta'((\tau+1)/3)}{\eta((\tau+1)/3)} + \omega \frac{\eta'((\tau+2)/3)}{\eta((\tau+2)/3)} \right), \\ Y_3(\tau) &= \frac{-i}{\pi} \left(\frac{\eta'(\tau/3)}{\eta(\tau/3)} + \omega \frac{\eta'((\tau+1)/3)}{\eta((\tau+1)/3)} + \omega^2 \frac{\eta'((\tau+2)/3)}{\eta((\tau+2)/3)} \right). \end{aligned} \quad (5.9)$$

ここでデデキントのエータ関数 $\eta(\tau)$ は $\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$, $q = e^{2\pi i\tau}$ で与えられる. $\eta(\tau)$ 関数は S と T 変換の下でそれぞれ次のように振る舞う.

$$S \text{ 変換: } \quad \eta(-1/\tau) = \sqrt{-i\tau} \eta(\tau), \quad (5.10)$$

$$T \text{ 変換: } \quad \eta(\tau + 1) = e^{i\pi/12} \eta(\tau), \quad (5.11)$$

¹レベル N , 重さ k のモジュラー形式については巻末の付録 F を参照のこと.

$\eta(\tau)^{24}$ は重さ 12 のモジュラー形式である. (5.9) 式のモジュラー形式の q 展開は,

$$\begin{aligned} Y_1(\tau) &= 1 + 12q + 36q^2 + 12q^3 + \dots, \\ Y_2(\tau) &= -6q^{1/3}(1 + 7q + 8q^2 + \dots), \\ Y_3(\tau) &= -18q^{2/3}(1 + 2q + 5q^2 + \dots). \end{aligned} \quad (5.12)$$

で与えられる (詳しくは付録 F に記した.). モジュラー変換 (5.3) のもとで, カイラル超場 $\phi^{(I)}$ は次のように変換する [84].

$$\phi^{(I)} \rightarrow (c\tau + d)^{-k_I} \rho^{(I)}(\gamma) \phi^{(I)}, \quad (5.13)$$

ここで $-k_I$ はモジュラーウェイトであり, $\rho^{(I)}(\gamma)$ は $\gamma \in \Gamma_N$ のユニタリ表現である. $\phi^{(I_1)}, \dots, \phi^{(I_n)}$ の n 次項に対する結合定数は重さ $k_Y(n)$, Γ_N の表現として次のように変換するモジュラー形式

$$Y_{I_1, I_2, \dots, I_n}(\gamma\tau) = (c\tau + d)^{k_Y(n)} \rho(\gamma) Y_{I_1, I_2, \dots, I_n}(\tau), \quad (5.14)$$

である. ここで $\rho(\gamma)$ はモジュラー形式に対する γ の表現である. モジュラー変換に不変な超ポテンシャル W は以下のように書かれる.

$$W = Y_{I_1, I_2, \dots, I_n}(\tau) \phi^{(I_1)} \phi^{(I_2)} \dots \phi^{(I_n)}. \quad (5.15)$$

ここで, $k_Y(n) = \sum_n k_{I_n}$ であり, $\rho(\gamma) \prod_n \rho^{(I_n)}(\gamma) = \mathbf{I}$ である.

ここではフレーバー対称性を除き, 場については最小超対称標準模型 (Minimal Supersymmetric Standard Model, MSSM) に右巻きニュートリノ場を加えたものを検討する. 検討する模型の超ポテンシャルでは, モジュラーウェイトが 0 となるように取る. 超対称性 (Supersymmetry, SUSY) の破れのスケールは $\mathcal{O}(1)\text{TeV}$ からコンパクト化のスケールの間を取ることができる. ここでは, 簡単のために右巻きニュートリノの質量スケールよりも十分大きなスケールで SUSY が破れていると仮定する. すなわち, 右巻きニュートリノ質量やそれよりも低エネルギーの物理にはフレーバー対称性を課したヒッグス 2 重項場が 2 個入った模型となる. 以下で議論するレプトジェネシスについても SUSY のないものを議論する.²モジュラー対称性はコンパクト化のスケールで τ の真空期待値によって破れている.

この解析では, 超ポテンシャルがモジュラー不変, すなわち大域的な超対称性を持つ模型を検討する.³

5.2 モジュラー A_4 対称性を持つフレーバー模型

ゲージ重項スカラー場を導入したレプトンセクターのフレーバー A_4 対称性を持つ模型については文献 [59–63] で議論されている. 一方で, モジュラー対称性に基づく A_4 フレーバー模型はゲージ重項スカラー場を導入することなしにニュートリノの大きな混合角を説明することができる. 荷電レプトンの質量, ニュートリノ振動実験や宇宙論からのニュートリノ質量和のについての制限を満足できる模型は, 例えば, 文献 [14] で提案されている. この解析では, 文献 [14] で提案された右巻きニュートリノ場を導入した模型を扱う. この節では, 今回の解析で扱う模型の紹介をし, 先行研究において示された結果を述べておく.

3つの左巻きレプトン二重項 L_i は A_4 の 3 表現であるとする. 3つの右巻きニュートリノ N_i^c についても A_4 3 表現とする. 他方で, アップ型ヒッグス二重項 H_u , ダウン型ヒッグス二重項 H_d は

²SUSY がプランクスケールかそれに近いところで破れていることを仮定する. この状況では, グラビティーノを含む SUSY 粒子の質量はプランクスケールに近いスケールとなる. それによって, グラビティーノ問題によるインフレーションの再加熱温度に対する厳しい制限は避けることができる.

³一方で, 超重力理論における超ポテンシャルはモジュラー変換がケーラー変換となるように修正される.

	L	e^c, μ^c, τ^c	N^c	H_u	H_d
$SU(2)_L$	2	1	1	2	2
A_4	3	1, 1'', 1'	3	1	1
$-k_I$	-1	-1	-1	0	0

表 5.1: 各場についての $SU(2)_L, A_4$, の表現 モジュラーウェイト $-k_I$ の割り当て

A_4 1 表現であるとする。また 3 つの右巻き荷電レプトンはそれぞれ異なる A_4 1 表現, $(e_1^c, e_2^c, e_3^c) = (e^c, \mu^c, \tau^c) = (1, 1'', 1')$ とする。それゆえ、荷電レプトンセクターの超ポテンシャルは 3 つ独立な結合定数 α, β, γ がある。これらの結合定数によって、荷電レプトンの質量の観測値は常に一致させることができる。MSSM の場と右巻きニュートリノ場についてのモジュラーウェイトと A_4 の表現の割り当てについては表 5.1 に示す。 A_4 の表現を持つ場の積については巻末の付録 E を参照のこと。

モジュラー不変なレプトンの質量項は以下の超ポテンシャルによって与えられる。

$$W_e = \alpha e^c H_d (LY^{A_4})_1 + \beta \mu^c H_d (LY^{A_4})_{1'} + \gamma \tau^c H_d (LY^{A_4})_{1''}, \quad (5.16)$$

$$W_D = g_1 (N^c H_u (LY^{A_4})_{3s})_1 + g_2 (N^c H_u (LY^{A_4})_{3a})_1, \quad (5.17)$$

$$W_N = \Lambda (N^c N^c Y^{A_4})_1. \quad (5.18)$$

ここで、ポテンシャルの各項でモジュラーウェイトは 0 となっている。パラメータ $\alpha, \beta, \gamma, g_{1,2}$ は定数で Λ は右巻きニュートリノのマヨラナ質量のパラメータである。文献 [14] に従って、 g_1 は実数、 g_2 は複素のパラメータで以下のように大きさ $|g_2|$ と位相 ϕ_g によって表す。

$$g_2 = |g_2| e^{i\phi_g}. \quad (5.19)$$

関数 $Y^{A_4}(\tau)$ は各成分が式 (5.9) で表される、重さ 2, A_4 3 表現のモジュラー形式である。 A_4 群の基底については巻末の付録 E の計算則に従うものとする。各場の表現と A_4 群の基底については、文献 [14] に従っている。

超ポテンシャル (5.16) は以下の荷電レプトンに対する質量行列を導く。

$$M_E = \nu_d \text{diag}[\alpha, \beta, \gamma] \begin{pmatrix} Y_1(\tau) & Y_3(\tau) & Y_2(\tau) \\ Y_2(\tau) & Y_1(\tau) & Y_3(\tau) \\ Y_3(\tau) & Y_2(\tau) & Y_1(\tau) \end{pmatrix}_{RL}. \quad (5.20)$$

ここで、 $\nu_d = \langle H_d \rangle$ である。ここで導かれた質量行列は SUSY が破れるスケールにおける質量行列であり、本来はくりこみ群方程式 (RGE) による発展の効果と SUSY の破れの効果を考慮すべきである。ここでの解析では、これらの効果を見捨てた。これらの効果については文献 [66] において議論されている。定数 α, β, γ は右巻き荷電レプトンに対する位相の再定義の自由度によって、一般性を失うことなく実数に取ることができる。この解析でも定数 α, β, γ は実数と取る。

超ポテンシャル (5.17) はニュートリノのディラック質量行列を与える。

$$M_D = \nu_u \begin{pmatrix} 2g_1 Y_1(\tau) & (-g_1 + g_2) Y_3(\tau) & (-g_1 - g_2) Y_2(\tau) \\ (-g_1 - g_2) Y_3(\tau) & 2g_1 Y_2(\tau) & (-g_1 + g_2) Y_1(\tau) \\ (-g_1 + g_2) Y_2(\tau) & (-g_1 - g_2) Y_1(\tau) & 2g_1 Y_3(\tau) \end{pmatrix}_{RL}. \quad (5.21)$$

ここで、 $\nu_u = \langle H_u \rangle$ である。一方で、右巻きニュートリノのマヨラナ質量行列は超ポテンシャル (5.18) から得られる。

$$M_N = \Lambda \begin{pmatrix} 2Y_1(\tau) & -Y_3(\tau) & -Y_2(\tau) \\ -Y_3(\tau) & 2Y_2(\tau) & -Y_1(\tau) \\ -Y_2(\tau) & -Y_1(\tau) & 2Y_3(\tau) \end{pmatrix}_{RR}. \quad (5.22)$$

ニュートリノの質量行列はシーソー機構によって以下のように与えられる。

$$M_\nu = -M_D^T M_N^{-1} M_D. \quad (5.23)$$

アクティブニュートリノの質量 m_i は M_ν を対角化することにより与えられ、ニュートリノの混合行列 U は M_ν と M_E を同時に対角化することにより得られる。ここで、荷電レプトンの質量 m_e, m_μ, m_τ 、アクティブニュートリノの質量 m_1, m_2, m_3 、右巻きニュートリノの質量 M_1, M_2, M_3 ($M_3 > M_2 > M_1 > 0$) は次のように与えられる。

$$\text{diag}(m_e, m_\mu, m_\tau) = V_R^\dagger M_E V_L, \quad (5.24)$$

$$\text{diag}(m_1, m_2, m_3) = U_\nu^\dagger M_\nu U_\nu^*, \quad (5.25)$$

$$\text{diag}(M_1, M_2, M_3) = U_M^\dagger M_N U_M^*. \quad (5.26)$$

ここで、 V_R, V_L, U_ν, U_M はユニタリ行列である。混合行列 U は

$$U = V_L^T U_\nu, \quad (5.27)$$

で与えられ、(2.18) 式の形で表される。右巻きニュートリノの湯川結合定数 Y_ν は、荷電レプトンと右巻きニュートリノの質量固有状態の基底で、

$$Y_{\nu I\alpha} = \left[\frac{U_M^\dagger M_D}{v_u} \right]_{I\alpha}, \quad (5.28)$$

と与えられる。

レプトジェネシスの CP 非対称パラメータ $\epsilon_I \propto \text{Im} \left[(Y_\nu Y_\nu^\dagger)_{IJ}^2 \right]$ である。質量行列とユニタリ行列は、モジュラス τ や模型のパラメータによって決まるので、アクティブニュートリノの混合行列 U と CP 非対称パラメータ ϵ_I はこれらのパラメータに依存する。特に、CP 対称性の破れに関する量である、 $\delta_{\text{CP}}, \alpha_{ij}$ 、BAU の生成量 Y_B (*i.e.* ϵ_I で決まる。) は模型の CP 位相 $\text{Re}\tau, \phi_g$ に依存する。このため、低エネルギーの CP 位相である $\delta_{\text{CP}}, \alpha_{ij}$ と高エネルギーの CP 位相 ϵ_I (*i.e.* BAU の生成量 Y_B) との間に相関が存在し得る。この模型は荷電レプトンの質量、ニュートリノの混合角 θ_{ij} と質量二乗差 $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$ の観測値を再現することができる。ニュートリノ質量和の上限に対する制限 $\sum m_i < 160 \text{ meV}$ [23] を要求するとニュートリノ質量は順階層であることが予想され、 $\sin^2 \theta_{23}$ については 0.54 以上であることが予想される [14]。さらに、ディラック位相は $\delta_{\text{CP}} = \pm(50^\circ - 180^\circ)$ の範囲、ニュートリノ質量の和は 145 meV 以上となり、 $0\nu\beta\beta$ 崩壊の有効質量は 22 meV であることが予想される。このことについては文献 [14] に詳しく述べられている。

この模型には右巻きニュートリノのマヨラナ質量項によるレプトン数の破れ、モジュラス τ と結合定数によって CP 対称性の破れが実現される、というレプトン数生成に必要な要素が全て含まれている。したがって、レプトジェネシスによって BAU を説明可能かを調査することは意義がある。BAU の生成量は右巻きニュートリノ質量 M_I と右巻きニュートリノ湯川結合定数に依存する。検討している模型では対称性によりこれらのパラメータが非常に制限されているから、BAU とアクティブニュートリノの観測値の間に非自明な関係が予想される。この非自明な相関を示すことがここでの重要な帰結の一つである。これより後の節で BAU 生成を検討する方法と結果について示す。

レプトジェネシスを議論する前に、ニュートリノ振動実験の観測値を説明することから得られる右巻きニュートリノの性質について述べておく。この目的のために、まず文献 [14] の模型を数値的に再解析する。荷電レプトンの質量は文献 [22] のものを用い、ニュートリノ振動のパラメータは表 5.2 に記したものを用いる。それに加えて、ニュートリノ質量の和に対して $\sum m_i < 160 \text{ meV}$ (98% CL) [23] を条件として課す。これは文献 [14] と同様の条件である。ここで、レプトジェネシスを議論するのに必要となる右巻きニュートリノの性質について述べる。

観測量	3σ の範囲
$\sin^2 \theta_{12}$	0.275 – 0.350
$\sin^2 \theta_{23}$	0.427 – 0.609
$\sin^2 \theta_{13}$	0.02046 – 0.02440
Δm_{21}^2	$(6.79 - 8.01) \times 10^{-5} \text{ eV}^2$
Δm_{31}^2	$(2.432 - 2.618) \times 10^{-3} \text{ eV}^2$

表 5.2: ニュートリノ質量が順階層な場合におけるニュートリノ振動パラメータの 3σ 以内の範囲. 数値は NuFIT 4.1 (2019) [85] のものを記している.

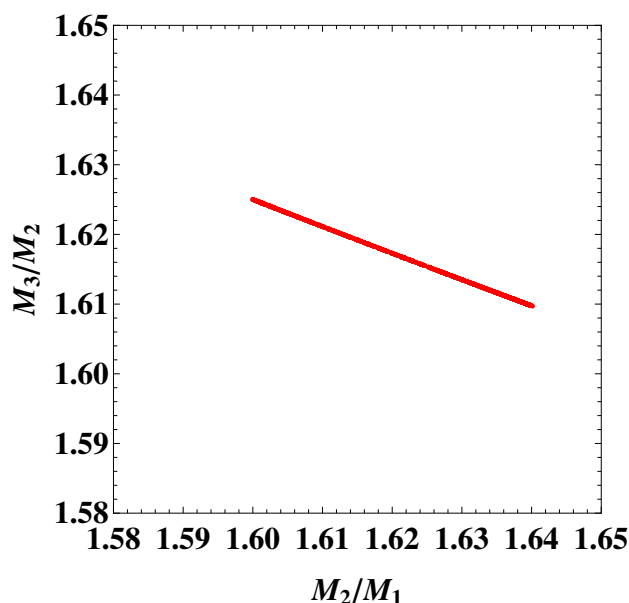


図 5.1: 右巻きニュートリノの質量比として許される領域.

まず, 許される右巻きニュートリノの質量比は図 5.1 に示すものとなる. M_2/M_1 と M_3/M_2 が共に 1.6 程度であることが分かる. ここで, ニュートリノ振動実験の観測値だけでは右巻きニュートリノ質量の絶対値は決めることはできないことを述べておく. このことについては 5.4 節で説明する. 右巻きニュートリノ質量の絶対値は BAU から決定することができる. このことはレプトジェネシスを考察する上で次の 2 つの点で重要である.

- (1) 3 世代の右巻きニュートリノが全て同様のスケールの質量を持つので, レプトジェネシスによるレプトン数生成には全ての右巻きニュートリノが寄与する.
- (2) 右巻きニュートリノの質量差が大きいので, 3.5 節で議論したレプトン数生成の共鳴的な生成 [10] は有効とならない.

次にこの模型における CP 対称性の破れのパラメータについて考える. 模型において複素パラメータは, τ と g_2 の 2 つである. これらがバリオン数生成の CP 対称性の破り方にも関連する. さらに, これらのパラメータはアクティブニュートリノにおける CP 対称性の破れ (δ_{CP}, α_{ij}) と右巻きニュートリノの CP 対称性の破れの両方を引き起こすことに注意が必要である. 興味深いことに, 図 5.2 から分かるように, マヨラナ位相 $\alpha_{21,31}$ と g_2 の位相 ϕ_g との間には非常に強い相関がある. マヨラナ

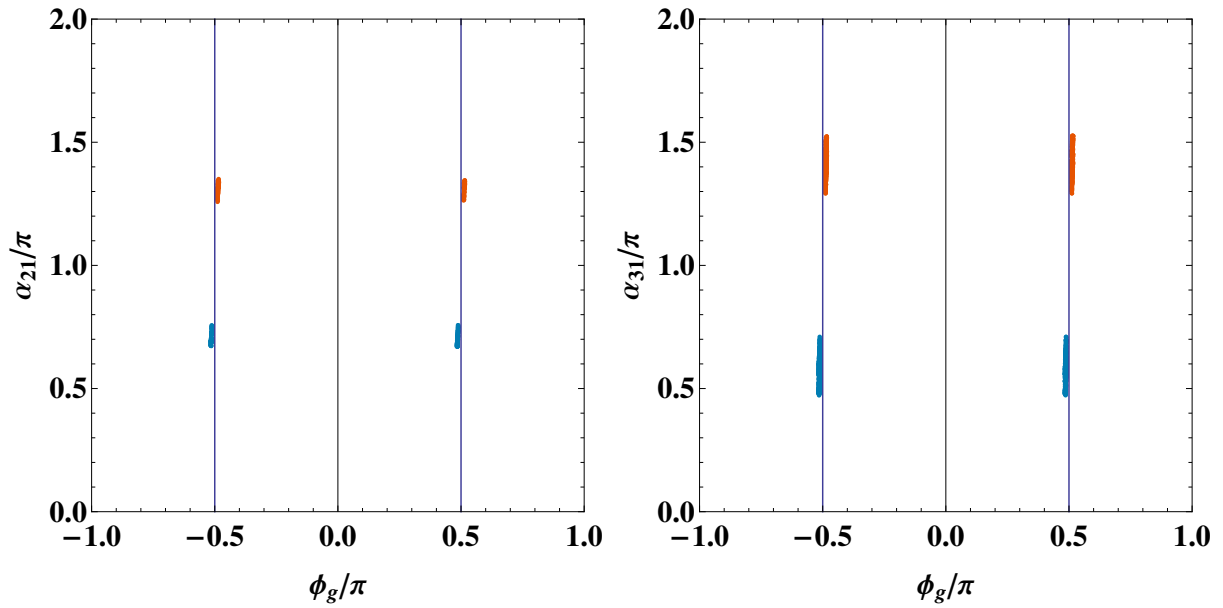


図 5.2: 許されるマヨラナ位相の値と模型のパラメータ ϕ_g との相関. 左図が ϕ_g と α_{21} , 右図が ϕ_g と α_{31} との関係を表す. 橙色の点は Y_B が正, 青点は Y_B が負を表す.

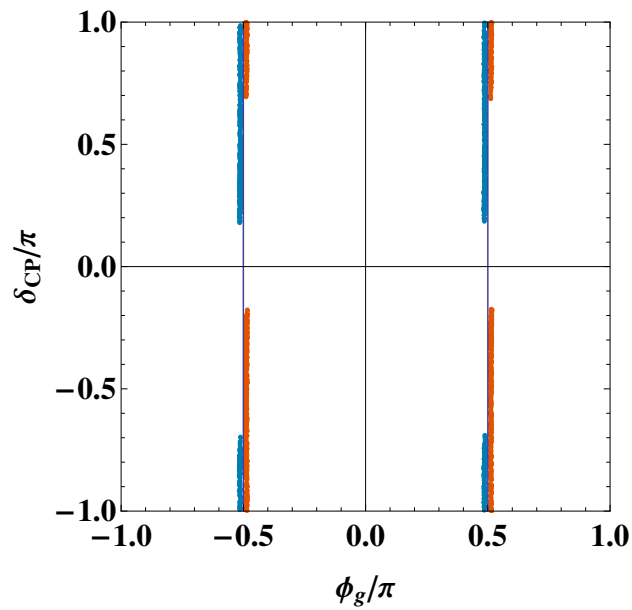


図 5.3: 許されるディラック位相 δ_{CP} と模型のパラメータ ϕ_g との相関. 橙色の点は Y_B が正, 青点は Y_B が負を表す.

位相として取ることのできる値は ϕ_g が $\pm\pi/2$ よりもわずかに大きい小さいかによって大きく異なる. また, τ とマヨラナ位相には強い相関は見られない. 一方で, ディラック位相 δ_{CP} は τ と ϕ_g に非自明に相関していて, これらのパラメータとの相関を見出すことは困難である.

5.3 レプトン数生成

この節では、この模型における右巻きニュートリノの崩壊によるレプトン数生成について議論する。前節までで述べたように、右巻きニュートリノ間の質量比はあまり大きくなく大体～1.6程度であるので、3世代全ての右巻きニュートリノによるレプトン数生成への寄与を取り込まなければならぬ。ここでは簡単のために、インフレーションの再加熱温度は最も重い右巻きニュートリノの質量よりも十分高く、初期条件として全ての右巻きニュートリノの数密度をゼロとする。一方で、右巻きニュートリノの質量差は共鳴レプトン数生成機構 [10] が働くほど小さくはないため、レプトン数生成が共鳴的に増加することは起きない。従って、BAUの生成量はボルツマン方程式に基づいて評価する。さらに、詳しくは後で述べるが、この模型でBAUの観測量を説明するために要求される右巻きニュートリノ質量は $\mathcal{O}(10^{13})$ GeVと非常に大きいため、単純なレプトジェネシスの1フレーバー近似が適用でき、フレーバー効果 [39–46] については無視できる。

右巻きニュートリノの数密度 n_{N_i} とレプトン数密度 n_L に対するボルツマン方程式 (3.59) と (3.60) を解く。エントロピー密度 s とハッブル定数 $H(T)$ は温度による高次の項も考慮し以下のように取る。

$$s = \frac{4\rho_R(T)}{3T}, \quad (5.29)$$

$$H(T) = \sqrt{\frac{\rho_R(T)}{3M_{pl}^2}}. \quad (5.30)$$

また、熱平衡時の右巻きニュートリノの残存量 $Y_{N_i}^{eq}$ と1自由度の質量を持たない粒子の残存量 Y_ℓ^{eq} は、

$$Y_{N_i}^{eq} = \frac{n_{N_i}^{eq}}{s} = \frac{3T^4}{4\pi^2\rho_R(T)} a_I z^2 K_2(\sqrt{a_I}z), \quad (5.31)$$

$$Y_\ell^{eq} = \frac{3T^4}{4\pi^2\rho_R(T)}, \quad (5.32)$$

とする。ここで、エネルギー密度は $\rho_r(T) = (g_* \frac{\pi^2}{30} - \frac{7}{4}g_3^2 - \frac{19}{32}g_2^2 - \frac{25}{96}g_Y^2)T^4$ である [88]。 g_* は熱平衡状態時の有効自由度であり、今ヒッグス二重項は2個含まれているので $g_{*s} = 110.75$ である。各反応過程において $\Phi \rightarrow \overline{H}_u$ と読み替えた。また、巻末の付録Bで与えられる各反応率について、ニュートリノ湯川結合定数 $F_{\alpha I}$ を $F_{\alpha I} \rightarrow [Y_\nu^*]_{I\alpha}$ と置き換える。

さらに反応率を評価する際に、ゲージ結合定数とトップ湯川結合定数について1ループレベルでのRGEによる発展を考慮する。ここで、くりこみのエネルギースケールは $\mu = 2\pi T$ と取る。高温ではRGEによる発展によって零温度の時と比べ、トップ湯川結合定数が小さくなり、レプトン数非対称性の生成に対するウォッシュアウトが抑制され、レプトジェネシスによるBAU生成が成功するパラメータ空間が広がるため重要な効果となる。

ボルツマン方程式を数値的に解くことにより、右巻きニュートリノの崩壊によるレプトン数非対称性 Y_L^I が評価できる。現在のバリオン数非対称性 Y_B はヒッグス二重項場が2個含まれていることを考慮し、 $Y_B = -8/23 Y_L^I$ とすることで見積もる。⁵

ここでは、一番軽い右巻きニュートリノが十分重いいため、レプトジェネシスのフレーバー効果 [39–46] を無視することができる。この場合には、通常 (2.35) 式から、最終的なバリオン数非対称性はPMNS行列によらない。ところが、ここで検討している模型ではPMNS行列の位相と右巻きニュー

⁴クォーク、レプトン、ゲージボソンから受ける温度効果のリーディングの寄与のみを含んでいる。湯川結合定数については無視した。

⁵ここで、スファレロン凍結温度までヒッグス二重項場が自由度として残ることを仮定した。ヒッグス二重項場が1つである場合には $Y_B = -28/79 Y_L^I$ とすることで得られる。

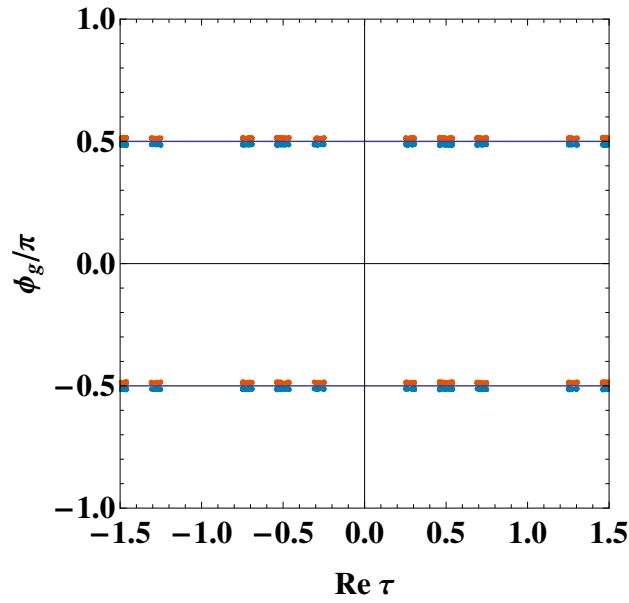


図 5.4: $\text{Re } \tau$ と位相 ϕ_g がニュートリノ振動のデータを満たす領域. 赤と青の点はそれぞれ BAU が正, 負に対応する.

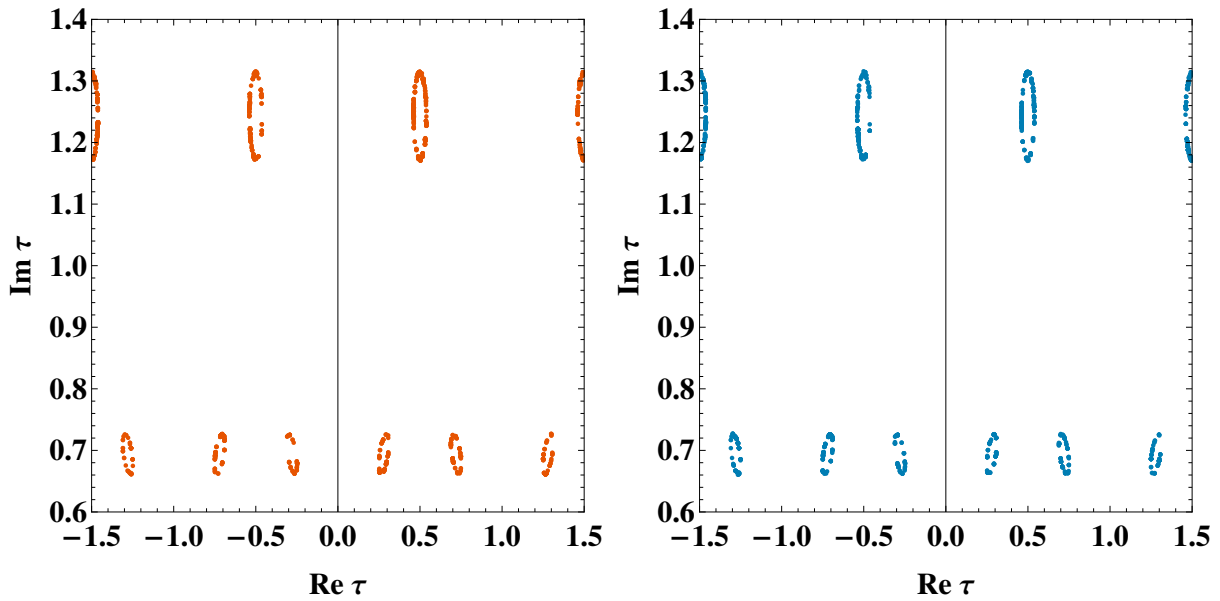


図 5.5: $\text{Re } \tau$ と $\text{Im } \tau$ 平面上でニュートリノ振動のデータを満たす領域. 左図は BAU が正, 右図は BAU が負の場合.

トリノに関わる高エネルギーの CP 位相は模型のパラメータ τ と g_2 が起源となる. このような状況では, PMNS 行列の CP 位相と BAU の生成量との間に相関がある可能性がある.

5.4 BAU の符号と大きさ

この節では模型の右巻きニュートリノによる BAU の生成について結果を示す. まず右巻きニュートリノにより生成される BAU の符号について見ていく. 一番最初の結果は生成される BAU の符号

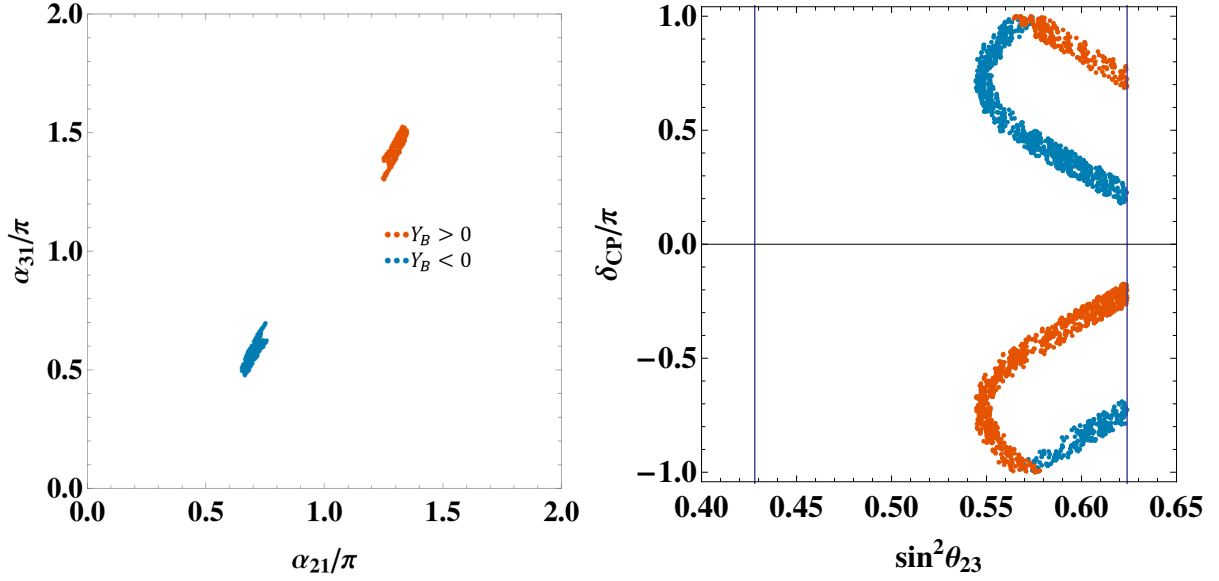


図 5.6: α_{21} と α_{31} (左図), $\sin^2 \theta_{23}$ と δ_{CP} (右図). Y_B が正の点は橙色, 負の点は青色.

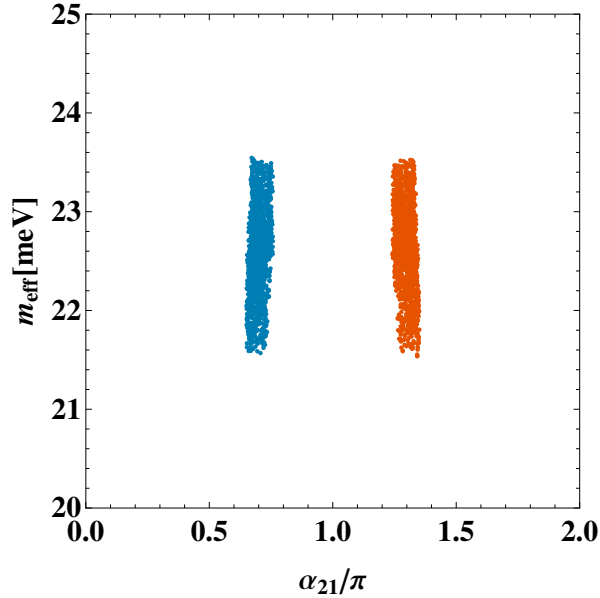


図 5.7: α_{21} と m_{eff} が許される領域.

は複素の結合定数 g_2 の位相によって決定されるということである. この結果は図 5.4 に示した. 正の符号の BAU は ϕ_g が $\pi/2, -\pi/2$ よりもわずかに大きなところのみで得られることがわかる. 一方で, 図 5.5 から読み取れるように, BAU の符号と複素パラメータ τ との間に強い相関は見られない.

位相 ϕ_g はマヨラナ位相 α_{21} と α_{31} に非常に強く相関している. 正の BAU は非常に限られたマヨラナ位相の値でのみ実現されることが図 5.6 から読み取ることができる. またアクティブニュートリノの観測値によってマヨラナ位相は 2 つの領域が許されることがわかる. この 2 つの領域は $\alpha_{21,31} \approx 2\pi - \alpha_{21,31}$ という関係で対応している. ところが正の BAU を実現するのは 2 つの領域のうち $\alpha_{21} \sim 1.3\pi$ かつ $\alpha_{31} \sim 1.5\pi$ のみである. マヨラナ位相を実験で測ることは非常に困難だが, この結果はレプトン数生成の予言として非常に重要である. また, 図 5.7 から見られるように, $0\nu\beta\beta$ 崩壊の有効ニュートリノ質量が予言される範囲については, BAU が正か負かにはよらない.

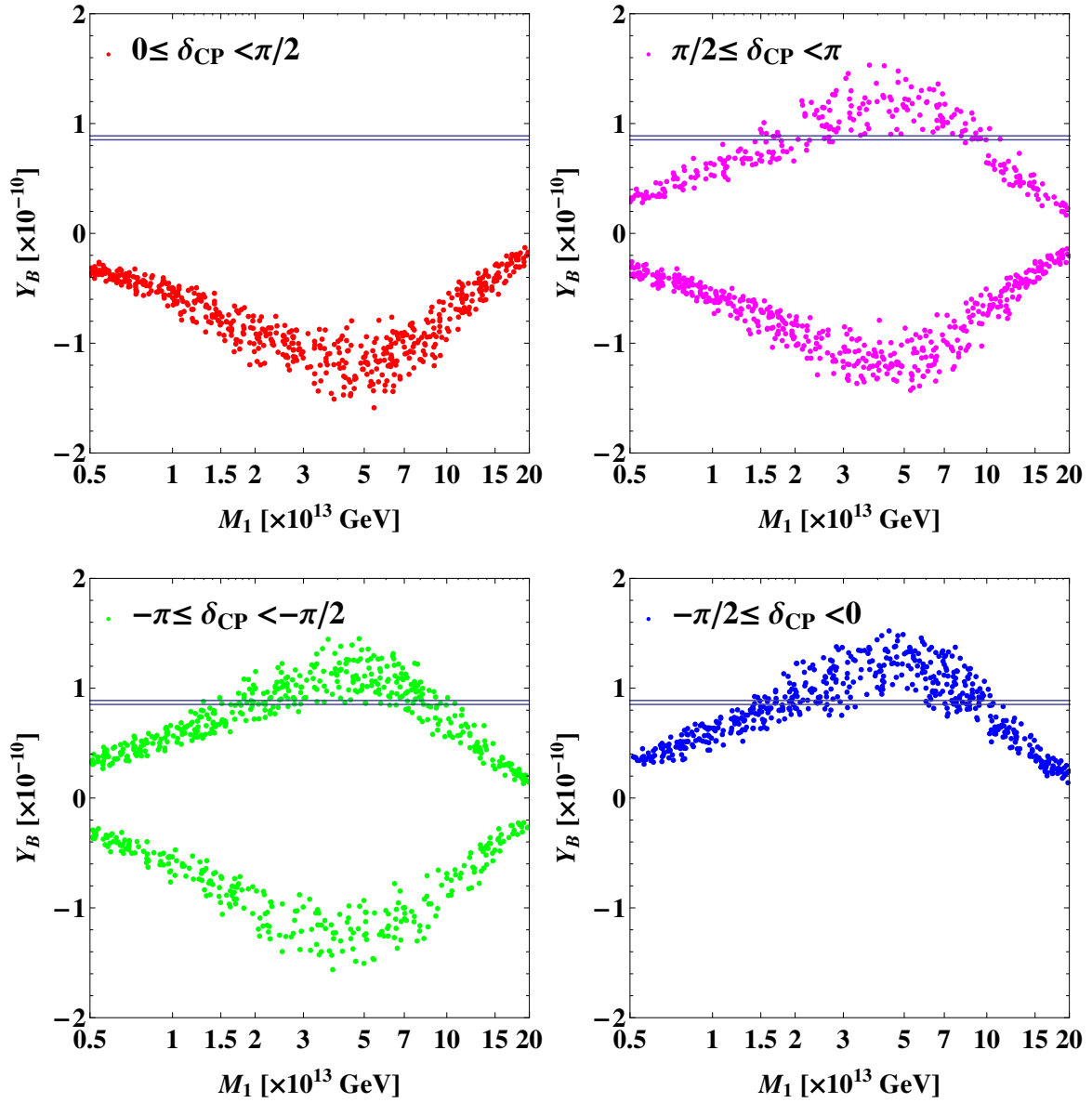


図 5.8: 一番軽い右巻きニュートリノ質量と BAU の生成量の関係. δ_{CP} は図によってそれぞれ $[0, \pi/2]$ (左上), $[\pi/2, \pi]$ (右上), $[-\pi, -\pi/2]$ (左下), $[-\pi/2, 0]$ (右下) と取っている. 上下の実線は Y_B の観測量の上限と下限を示している.

2 番目に, 図 5.6 から, BAU の符号とディラック位相との相関は $\sin^2 \theta_{23}$ の値によって異なることがわかる. $\sin^2 \theta_{23} \lesssim 0.58$ の時には正の BAU は $\delta_{\text{CP}} < 0$ のみ許されることがわかる. 一方で, $\sin^2 \theta_{23} \gtrsim 0.58$ の時には正の BAU は $\delta_{\text{CP}} < 0$ と $\delta_{\text{CP}} > 0$ の両方の場合があることがわかる. このことは, $\sin^2 \theta_{23}$ と δ_{CP} の正確な測定が検討しているバリオン数生成のシナリオとして決定的に重要なテストとなることを示している.

次に, BAU の生成量の大きさについての議論に移る. バリオン数の生成量はせいぜい BAU の観測量と同じ程度の大きさであることが図 5.8 からわかる. これは模型が予言するレプトン数生成の有効ニュートリノ質量 \tilde{m}_1 ($\tilde{m}_1 = (Y_\nu Y_\nu^\dagger)_{11} \nu_u^2 / M_1$) が比較的大きいからである. 実際数値的に求め

ると $\tilde{m}_1 \simeq 54 - 57 \text{ meV}$ となり, 強いウォッシュアウト効果が避けられないことを示している. このことは最も軽い右巻きニュートリノ質量が $M_1 \simeq (1.5 - 10) \times 10^{13} \text{ GeV}$ の範囲にあるべきという結果を導く. 図 5.8 から, 最も軽い右巻きニュートリノ質量に対する BAU の大きさの振る舞いが $M_1 \simeq 4.0 \times 10^{13} \text{ GeV}$ を境に変化することがわかる. $M_1 \lesssim 4.0 \times 10^{13} \text{ GeV}$ の時には, M_1 が大きいほど多くの BAU が作られる. 一方で, $M_1 \gtrsim 4.0 \times 10^{13} \text{ GeV}$ では, M_1 が大きくなるほど生成される BAU の量は少なくなる. それは M_1 が大きくなるほど, $\Delta L = 2$ の過程によるウォッシュアウトの効果がより大きく働き, 重要となるためである. それゆえ, BAU の観測値を説明するためには, 最も軽い右巻きニュートリノ質量は特定の範囲 ($M_1 \simeq (1.5 - 10) \times 10^{13} \text{ GeV}$) に限られる.

第6章 結論

本論文では素粒子標準模型では説明することができない、ニュートリノが持つ極微の質量, 及び宇宙バリオン数非対称性の問題の解決について考えた. 特に, 標準模型の拡張模型として重い右巻きニュートリノを導入したモデルを検討した. 右巻きニュートリノによるシーソー機構によってニュートリノの極端に小さな質量が自然に説明されること, 同時に導入した重い右巻きニュートリノの崩壊によって宇宙バリオン数非対称性の問題を解決するシナリオであるレプトン数生成機構を考えた. シーソー機構とレプトン数生成を同時に実現する右巻きニュートリノに許される質量は非常に広い領域で許され, 質量のスケールと世代間の質量差に応じて, 様々なレプトン数生成の機構が提唱されている. 特に, 一番軽い右巻きニュートリノ質量が $\mathcal{O}(10^9)$ GeV 以上で質量に階層性がある場合のレプトジェネシスとそのフレーバー効果, また質量が縮退していて, 電弱スケール以上の質量を持つ場合の共鳴レプトン数生成機構について解説した.

バリオン数をレプトジェネシスによって生成するためには, 高エネルギーで CP 対称性が破れていることが必要である. つまり, 高エネルギーでの CP 対称性の破れ方が BAU の生成量を決定する. したがって, 高エネルギーでの CP 対称性の破れを理解することが BAU の起源を理解する上で重要である. 一方で, 低エネルギー側での CP 対称性の破れは, ニュートリノ混合行列 U に含まれるディラック位相 δ_{CP} とマヨラナ位相 α_{ij} であり, 将来測定されることが期待されている. 本研究では, 高エネルギーでの CP 対称性の破れの結果である BAU と低エネルギーでの CP 対称性の破れを表す δ_{CP}, α_{ij} との関係を示し, 地上実験によってレプトジェネシスの検証が可能かを示すことを目的とした. 特に, 正のバリオン数を予言する地上実験で測定されるニュートリノ観測の領域を示し, その機構における BAU の生成機構の是非を検討した. そのために本研究では, 以下の二つの場合について, BAU の生成量とニュートリノの CP 位相との間関係を調査した.

1つ目は, 右巻きニュートリノが $\mathcal{O}(1)$ TeV スケールの質量を持つ場合である. このスケールのエネルギーを持つ右巻きニュートリノは将来実験で探索可能性があり, かつ BAU 生成にはフレーバー効果が入るため, BAU の生成量とニュートリノセクターの CP 対称性の破れの間には関係がある. 1つ目の場合にはこのことに注目して共鳴レプトン数生成機構による BAU 生成を調査した.

2つ目は右巻きニュートリノ質量は $\mathcal{O}(10^{13-14})$ GeV と重いが, レプトンセクターに余剰次元のトーラスコンパクト化に起因するモジュラー A_4 対称性を持つモデルにおける BAU 生成のシナリオを検討した. この場合には, 右巻きニュートリノが重いため, レプトジェネシスのフレーバー効果は十分に働かない. そのため, BAU 生成量と PMNS 行列の CP 位相との間に直接的な関係はない. しかし, モデルが持つ CP 対称性を破るパラメータ τ, g_2 (*i.e.* $\text{Re}\tau, \phi_g$) によって, BAU に必要な CP 対称性の破れとニュートリノの CP 対称性の破れが両方とも引き起こされるため, この2つは相関している. 2つ目の場合はこのことに着目して BAU の生成量とニュートリノ CP 位相との間関係を調査した.

最初に1つ目の場合に得られた結果を示す. 2世代の右巻きニュートリノ質量が比較的小さな 1TeV の縮退した質量を持つ場合の共鳴レプトン数生成機構をボルツマン方程式を用いて数値的に解析した. 特に, BAU が PMNS 行列の CP 位相に由来している場合を示すために, Ω が実行列 (*i.e.* $\text{Im}\omega_{IJ} = 0$) の場合を調査した. この場合に BAU の生成量は, ニュートリノ質量が順階層型の場合に最大で $Y_B \sim \mathcal{O}(10^{-6})$, 逆階層型の場合に最大で $Y_B \sim \mathcal{O}(10^{-8})$ が生成可能である. この場合にニュートリノの CP 位相と生成される BAU との間に相関があることを示した. BAU 生成量の符号と大きさは, 順階層型の場合にはディラック位相とマヨラナ位相に同様に依存する ($Y_B \propto \sin(\frac{\alpha_{21} - \alpha_{31}}{2} + \delta_{CP})$)

ことが分かった. 一方で, 逆階層型の場合にはディラック位相への依存の仕方は弱く, マヨラナ位相に強く依存している ($Y_B \propto \sin(\frac{\alpha_{12}}{2})$) ことを示した. このことは, レプトジェネシスを検証するためには, ディラック位相 δ_{CP} を測定するだけでなく, マヨラナ位相 α_{ij} を正確に測定することが重要になることを意味する. そのため, マヨラナ位相が関係する物理であるニュートリノを伴わない二重ベータ崩壊の有効質量へ与える影響についても議論した. 順階層型, 逆階層型のいずれの場合においても右巻きニュートリノの混合角, 質量の縮退度によって, 有効質量の予言される質量の範囲に上限と下限がつくことを示した.

次に2つ目の場合に得られた結果を示す. レプトンセクターにモジュラー A_4 対称性がある場合を検討した. このモデルは先行研究によって, 荷電レプトンの質量, ニュートリノ振動実験の結果, ニュートリノ質量の和に対する上限を満たすことができ, その場合にニュートリノ質量は順階層型が予言されることが示されていた. この場合には, 3世代全ての右巻きニュートリノが同じ質量スケールにあるため, 最も軽い右巻きニュートリノだけでなく, 3世代全てがレプトジェネシスに寄与する. そのため, 右巻きニュートリノによる通常のレプトジェネシスによる BAU 生成をボルツマン方程式を数値的に解くことによって見積もった. モデルの CP 対称性を支配するパラメータ $\text{Re}\tau$ と ϕ_g のうち BAU の符号と強く相関しているのは ϕ_g であることが分かった. ニュートリノの CP 位相 $\delta_{CP}, \alpha_{21}, \alpha_{31}$ も $\text{Re}\tau$ と ϕ_g に依存しているため, BAU 生成量との間に相関が存在する. Y_B の符号は δ_{CP} だけでなく, θ_{23} にも依存していることが分かった. 一方で, BAU の符号と α_{21}, α_{31} の間には強い相関があり, $Y_B > 0$ となるマヨラナ位相は特定の値に限定されることを示した. このことから, $\theta_{23}, \delta_{CP}, \alpha_{21}, \alpha_{31}$ を測定することにより, レプトジェネシスが検証可能であることを明らかにした. さらに BAU の観測値を説明するために右巻きニュートリノ質量が一番軽いものの質量で $1.5 \times 10^{13} - 10^{14}$ GeV に予言されることを示した.

謝辞

本論文を作成するにあたり、熱心な指導をしてくださった浅賀岳彦教授に心より感謝申し上げます。懇切丁寧な指導により、物理の理解を深めることができたと共に、物理への取り組み方を学ぶことができました。研究室の江尻信司准教授、中野博章准教授、谷本盛光名誉教授にもご指導、ご助言を頂きました。深く感謝申し上げます。

共同研究者でもある許龍太君との議論を通じてより物理の理解を深めることができました、ありがとうございます。研究室で議論や相談に付き合ってくれた皆様にはありがたい気持ちでいっぱいです。特に時間を共にする機会が多かった同期の奥井恒君、後輩の佐藤優成君、斉藤佑介君にはお世話になりました。

研究活動費においては日本科学協会の「笹川科学研究助成」からの御支援を頂戴しました。大変感謝しております。

研究室を超えて多くの方のご支援のもと、博士論文を書くことができました。皆様に感謝致します。何よりも、研究に専念することができたのは家族の支えがあったからです。父俊栄、母弘子には心から感謝致します。

付録A ニュートリノ振動確率

ここでは、真空中でのニュートリノ振動確率 $P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}$ を導出する。ニュートリノのフレーバー固有状態を $|\nu_\alpha\rangle$ ($\alpha = e, \mu, \tau$)、質量固有状態を $|\nu_i\rangle$ ($i = 1, 2, 3$) とする。フレーバー固有状態は次のように、質量固有状態の重ね合わせで書かれる。

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i} |\nu_i\rangle. \quad (\text{A.1})$$

ここで、 $U_{\alpha i}$ はニュートリノの混合を表すユニタリ行列である。

次に $|\nu_\alpha\rangle$ の時間発展を考える。時刻 t における状態を $|\nu_\alpha(t)\rangle$ とすると、

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} |\nu_\alpha(t)\rangle &= \sum_i U_{\alpha i} \left(i \frac{\partial}{\partial t} \right) |\nu_i(t)\rangle \\ &= \sum_i U_{\alpha i} E_i |\nu_i(t)\rangle \\ &= \sum_{i,\beta} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* E_i |\nu_\beta\rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

より、

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_{i,\beta} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-iE_i t} |\nu_\beta\rangle. \quad (\text{A.3})$$

ここで、時刻 0 での状態 $|\nu_\beta(0)\rangle$ を単に $|\nu_\beta\rangle$ とした。 E_i はニュートリノのエネルギーで、 $E_i = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_i^2}$ である。よって、 $t=0$ に作られた ν_α が時刻 t で ν_β となる確率は、

$$\begin{aligned} P_{\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha}(t) &= |\langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle|^2 \\ &= \left| \sum_{i,\gamma} U_{\alpha i} U_{\gamma i}^* e^{-iE_i t} \langle \nu_\beta | \nu_\gamma \rangle \right|^2 \\ &= \sum_{i,j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} e^{-i(E_i - E_j)t} \\ &\simeq \sum_{i,j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} e^{-i \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E} t} \\ &= \delta_{\alpha\beta} + \sum_{i,j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} \left(e^{-i \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E} t} - 1 \right), \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

である。ここで、相対論的極限 ($E_i = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_i^2} \simeq E + m_i^2/(2E)$, $E \simeq |\mathbf{p}| \gg m_i$) を仮定し、質量二乗差 $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$ と置いた。式 (A.4) 第二項は $i = j$ のとき 0 となることに注意すると、

$$\begin{aligned} P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) &= \delta_{\alpha\beta} + \sum_{i>j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} \left(e^{-i \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E} t} - 1 \right) + \sum_{i<j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} \left(e^{-i \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E} t} - 1 \right) \\ &= \delta_{\alpha\beta} + \sum_{i>j} \left[U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} \left(e^{-i \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E} t} - 1 \right) + U_{\alpha j} U_{\beta j}^* U_{\alpha i}^* U_{\beta i} \left(e^{i \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E} t} - 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$A = U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j} U_{\beta j}$ と置くと,

$$\begin{aligned}
A \left(e^{-i \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E}} - 1 \right) + A^* \left(e^{i \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E}} - 1 \right) &= \text{Re} A \left(e^{-i \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E}} + e^{i \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E}} - 2 \right) + i \text{Im} A \left(e^{-i \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E}} - e^{i \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E}} \right) \\
&= \text{Re} A \left(e^{-i \frac{\Delta m_{ij}^2}{4E}} - e^{i \frac{\Delta m_{ij}^2}{4E}} \right)^2 + i \text{Im} A \left(e^{-i \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E}} - e^{i \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E}} \right) \\
&= -4 \text{Re} A \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ij}^2}{4E} \right) + 2 \text{Im} A \sin \left(\frac{\Delta m_{ij}^2}{2E} \right). \tag{A.6}
\end{aligned}$$

であるから, ニュートリノ振動確率は以下のように与えられる.

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) = \delta_{\alpha\beta} - \sum_{i>j} \left[4 \text{Re} \left(U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j} U_{\beta j} \right) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ij}^2}{4E} \right) - 2 \text{Im} \left(U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j} U_{\beta j} \right) \sin \left(\frac{\Delta m_{ij}^2}{2E} \right) \right]. \tag{A.7}$$

付録B 散乱断面積

ここでは、レプトン数生成機構に寄与する各散乱過程の断面積を示す。 $\Delta L = 1$ の過程でのうち湯川相互作用を介するものについては最も大きな寄与を与えるのはトップクォーク湯川を通じた過程である。この過程は文献 [86, 87] で議論されている。無次元化された散乱断面積は次のように与えられる。

- $N_I + \bar{L}_\alpha \rightarrow t_R + \bar{q}_L, (N_I + L_\alpha \rightarrow \bar{t}_R + q_L)$

$$\hat{\sigma}_{N_I t}^{(1)\alpha}(x) = \frac{3|f_{ti}^{(u)}|^2 F_{\alpha I}^* F_{\alpha I}}{4\pi} \left(\frac{x - a_I}{x} \right)^2, \quad (\text{B.1})$$

- $N_I + q_L \rightarrow L_\alpha + t_R, (N_I + \bar{q}_L \rightarrow \bar{L}_\alpha + \bar{t}_R, N_I + \bar{t}_R \rightarrow L_\alpha + q_L, N_I + t_R \rightarrow \bar{L}_\alpha + q_L)$

$$\hat{\sigma}_{N_I t}^{(1)\alpha}(x) = \frac{3|f_{ti}^{(u)}|^2 F_{\alpha I}^* F_{\alpha I}}{4\pi} \left(\frac{x - a_I}{x} \right) \left\{ \frac{x - 2a_I + 2a_H}{x - a_I + a_H} + \frac{a_I - 2a_H}{x - a_I} \log \left(\frac{x - a_I + a_H}{a_H} \right) \right\}. \quad (\text{B.2})$$

ここで x は重心系エネルギーの二乗 s を N_I の質量 M_1 で規格化したもので、 $x = s/M_1^2$ である。 $a_H = m_H^2/M_1^2$ で、 m_H は熱浴中のヒッグスボゾンの質量である。 $f^{(u)}$ はアップタイプクォークの湯川相互作用を表し、 i について和をとっている。¹

$SU(2)_L$ の SM ゲージ相互作用を介した $\Delta L = 1$ の無次元化された散乱断面積は、

- $N_I + \bar{L}_\alpha \rightarrow \bar{\Phi} + A, (N_I + L_\alpha \rightarrow \Phi + A)$

$$\hat{\sigma}_{N_I A}^{(1)\alpha}(x) = \frac{3g_2^2 (F_{\alpha I}^* F_{\alpha I})}{16\pi x^2} \left[-2x^2 + 6a_I x - 4a_I^2 + (x^2 - 2a_I x + 2a_I^2) \log \left| \frac{x - a_I + a_L}{a_L} \right| + \frac{x(a_L x + a_L a_I - a_A a_I)(a_I - x)}{a_L(x - a_I + a_L)} \right], \quad (\text{B.3})$$

- $N_I + A \rightarrow L_\alpha + \bar{\Phi}, (N_I + A \rightarrow \bar{L}_\alpha + \Phi)$

$$\hat{\sigma}_{N_I A}^{(2)\alpha}(x) = \frac{3g_2^2 (F_{\alpha I}^* F_{\alpha I})}{8\pi x(x - a_I)} \left[2a_I x \log \left| \frac{x - a_I + a_H}{a_H} \right| + (x^2 + a_I^2) \log \left| \frac{x - a_I - a_A - a_H}{-a_A - a_H} \right| \right], \quad (\text{B.4})$$

- $N_I + \Phi \rightarrow L_\alpha + A, (N_I + \bar{\Phi} \rightarrow \bar{L}_\alpha + A)$

$$\hat{\sigma}_{N_I A}^{(3)\alpha}(x) = \frac{3g_2^2 (F_{\alpha I}^* F_{\alpha I}) a_I}{16\pi x^2} \left[\frac{x^2 - 4a_I x + 3a_I^2}{a_I} + 4(x - a_I) \log \left| \frac{x - a_I + a_H}{a_H} \right| - \frac{x(4a_H - a_A)(x - a_I)}{a_H(x - a_I + m_H)} \right]. \quad (\text{B.5})$$

¹標準模型で、結合定数のエネルギー依存性を考慮しない場合は $|f_{ti}^{(u)}|^2 \simeq |f_{tt}^{(u)}|^2 \simeq 1$ である。

である [10, 88]. $SU(2)_L$ ゲージボゾンについてはすべての寄与を足し合わせた. $a_{L,A,B} = m_{L,A,B}^2/M_1^2$ の表記を用いた. ここで, $m_X (X = L, A, B)$ はそれぞれレプトンダブレット, $SU(2)_L$ ゲージボゾン, $U(1)_Y$ ゲージボゾンの熱浴中での質量である (付録 D を参照のこと). $U(1)_Y$ ゲージ相互作用を介した $\Delta L = 1$ の無次元化された散乱断面積は $\hat{\sigma}_{N_I A}^{(i)\alpha}$ において, $a_A \rightarrow a_B$ と $\frac{3}{2}g_2^2 \rightarrow \frac{1}{4}g_Y^2$ に置き換えて得られる.

$\Delta L = 2$ の過程は文献 [87, 88] で評価されている.² 無次元化された散乱断面積は以下のようになる.

- $\bar{L}_\alpha + \Phi \rightarrow L_\beta + \bar{\Phi}, (L_\alpha + \bar{\Phi} \rightarrow \bar{L}_\beta + \Phi)$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_N^{(2)\alpha\beta}(x) = & \frac{1}{2\pi} \left[\sum_I (F_{\alpha I}^* F_{\beta I}^* F_{\alpha I} F_{\beta I}) \frac{a_I}{x} \left\{ \frac{x}{a_I} + \frac{x}{D_I} - \left(1 + \frac{x+a_I}{D_I}\right) \log\left(\frac{x+a_I}{a_I}\right) \right\} \right. \\ & + \sum_{I>J} \text{Re}[F_{\alpha I}^* F_{\beta I}^* F_{\alpha J} F_{\beta J}] \frac{\sqrt{a_I a_J}}{x} \left\{ \frac{x^2 + x(D_I + D_J)}{D_I D_J} + (x+a_I) \left(\frac{2}{a_J - a_I} - \frac{1}{D_J}\right) \right. \\ & \left. \left. \times \ln\left(\frac{x+a_I}{a_I}\right) + (x+a_J) \left(\frac{2}{a_I - a_J} - \frac{1}{D_I}\right) \log\left(\frac{x+a_J}{a_J}\right) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

- $L_\alpha + L_\beta \rightarrow \Phi + \Phi, (\bar{L}_\alpha + \bar{L}_\beta \rightarrow \bar{\Phi} + \bar{\Phi})$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_N^{(13)\alpha\beta}(x) = & \frac{1}{2\pi} \left[\sum_I (F_{\alpha I}^* F_{\beta I}^* F_{\alpha I} F_{\beta I}) \left\{ \frac{x}{x+a_I} + \frac{a_I}{x+2a_I} \log\left(\frac{x+a_I}{a_I}\right) \right\} \right. \\ & + \sum_{I>J} \text{Re}[F_{\alpha I}^* F_{\beta I}^* F_{\alpha J} F_{\beta J}] \sqrt{a_I a_J} \left\{ \left(\frac{1}{x+a_I+a_J} + \frac{2}{a_I-a_J}\right) \log\left(\frac{x+a_I}{a_I}\right) \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{1}{x+a_I+a_J} + \frac{2}{a_J-a_I}\right) \log\left(\frac{x+a_J}{a_J}\right) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

ここで $c_I = (\Gamma_{N_I}/M_1)^2$, $D_I = [(x-a_I)^2 + a_I c_I]/(x-a_I)$ である.

右巻きニュートリノの対生成・対消滅過程の散乱断面積は以下の通りである [87].

- $N_I + N_J \rightarrow \bar{L}_\alpha + L_\beta$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{N_I N_J}^{(1)\alpha\beta}(x) = & \frac{1}{4\pi} \left\{ F_{\alpha I}^* F_{\alpha I} F_{\beta J}^* F_{\beta J} \left(\frac{2}{x} \sqrt{\lambda_{IJ}} + \frac{a_I + a_J}{x} L_{IJ} \right) \right. \\ & \left. - 2 \text{Re}[F_{\alpha J}^* F_{\alpha I} F_{\beta J}^* F_{\beta I}] \frac{\sqrt{a_I a_J}}{x - a_I - a_J} L_{IJ} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

- $N_I + N_J \rightarrow \bar{\Phi} + \Phi$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{N_I N_J}^{(2)}(x) = & \frac{1}{4\pi} \left\{ |F^\dagger F|_{IJ}^2 \left(-\frac{2}{x} \sqrt{\lambda_{IJ}} + L_{IJ} \right) \right. \\ & \left. - 2 \text{Re}(F^\dagger F)_{IJ}^2 \frac{\sqrt{a_I a_J} (a_I + a_J)}{x(x - a_I - a_J)} L_{IJ} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

ただし,

$$\lambda_{IJ} = [x - (\sqrt{a_I} - \sqrt{a_J})^2][x - (\sqrt{a_I} + \sqrt{a_J})^2], \quad (\text{B.10})$$

$$L_{IJ} = \log\left(\frac{x - a_I - a_J + \sqrt{\lambda_{IJ}}}{x - a_I - a_J - \sqrt{\lambda_{IJ}}}\right), \quad (\text{B.11})$$

である.

²文献 [87] の評価法を用いると, $\bar{L}_\alpha + \Phi \rightarrow L_\alpha + \bar{\Phi}$ 過程において中間状態に on-shell N_I が飛ぶ寄与が適切に引かれていない. 適切な減算の方法については文献 [88] において評価されている.

付録C 右巻きニュートリノの崩壊率とCP非対称パラメータの評価

ここでは、右巻きニュートリノの崩壊率 Γ_{N_I} 、及びCP非対称パラメータ $\varepsilon_{\alpha I}$ の具体的な計算を示す。特にシーソー機構、及びレプトジェネシスに有効な右巻きニュートリノが2世代であるとした場合について具体形を示す。

質量 M_I を持つ右巻きニュートリノ N_I の崩壊率 Γ_{N_I} は、

$$\Gamma_{N_I} = \frac{(F^\dagger F)_{II}}{8\pi} M_I, \quad (\text{C.1})$$

である。ここで、カサス-イバーラパラメトリゼーション [21] を用いて、ニュートリノ湯川結合行列 $F_{\alpha I}$ は、

$$F_{\alpha I} = \frac{i}{\langle \phi^0 \rangle} \left[U D_v^{\frac{1}{2}} \Omega D_N^{\frac{1}{2}} \right]_{\alpha I} \quad (\text{C.2})$$

で与えられる。ここで、ユニタリ行列 U はPMNS行列 U 、 $D_v = \text{diag}(m_1, m_2, m_3)$ はニュートリノ質量行列、 $D_N = \text{diag}(M_1, M_2, M_3)$ は右巻きニュートリノ質量行列、 $\langle \phi^0 \rangle = v/\sqrt{2}$ はヒッグス場の真空期待値である。 Ω は任意の複素直行列 ($\Omega^T \Omega = \Omega \Omega^T = \mathbf{1}$) であり、ここでは、順階層型と逆階層型の場合にそれぞれ以下のように取る。

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos \omega_{23} & \sin \omega_{23} \\ & -\sin \omega_{23} & \cos \omega_{23} \end{pmatrix} \quad \text{順階層型}, \quad (\text{C.3})$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} \cos \omega_{12} & \sin \omega_{12} & \\ -\sin \omega_{12} & \cos \omega_{12} & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{逆階層型}. \quad (\text{C.4})$$

ここで、 ω_{IJ} は複素数であるので、

$$\cos \omega_{IJ} = \cos \text{Re} \omega_{IJ} \cosh \text{Im} \omega_{IJ} - i \sin \text{Re} \omega_{IJ} \sinh \text{Im} \omega_{IJ} \quad (\text{C.5})$$

$$\sin \omega_{IJ} = \sin \text{Re} \omega_{IJ} \cosh \text{Im} \omega_{IJ} + i \cos \text{Re} \omega_{IJ} \sinh \text{Im} \omega_{IJ} \quad (\text{C.6})$$

だから、順階層型の場合、

$$\begin{aligned} F^\dagger F &= \frac{1}{\langle \phi^0 \rangle^2} D_N^{\frac{1}{2}} \Omega^\dagger D_v \Omega D_N^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\langle \phi^0 \rangle^2} \begin{pmatrix} m_1 M_1 & & \\ & \frac{M_2}{2} \{(m_2 + m_3) X_{23} + (m_2 - m_3) x_{23}\} & \frac{\sqrt{M_2 M_3}}{2} \{(m_2 - m_3) y_{23} + i(m_2 + m_3) Y_{23}\} \\ & \frac{\sqrt{M_2 M_3}}{2} \{(m_2 - m_3) y_{23} - i(m_2 + m_3) Y_{23}\} & \frac{M_3}{2} \{(m_2 + m_3) X_{23} - (m_2 - m_3) x_{23}\} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

逆階層型の場合は,

$$\begin{aligned}
F^\dagger F &= \frac{1}{\langle \phi^0 \rangle^2} D_N^{\frac{1}{2}} \Omega^\dagger D_\nu \Omega D_N^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\langle \phi^0 \rangle^2} \left(\begin{array}{cc} \frac{M_1}{2} \{(m_1 + m_2)X_{12} + (m_1 - m_2)x_{12}\} & \frac{\sqrt{M_1 M_2}}{2} \{(m_1 - m_2)y_{12} + i(m_1 + m_2)Y_{12}\} \\ \frac{\sqrt{M_1 M_2}}{2} \{(m_1 - m_2)y_{12} - i(m_1 + m_2)Y_{12}\} & \frac{M_2}{2} \{(m_1 + m_2)X_{12} - (m_1 - m_2)x_{12}\} \end{array} \right) \\
&\hspace{25em} m_3 M_3 \hspace{10em} \\
&\hspace{25em} (C.8)
\end{aligned}$$

ここで, $X_{IJ} = \cosh 2\text{Im}\omega_{23}$, $Y_{IJ} = \sinh 2\text{Im}\omega_{23}$, $x_{IJ} = \cos 2\text{Re}\omega_{23}$, $y_{IJ} = \sin 2\text{Re}\omega_{23}$ とした.

したがって, 1番軽いアクティブニュートリノ質量が0 (i.e. $m_1 = 0$ (順階層型), $m_3 = 0$ (逆階層型)) の時, 右巻きニュートリノ崩壊率は, 順階層型の時,

$$\Gamma_{N_2} = \frac{M_2^2}{16\pi \langle \phi^0 \rangle^2} \left[(m_2 + m_3) \left(\frac{X_{\omega_{23}}^2 + X_{\omega_{23}}^{-2}}{2} \right) + (m_2 - m_3) \cos 2\text{Re}\omega_{23} \right], \quad (C.9)$$

$$\Gamma_{N_3} = \frac{M_3^2}{16\pi \langle \phi^0 \rangle^2} \left[(m_2 + m_3) \left(\frac{X_{\omega_{23}}^2 + X_{\omega_{23}}^{-2}}{2} \right) - (m_2 - m_3) \cos 2\text{Re}\omega_{23} \right], \quad (C.10)$$

逆階層型の場合,

$$\Gamma_{N_1} = \frac{M_1^2}{16\pi \langle \phi^0 \rangle^2} \left[(m_1 + m_2) \left(\frac{X_{\omega_{12}}^2 + X_{\omega_{12}}^{-2}}{2} \right) + (m_1 - m_2) \cos 2\text{Re}\omega_{12} \right], \quad (C.11)$$

$$\Gamma_{N_2} = \frac{M_2^2}{16\pi \langle \phi^0 \rangle^2} \left[(m_1 + m_2) \left(\frac{X_{\omega_{12}}^2 + X_{\omega_{12}}^{-2}}{2} \right) - (m_1 - m_2) \cos 2\text{Re}\omega_{12} \right], \quad (C.12)$$

となる. ここで, $X_{\omega_{IJ}} = \exp(\text{Im}\omega_{IJ})$ とした. 特に右巻きニュートリノ質量が縮退している場合, 因子 $A_{IJ} \equiv M_I \Gamma_{N_I} + M_J \Gamma_{N_J}$ は $\text{Re}\omega_{IJ}$ に依らない.

$$A_{23} = \frac{M_N^3}{16\pi \langle \phi^0 \rangle^2} (m_2 + m_3) (X_{\omega_{23}}^2 + X_{\omega_{23}}^{-2}) \quad \text{順階層型}, \quad (C.13)$$

$$A_{12} = \frac{M_N^3}{16\pi \langle \phi^0 \rangle^2} (m_1 + m_2) (X_{\omega_{12}}^2 + X_{\omega_{12}}^{-2}) \quad \text{逆階層型}. \quad (C.14)$$

次に, CP 非対称パラメータ $\varepsilon_{\alpha I}$ をみる.

$$\varepsilon_{I\alpha} = \frac{1}{8\pi} \sum_{J \neq I} \frac{\text{Im} [F_{\alpha I}^* F_{\alpha J} (F^\dagger F)_{IJ}]}{(F^\dagger F)_{II}} \left[f \left(\frac{a_J}{a_I} \right) + g \left(\frac{a_J}{a_I} \right) \right] \quad (C.15)$$

だから, $\text{Im} [F_{\alpha I}^* F_{\alpha J} (F^\dagger F)_{IJ}]$ を調べる. D_ν , D_N が対角行列であるので次のようになる.

$$F_{\alpha I} = \frac{i}{\langle \phi^0 \rangle} \sqrt{M_I} \sum_{i=1}^3 U_{\alpha i} \sqrt{m_i} \Omega_{iI} \quad (C.16)$$

したがって順階層型の場合,

$$\begin{aligned}
F_{\alpha 2}^* F_{\alpha 3} &= \frac{\sqrt{M_2 M_3}}{\langle \phi^0 \rangle^2} \left(\sum_{i=1}^3 U_{\alpha i}^* \sqrt{m_i} \Omega_{i2}^* \right) \left(\sum_{j=1}^3 U_{\alpha j} \sqrt{m_j} \Omega_{j3} \right) \\
&= \frac{\sqrt{M_2 M_3}}{\langle \phi^0 \rangle^2} (U_{\alpha 2}^* \sqrt{m_2} \cos \omega_{23}^* - U_{\alpha 3}^* \sqrt{m_3} \sin \omega_{23}^*) (U_{\alpha 2} \sqrt{m_2} \sin \omega_{23} + U_{\alpha 3} \sqrt{m_3} \cos \omega_{23}) \\
&= \frac{\sqrt{M_2 M_3}}{\langle \phi^0 \rangle^2} \left[\frac{1}{2} (|U_{\alpha 2}|^2 m_2 - |U_{\alpha 3}|^2 m_3) y_{23} + \text{Re} [U_{\alpha 2}^* U_{\alpha 3}] \sqrt{m_2 m_3} x_{23} \right. \\
&\quad \left. + i \left\{ \frac{1}{2} (|U_{\alpha 2}|^2 m_2 + |U_{\alpha 3}|^2 m_3) Y_{23} + \text{Im} [U_{\alpha 2}^* U_{\alpha 3}] \sqrt{m_2 m_3} X_{23} \right\} \right]. \quad (C.17)
\end{aligned}$$

逆階層型の場合,

$$F_{\alpha 1}^* F_{\alpha 2} = \frac{\sqrt{M_1 M_2}}{\langle \phi^0 \rangle^2} \left[\frac{1}{2} (|U_{\alpha 1}|^2 m_1 - |U_{\alpha 2}|^2 m_2) y_{12} + \text{Re} [U_{\alpha 1}^* U_{\alpha 2}] \sqrt{m_1 m_2} x_{12} \right. \\ \left. + i \left\{ \frac{1}{2} [|U_{\alpha 1}|^2 m_1 + |U_{\alpha 2}|^2 m_2] Y_{12} + \text{Im} [U_{\alpha 1}^* U_{\alpha 2}] \sqrt{m_1 m_2} X_{12} \right\} \right]. \quad (\text{C.18})$$

したがって、順階層型の場合には,

$$\text{Im} [F_{\alpha 2}^* F_{\alpha 3} (F^\dagger F)_{23}] = \frac{M_2 M_3}{2 \langle \phi^0 \rangle^4} \left[(m_2 - m_3) y_{23} \left\{ \frac{1}{2} [|U_{\alpha 2}|^2 m_2 + |U_{\alpha 3}|^2 m_3] Y_{23} + \text{Im} [U_{\alpha 2}^* U_{\alpha 3}] \sqrt{m_2 m_3} X_{23} \right\} \right. \\ \left. + (m_2 + m_3) Y_{23} \left\{ \frac{1}{2} (|U_{\alpha 2}|^2 m_2 - |U_{\alpha 3}|^2 m_3) y_{23} + \text{Re} [U_{\alpha 2}^* U_{\alpha 3}] \sqrt{m_2 m_3} x_{23} \right\} \right] \\ = \frac{M_2 M_3}{2 \langle \phi^0 \rangle^4} \left[(|U_{\alpha 2}|^2 m_2^2 - |U_{\alpha 3}|^2 m_3^2) y_{23} Y_{23} + \sqrt{m_2 m_3} \left\{ \text{Im} [U_{\alpha 2}^* U_{\alpha 3}] (m_2 - m_3) y_{23} X_{23} \right. \right. \\ \left. \left. + \text{Re} [U_{\alpha 2}^* U_{\alpha 3}] (m_2 + m_3) x_{23} Y_{23} \right\} \right]. \quad (\text{C.19})$$

逆階層型の場合,

$$\text{Im} [F_{\alpha 1}^* F_{\alpha 2} (F^\dagger F)_{12}] = \frac{M_1 M_2}{2 \langle \phi^0 \rangle^4} \left[(|U_{\alpha 1}|^2 m_1^2 - |U_{\alpha 2}|^2 m_2^2) y_{12} Y_{12} + \sqrt{m_1 m_2} \left\{ \text{Im} [U_{\alpha 1}^* U_{\alpha 2}] (m_1 - m_2) y_{12} X_{12} \right. \right. \\ \left. \left. + \text{Re} [U_{\alpha 1}^* U_{\alpha 2}] (m_1 + m_2) x_{12} Y_{12} \right\} \right]. \quad (\text{C.20})$$

特に ω_{IJ} が実数 ($\text{Im} \omega_{IJ} = 0$) の時, $X_{IJ} = 1$, $Y_{IJ} = 0$ となるので、順階層型の時,

$$\text{Im} [F_{\alpha 2}^* F_{\alpha 3} (F^\dagger F)_{23}] = \frac{M_2 M_3}{2 \langle \phi^0 \rangle^4} \text{Im} [U_{\alpha 2}^* U_{\alpha 3}] \sqrt{m_2 m_3} (m_2 - m_3) \sin 2\text{Re} \omega_{23}, \quad (\text{C.21})$$

逆階層型の時,

$$\text{Im} [F_{\alpha 1}^* F_{\alpha 2} (F^\dagger F)_{12}] = \frac{M_1 M_2}{2 \langle \phi^0 \rangle^4} \text{Im} [U_{\alpha 1}^* U_{\alpha 2}] \sqrt{m_1 m_2} (m_1 - m_2) \sin 2\text{Re} \omega_{12}, \quad (\text{C.22})$$

となる。混合行列 U は,

$$U = \begin{pmatrix} c_{13} c_{12} & c_{13} s_{12} & s_{13} e^{-i\delta_{\text{CP}}} \\ -c_{23} s_{12} - s_{23} s_{13} c_{12} e^{i\delta_{\text{CP}}} & c_{23} c_{12} - s_{23} s_{13} s_{12} e^{i\delta_{\text{CP}}} & s_{23} c_{13} \\ s_{23} s_{12} - c_{23} s_{13} c_{12} e^{i\delta_{\text{CP}}} & -s_{23} c_{12} - c_{23} s_{13} s_{12} e^{i\delta_{\text{CP}}} & c_{23} c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e^{i\frac{\alpha_{21}}{2}} & \\ & & e^{i\frac{\alpha_{23}}{2}} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.23})$$

ここで, $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$, $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ とした。したがって, $\varepsilon_{\alpha I}$ は、順階層型の場合,

$$\varepsilon_{e2} \propto \text{Im} [U_{e2}^* U_{e3}] = -c_{13} s_{13} s_{12} \sin \left(\frac{\alpha_{21} - \alpha_{31}}{2} - \delta_{\text{CP}} \right), \quad (\text{C.24})$$

$$\varepsilon_{\mu 2} \propto \text{Im} [U_{\mu 2}^* U_{\mu 3}] = -(c_{23} c_{12} - s_{23} s_{13} s_{12} \cos \delta_{\text{CP}}) s_{23} c_{13} \sin \left(\frac{\alpha_{21} - \alpha_{31}}{2} \right) \\ + s_{23}^2 c_{13} s_{13} s_{12} \sin \delta_{\text{CP}} \cos \left(\frac{\alpha_{21} - \alpha_{31}}{2} \right), \quad (\text{C.25})$$

$$\varepsilon_{\tau 2} \propto \text{Im} [U_{\tau 2}^* U_{\tau 3}] = (s_{23} c_{12} + c_{23} s_{13} s_{12} \cos \delta_{\text{CP}}) c_{23} c_{13} \sin \left(\frac{\alpha_{21} - \alpha_{31}}{2} \right) \\ + c_{23}^2 c_{13} s_{13} s_{12} \sin \delta_{\text{CP}} \cos \left(\frac{\alpha_{21} - \alpha_{31}}{2} \right). \quad (\text{C.26})$$

逆階層型の場合,

$$\varepsilon_{e1} \propto \text{Im} [U_{e1}^* U_{e2}] = c_{13}^2 c_{12} s_{12} \sin \frac{\alpha_{21}}{2}, \quad (\text{C.27})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mu 1} \propto \text{Im} [U_{\mu 2}^* U_{\mu 3}] = & - \{ c_{23}^2 c_{12} s_{12} + c_{23} s_{23} s_{13} (c_{12}^2 - s_{12}^2) \cos \delta_{\text{CP}} - s_{23}^2 s_{13}^2 c_{12} s_{12} \} \sin \frac{\alpha_{21}}{2} \\ & + c_{23} s_{23} s_{13} \sin \delta_{\text{CP}} \cos \frac{\alpha_{21}}{2}, \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\tau 1} \propto \text{Im} [U_{\tau 2}^* U_{\tau 3}] = & - \{ s_{23}^2 c_{12} s_{12} - c_{23} s_{23} s_{13} (c_{12}^2 - s_{12}^2) \cos \delta_{\text{CP}} - c_{23}^2 s_{13}^2 c_{12} s_{12} \} \sin \frac{\alpha_{21}}{2} \\ & - c_{23} s_{23} s_{13} \sin \delta_{\text{CP}} \cos \frac{\alpha_{21}}{2}, \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

となる. この場合, ω_{IJ} が実数なので, $\sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \varepsilon_{\alpha I} = 0$ となっていることが上式からもわかる.

付録D 熱浴中での質量と結合定数

D.1 熱浴中での粒子の質量

熱浴中を運動する粒子のポテンシャルは温度効果により補正を受ける。これにより、熱浴中を運動する粒子はその温度に応じて熱浴中での質量を持つ。アップ型ヒッグス、レプトン二重項, $SU(2)_L$ ゲージボゾン, $U(1)_Y$ ゲージボゾンの熱浴中での質量はそれぞれ

$$\frac{m_{H_u}^2}{T^2} = \frac{m_H^2}{T^2} = \frac{3}{16}g_2^2 + \frac{1}{16}g_Y^2 + \frac{1}{4}y_t^2 + \frac{1}{2}\lambda, \quad (\text{D.1})$$

$$\frac{m_L^2}{T^2} = \frac{3}{32}g_2^2 + \frac{1}{32}g_Y^2, \quad (\text{D.2})$$

$$\frac{m_W^2}{T^2} = \frac{11}{12}g_2^2, \quad (\text{D.3})$$

$$\frac{m_B^2}{T^2} = \frac{11}{12}g_Y^2. \quad (\text{D.4})$$

で与えられる [88]. ここで, λ は標準模型ヒッグスの 4 点結合定数, $y_t = (f(u))_{tt}$ である. ここでは, アップ型ヒッグスの質量と標準模型ヒッグスの質量が等しいという仮定をおいた ($m_{H_u} = m_H$).¹

D.2 くりこみ群方程式

標準模型のゲージ結合定数, トップの湯川結合定数について 1 ループの寄与を取り入れたくりこみ群方程式を以下に記す [89].

$$\frac{d}{dt}g_1 = \frac{1}{16\pi^2} \frac{41}{10}g_1^3 \quad (\text{D.5})$$

$$\frac{d}{dt}g_2 = -\frac{1}{16\pi^2} \frac{19}{6}g_2^3 \quad (\text{D.6})$$

$$\frac{d}{dt}g_3 = -\frac{1}{16\pi^2} 7g_3^3 \quad (\text{D.7})$$

$$\frac{d}{dt}y_t = \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{9}{2}y_t^3 - y_t \left(8g_2^2 + \frac{9}{4}g_2^2 + \frac{17}{20}g_1^2 \right) \right] \quad (\text{D.8})$$

ここで $g_1 = (5/3)^{1/2}g_Y$, $t = \ln\mu$ である. 初期値としてトップ質量のスケールカップリングの値

$$\begin{aligned} g_Y(M_t) &= 0.358271 \\ g_2(M_t) &= 0.647793 \\ g_3(M_t) &= 1.16576 \\ y_t(M_t) &= 0.936817 \\ \lambda(M_t) &= 0.125922 \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

¹一般には $m_{H_u} \neq m_H$ であるが, アップ型ヒッグスの 4 点結合が標準模型ヒッグスの 4 点結合に等しいと仮定した. また異なるヒッグスとの結合による効果も無視した. ここでは, スカラーポテンシャルの安定性についても議論しない.

を用いる [90]. ここで, $M_W = 80.385$ GeV, $M_h = 125.09$ GeV, $M_t = 173.21$ GeV, $\alpha_s(M_z) = 0.1182$ を用いた [22]. ヒッグス二重項場が 2 個 (2HDM) の場合には $SU(2)_L$ の 2 表現, $U(1)_Y$ の電荷の大きさが 1/2 のスカラー場が 2 つになるため, くりこみ群方程式は以下の式に変更される.

$$\frac{d}{dt}g_1 = \frac{1}{16\pi^2} \frac{21}{5} g_1^3, \quad (\text{D.10})$$

$$\frac{d}{dt}g_2 = -\frac{1}{16\pi^2} 3g_2^3, \quad (\text{D.11})$$

$$\frac{d}{dt}g_3 = -\frac{1}{16\pi^2} 7g_3^3, \quad (\text{D.12})$$

$$\frac{d}{dt}y_t = \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{9}{2} y_t^3 - y_t \left(8g_3^2 + \frac{9}{4} g_2^2 + \frac{17}{20} g_1^2 \right) \right]. \quad (\text{D.13})$$

付録E A_4 群の計算則

ここでは, A_4 群の表現同士の計算則について記しておく. 計算則は A_4 の基底の取り方により異なるため, 本論文では S 変換と T 変換の表現行列 $\rho(S)$ と $\rho(T)$ を以下のように取る.

$$\rho(S) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \rho(T) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \omega & \\ & & \omega^2 \end{pmatrix}, \quad \omega = e^{i2\pi/3}. \quad (\text{E.1})$$

A_4 群は互いに異なる 1 表現を 3 個持つ. 一つは自明な 1 表現 $\mathbf{1}$ であり, 残りの二つは非自明な 1 表現 $\mathbf{1}'$ と $\mathbf{1}''$ である. また三表現 $\mathbf{3}$ を一つ持つ. これらは以下の計算則に従う.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_3 \otimes \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}_3 &= (a_1 b_1 + a_2 b_3 + a_3 b_2)_1 \oplus (a_3 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1)_{\mathbf{1}'} \\ &\quad \oplus (a_2 b_2 + a_1 b_3 + a_3 b_1)_{\mathbf{1}''} \\ &\quad \oplus \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2a_1 b_1 - a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ 2a_3 b_3 - a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ 2a_2 b_2 - a_1 b_3 - a_3 b_1 \end{pmatrix}_3 \oplus \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \end{pmatrix}_3, \end{aligned}$$

$$\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = \mathbf{1}, \quad \mathbf{1}' \otimes \mathbf{1}' = \mathbf{1}'', \quad \mathbf{1}'' \otimes \mathbf{1}'' = \mathbf{1}', \quad \mathbf{1}' \otimes \mathbf{1}'' = \mathbf{1}. \quad (\text{E.2})$$

以下の文献 [60, 61] により詳しいことがレビューされている.

付録F モジュラー形式

複素上半平面 $\mathcal{H} = \{\tau \in \mathbb{C} | \text{Im}\tau > 0\}$ 上の τ には,

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}), \quad (\text{E1})$$

が一次分数変換,

$$\tau \rightarrow \tau' = \gamma\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad (\text{E2})$$

と作用する. ここで,

$$SL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}, \quad (\text{E3})$$

である.

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}, \quad (\text{E4})$$

で与えられる群 $\Gamma(N)$ ($N = 1, 2, 3, \dots$) を考える. この時, 重さ k , レベル N のモジュラー形式 $f(\tau)$ は以下の性質を持つ [13, 91].

$$f(\gamma\tau) = (c\tau + d)^k f(\tau), \quad \gamma \in \Gamma(N). \quad (\text{E5})$$

ここで, k は非負の偶数である. また, $f(\tau)$ は以下のような q -展開が可能である.

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{\frac{n}{N}}, \quad q = e^{2\pi i \tau}. \quad (\text{E6})$$

特に, $a_0 = 0$ である場合, $f(\tau)$ はカスプ形式という. $k < 0$ に対してはモジュラー形式は存在しない. また, $k = 0$ の時, $f(\tau)$ は定数である.

N	独立なモジュラー形式の数	Γ_N の次元	Γ_N
2	$\frac{k}{2} + 1$	6	S_3
3	$k + 1$	12	A_4
4	$2k + 1$	24	S_4
5	$5k + 1$	60	A_5

表 E1: モジュラー形式の性質. 左から 2 番目の列に商群 Γ_N の重さ k (非負の偶数) の独立なモジュラー形式の数を示した.

表 E1 に商群 Γ_N における独立なモジュラー形式の数を記す.¹

¹導出方法は文献 [13, 91] に記されている.

レベル 2, 重さ 2 (cf. $\Gamma_3 \simeq A_4$) のモジュラー形式を求める. レベル 2, 重さ 2 の独立なモジュラー形式は 3 個存在する. $\tau \rightarrow \tau' = \gamma\tau$ の変換に対し,

$$f(\tau) \rightarrow f(\gamma\tau) = e^{i\alpha}(c\tau + d)^k f(\tau), \quad (\text{E7})$$

と変換する $f(\tau)$ (α は位相因子) を考える. このとき $d/d\tau(\log f(\tau))$ は次のように変換する.

$$\frac{d}{d\tau} \log f(\tau) \rightarrow \frac{d}{d\tau'} \log f(\tau') = (c\tau + d)^2 \frac{d}{d\tau} \log f(\tau) + kc(c\tau + d), \quad (\text{E8})$$

したがって, 重さ k_i を持つ $f_i(\tau)$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) の和は,

$$\frac{d}{d\tau} \sum_i \log f_i(\tau) \rightarrow (c\tau + d)^2 \frac{d}{d\tau} \sum_i \log f_i(\tau) + \left(\sum_i k_i \right) c(c\tau + d). \quad (\text{E9})$$

であるから, $\sum_i k_i = 0$ であれば, $d/d\tau(\sum_i \log f_i(\tau))$ は重さ 2 のモジュラー形式となる. 特に, 生成子 S 変換, T 変換に対しては,

$$S: \quad \frac{d}{d\tau} \sum_i \log f_i(\tau) \rightarrow \tau^2 \frac{d}{d\tau} \sum_i \log f_i(\tau), \quad \tau \rightarrow -\frac{1}{\tau} \quad (\text{E10})$$

$$T: \quad \frac{d}{d\tau} \sum_i \log f_i(\tau) \rightarrow \frac{d}{d\tau} \sum_i \log f_i(\tau), \quad \tau \rightarrow \tau + 1 \quad (\text{E11})$$

となる. ここで $\sum_i k_i = 0$ とした. ただし,

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{E12})$$

である.

複素上半平面 $\mathcal{H} = \{\tau \in \mathbb{C} | \text{Im}\tau > 0\}$ 上で定義されるデデキントのエータ関数 $\eta(\tau)$,

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad q = e^{2\pi i\tau}, \quad (\text{E13})$$

を考える. $\eta(\tau)$ は,

$$\eta(-1/\tau) = \sqrt{-i\tau} \eta(\tau), \quad \eta(\tau + 1) = e^{i\pi/12} \eta(\tau), \quad (\text{E14})$$

を満たす. したがって, η^2 は重さ 12 のモジュラー形式 (実際はカスプ形式) である.

$\eta(3\tau), \eta(\tau/3), \eta((\tau+1)/3), \eta((\tau+2)/3)$ は T 変換に対して,

$$\eta(3\tau) \rightarrow e^{i\pi/4} \eta(3\tau), \quad (\text{E15})$$

$$\eta\left(\frac{\tau}{3}\right) \rightarrow \eta\left(\frac{\tau+1}{3}\right), \quad (\text{E16})$$

$$\eta\left(\frac{\tau+1}{3}\right) \rightarrow \eta\left(\frac{\tau+2}{3}\right), \quad (\text{E17})$$

$$\eta\left(\frac{\tau+2}{3}\right) \rightarrow e^{i\pi/12} \eta\left(\frac{\tau}{3}\right), \quad (\text{E18})$$

と変換し, S 変換に対しては,

$$\eta(3\tau) \rightarrow \sqrt{1/3} \sqrt{-i\tau} \eta\left(\frac{\tau}{3}\right), \quad (\text{E19})$$

$$\eta\left(\frac{\tau}{3}\right) \rightarrow \sqrt{3} \sqrt{-i\tau} \eta(3\tau), \quad (\text{E20})$$

$$\eta\left(\frac{\tau+1}{3}\right) \rightarrow e^{-i\pi/12} \sqrt{-i\tau} \eta\left(\frac{\tau+2}{3}\right), \quad (\text{E21})$$

$$\eta\left(\frac{\tau+2}{3}\right) \rightarrow e^{i\pi/12} \sqrt{-i\tau} \eta\left(\frac{\tau}{3}\right), \quad (\text{E22})$$

と変換するので、モジュラー群の下で閉じている。したがって、 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$ となる、

$$Y(a_1, a_2, a_3, a_4|\tau) \equiv \frac{d}{d\tau} \left[a_1 \log \eta\left(\frac{\tau}{3}\right) + a_2 \log \eta\left(\frac{\tau+1}{3}\right) + a_3 \log \eta\left(\frac{\tau+2}{3}\right) + a_4 \log \eta(3\tau) \right], \quad (\text{E23})$$

はフルモジュラー群の下で、重さ 2 のモジュラー形式となる。 $Y(a_1, a_2, a_3, a_4|\tau)$ は S 変換, T 変換の下で、

$$S: Y(a_1, a_2, a_3, a_4|\tau) \rightarrow \tau^2 Y(a_4, a_3, a_2, a_1|\tau), \quad T: Y(a_1, a_2, a_3, a_4|\tau) \rightarrow Y(a_3, a_1, a_2, a_4|\tau), \quad (\text{E24})$$

と変換する。 Γ_3 の下で重さ 2 のモジュラー形式を $Y(\tau)$ とすると、

$$Y(-1/\tau) = \tau^2 \rho(S) Y(\tau), \quad Y(\tau+1) = \rho(T) Y(\tau), \quad (\text{E25})$$

を満たす。ここで、 $\rho(S)$, $\rho(T)$ は $\rho(S)^2 = \mathbf{1}$, $\rho(T)^3 = \mathbf{1}$ を満たす。ここで、 $Y(\tau)$ を 1 表現と仮定すると、 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$ かつ、条件 (E24) を満たすような、 $Y(\tau) = Y(a_1, a_2, a_3, a_4|\tau)$ は $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ のみであるので、 Γ_N の変換の下で、1 表現であるような重さ 2 のモジュラー形式は存在しない。次に 3 表現であるような、 $Y(\tau) = (Y_1(\tau), Y_2(\tau), Y_3(\tau))^T$ を考える。基底を、

$$\rho(S) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \rho(T) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \omega & \\ & & \omega \end{pmatrix}, \quad \omega = e^{\frac{2\pi i}{3}} \quad (\text{E26})$$

ととる。

$$\begin{pmatrix} Y_1(\tau) \\ Y_2(\tau) \\ Y_3(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y(a_1, a_2, a_3, a_4|\tau) \\ \omega Y(b_1, b_2, b_3, b_4|\tau) \\ \omega^2 Y(c_1, c_2, c_3, c_4|\tau) \end{pmatrix}, \quad (\text{E27})$$

と置けば、 T 変換より、

$$\begin{pmatrix} Y(a_3, a_1, a_2, a_4|\tau) \\ Y(b_3, b_1, b_2, b_4|\tau) \\ Y(c_3, c_1, c_2, c_4|\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y(a_1, a_2, a_3, a_4|\tau) \\ \omega Y(b_1, b_2, b_3, b_4|\tau) \\ \omega^2 Y(c_1, c_2, c_3, c_4|\tau) \end{pmatrix}, \quad (\text{E28})$$

となる。これと係数の和についての条件より、

$$\begin{pmatrix} Y_1(\tau) \\ Y_2(\tau) \\ Y_3(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 Y(1, 1, 1, -3|\tau) \\ b_1 Y(1, \omega^2, \omega, 0|\tau) \\ c_1 Y(1, \omega, \omega^2, 0|\tau) \end{pmatrix}, \quad (\text{E29})$$

を得る。さらに、 S 変換の条件より、

$$\begin{pmatrix} a_1 Y(-3, 1, 1, 1|\tau) \\ b_1 Y(0, \omega, \omega^2, 1|\tau) \\ c_1 Y(0, \omega^2, \omega, 1|\tau) \end{pmatrix} = \rho(S) \begin{pmatrix} a_1 Y(1, 1, 1, -3|\tau) \\ b_1 Y(1, \omega^2, \omega, 0|\tau) \\ c_1 Y(1, \omega, \omega^2, 0|\tau) \end{pmatrix}, \quad (\text{E30})$$

を満たすので、

$$b_1 = c_1 = -2a_1, \quad (\text{E31})$$

を得る. よって3表現のモジュラー形式が得られた. 特に, $a_1 = i/2\pi$ ととれば, 重さ2のモジュラー形式は $Y(\tau) = (Y_1(\tau), Y_2(\tau), Y_3(\tau))^T$ となる. ここで,

$$\begin{aligned} Y_1(\tau) &= \frac{i}{2\pi} \left(\frac{\eta'(\tau/3)}{\eta(\tau/3)} + \frac{\eta'((\tau+1)/3)}{\eta((\tau+1)/3)} + \frac{\eta'((\tau+2)/3)}{\eta((\tau+2)/3)} - \frac{27\eta'(3\tau)}{\eta(3\tau)} \right), \\ Y_2(\tau) &= \frac{-i}{\pi} \left(\frac{\eta'(\tau/3)}{\eta(\tau/3)} + \omega^2 \frac{\eta'((\tau+1)/3)}{\eta((\tau+1)/3)} + \omega \frac{\eta'((\tau+2)/3)}{\eta((\tau+2)/3)} \right), \\ Y_3(\tau) &= \frac{-i}{\pi} \left(\frac{\eta'(\tau/3)}{\eta(\tau/3)} + \omega \frac{\eta'((\tau+1)/3)}{\eta((\tau+1)/3)} + \omega^2 \frac{\eta'((\tau+2)/3)}{\eta((\tau+2)/3)} \right), \end{aligned} \quad (\text{E32})$$

である. 式 (E6) で述べたように, モジュラー形式 $Y(\tau)$ は $q^{1/3} = \exp(2\pi i/3)$ を用いて展開することができる. その計算を以下に記す.

$$\begin{aligned} \log \eta(\tau) &= \frac{1}{24} \log q + \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - q^n), \\ \frac{d}{d\tau} \eta(\tau) &= \frac{dq}{d\tau} \cdot \frac{d}{dq} \log \eta(\tau), \\ &= (2\pi i q) \left(\frac{1}{24} \frac{1}{q} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-nq^{n-1}}{1 - q^n} \right) = 2\pi i \left(\frac{1}{24} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1 - q^n} \right). \end{aligned}$$

それぞれの項について詳しく書き下すと,

$$\begin{aligned} \frac{\eta'(\tau/3)}{\eta(\tau/3)} &= 2\pi i \left(\frac{1}{24} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^{\frac{n}{3}}}{1 - q^{\frac{n}{3}}} \right), \\ \frac{\eta'((\tau+1)/3)}{\eta'((\tau+1)/3)} &= 2\pi i \left(\frac{1}{24} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\omega^n q^{\frac{n}{3}}}{1 - \omega^n q^{\frac{n}{3}}} \right), \\ \frac{\eta'((\tau+2)/3)}{\eta'((\tau+2)/3)} &= 2\pi i \left(\frac{1}{24} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\omega^{2n} q^{\frac{n}{3}}}{1 - \omega^{2n} q^{\frac{n}{3}}} \right), \\ \frac{\eta'(3\tau)}{\eta'(3\tau)} &= 2\pi i \left(\frac{1}{24} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^{3n}}{1 - q^{3n}} \right). \end{aligned}$$

となる. $n = 3k - 2, (k = 1, 2, \dots)$ のとき, $\omega^{3k-2} = \omega$ だから,

$$\begin{aligned} & \frac{q^{\frac{n}{3}}}{1 - q^{\frac{n}{3}}} + \frac{\omega^n q^{\frac{n}{3}}}{1 - \omega^n q^{\frac{n}{3}}} + \frac{\omega^{2n} q^{\frac{n}{3}}}{1 - \omega^{2n} q^{\frac{n}{3}}} \\ &= \frac{q^{\frac{n}{3}}}{1 - q^{\frac{n}{3}}} + \frac{\omega q^{\frac{n}{3}}}{1 - \omega q^{\frac{n}{3}}} + \frac{\omega^2 q^{\frac{n}{3}}}{1 - \omega^2 q^{\frac{n}{3}}} \\ &= q^{\frac{n}{3}} \frac{(1 - \omega q^{\frac{n}{3}})(1 - \omega^2 q^{\frac{n}{3}}) + \omega(1 - q^{\frac{n}{3}})(1 - \omega^2 q^{\frac{n}{3}}) + \omega^2(1 - q^{\frac{n}{3}})(1 - \omega q^{\frac{n}{3}})}{(1 - q^{\frac{n}{3}})(1 - \omega q^{\frac{n}{3}})(1 - \omega^2 q^{\frac{n}{3}})} \\ &= q^{\frac{n}{3}} \frac{(1 - \omega q^{\frac{n}{3}})(1 - \omega^2 q^{\frac{n}{3}}) + \omega(1 - q^{\frac{n}{3}})(1 - \omega^2 q^{\frac{n}{3}}) + \omega^2(1 - q^{\frac{n}{3}})(1 - \omega q^{\frac{n}{3}})}{\omega^3(1 - q^{\frac{n}{3}})(1 - \omega q^{\frac{n}{3}})(1 - \omega^2 q^{\frac{n}{3}})} \\ &= q^{\frac{n}{3}} \frac{(1 - \omega q^{\frac{n}{3}} - \omega^2 q^{\frac{n}{3}} + q^{\frac{2n}{3}}) + \omega(1 - q^{\frac{n}{3}} - \omega^2 q^{\frac{n}{3}} + \omega^2 q^{\frac{2n}{3}}) + \omega^2(1 - q^{\frac{n}{3}} - \omega q^{\frac{n}{3}} + \omega q^{\frac{2n}{3}})}{(1 - q^{\frac{n}{3}})(\omega^2 - q^{\frac{n}{3}})(\omega - q^{\frac{n}{3}})} \\ &= q^{\frac{n}{3}} \frac{3q^{\frac{2n}{3}}}{1 - q^n} = 3 \frac{q^n}{1 - q^n}, \end{aligned} \quad (\text{E33})$$

$$\begin{aligned}
& \frac{q^{\frac{n}{3}}}{1-q^{\frac{n}{3}}} + \omega^2 \frac{\omega^n q^{\frac{n}{3}}}{1-\omega^n q^{\frac{n}{3}}} + \omega \frac{\omega^{2n} q^{\frac{n}{3}}}{1-\omega^{2n} q^{\frac{n}{3}}} \\
&= \frac{q^{\frac{n}{3}}}{1-q^{\frac{n}{3}}} + \frac{q^{\frac{n}{3}}}{1-\omega q^{\frac{n}{3}}} + \frac{q^{\frac{n}{3}}}{1-\omega^2 q^{\frac{n}{3}}} \\
&= q^{\frac{n}{3}} \frac{(1-\omega q^{\frac{n}{3}})(1-\omega^2 q^{\frac{n}{3}}) + (1-q^{\frac{n}{3}})(1-\omega^2 q^{\frac{n}{3}}) + (1-q^{\frac{n}{3}})(1-\omega q^{\frac{n}{3}})}{(1-q^{\frac{n}{3}})(1-\omega q^{\frac{n}{3}})(1-\omega^2 q^{\frac{n}{3}})} \\
&= q^{\frac{n}{3}} \frac{(1-\omega q^{\frac{n}{3}})(1-\omega^2 q^{\frac{n}{3}}) + (1-q^{\frac{n}{3}})(1-\omega^2 q^{\frac{n}{3}}) + (1-q^{\frac{n}{3}})(1-\omega q^{\frac{n}{3}})}{\omega^3(1-q^{\frac{n}{3}})(1-\omega q^{\frac{n}{3}})(1-\omega^2 q^{\frac{n}{3}})} \\
&= q^{\frac{n}{3}} \frac{(1-\omega q^{\frac{n}{3}} - \omega^2 q^{\frac{n}{3}} + q^{\frac{2n}{3}}) + (1-q^{\frac{n}{3}} - \omega^2 q^{\frac{n}{3}} + \omega^2 q^{\frac{2n}{3}}) + (1-q^{\frac{n}{3}} - \omega q^{\frac{n}{3}} + \omega q^{\frac{2n}{3}})}{(1-q^{\frac{n}{3}})(\omega^2 - q^{\frac{n}{3}})(\omega - q^{\frac{n}{3}})} \\
&= q^{\frac{n}{3}} \frac{3}{1-q^n} = 3 \frac{q^{\frac{n}{3}}}{1-q^n}, \tag{E34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{q^{\frac{n}{3}}}{1-q^{\frac{n}{3}}} + \omega \frac{\omega^n q^{\frac{n}{3}}}{1-\omega^n q^{\frac{n}{3}}} + \omega^2 \frac{\omega^{2n} q^{\frac{n}{3}}}{1-\omega^{2n} q^{\frac{n}{3}}} \\
&= \frac{q^{\frac{n}{3}}}{1-q^{\frac{n}{3}}} + \frac{\omega^2 q^{\frac{n}{3}}}{1-\omega q^{\frac{n}{3}}} + \frac{\omega q^{\frac{n}{3}}}{1-\omega^2 q^{\frac{n}{3}}} \\
&= q^{\frac{n}{3}} \frac{(1-\omega q^{\frac{n}{3}})(1-\omega^2 q^{\frac{n}{3}}) + \omega^2(1-q^{\frac{n}{3}})(1-\omega^2 q^{\frac{n}{3}}) + \omega(1-q^{\frac{n}{3}})(1-\omega q^{\frac{n}{3}})}{(1-q^{\frac{n}{3}})(1-\omega q^{\frac{n}{3}})(1-\omega^2 q^{\frac{n}{3}})} \\
&= q^{\frac{n}{3}} \frac{(1-\omega q^{\frac{n}{3}})(1-\omega^2 q^{\frac{n}{3}}) + \omega^2(1-q^{\frac{n}{3}})(1-\omega^2 q^{\frac{n}{3}}) + \omega(1-q^{\frac{n}{3}})(1-\omega q^{\frac{n}{3}})}{\omega^3(1-q^{\frac{n}{3}})(1-\omega q^{\frac{n}{3}})(1-\omega^2 q^{\frac{n}{3}})} \\
&= q^{\frac{n}{3}} \frac{(1-\omega q^{\frac{n}{3}} - \omega^2 q^{\frac{n}{3}} + q^{\frac{2n}{3}}) + \omega^2(1-q^{\frac{n}{3}} - \omega^2 q^{\frac{n}{3}} + \omega^2 q^{\frac{2n}{3}}) + \omega(1-q^{\frac{n}{3}} - \omega q^{\frac{n}{3}} + \omega q^{\frac{2n}{3}})}{(1-q^{\frac{n}{3}})(\omega^2 - q^{\frac{n}{3}})(\omega - q^{\frac{n}{3}})} \\
&= q^{\frac{n}{3}} \frac{-3(\omega + \omega^2)q^{\frac{n}{3}}}{1-q^n} = 3 \frac{q^{\frac{2n}{3}}}{1-q^n}. \tag{E35}
\end{aligned}$$

$n = 3k - 1, (k = 1, 2, \dots)$ のとき, $\omega^{3k-1} = \omega^2$ だから,

$$\begin{aligned}
& \frac{q^{\frac{n}{3}}}{1-q^{\frac{n}{3}}} + \frac{\omega^n q^{\frac{n}{3}}}{1-\omega^n q^{\frac{n}{3}}} + \frac{\omega^{2n} q^{\frac{n}{3}}}{1-\omega^{2n} q^{\frac{n}{3}}} \\
&= \frac{q^{\frac{n}{3}}}{1-q^{\frac{n}{3}}} + \frac{\omega^2 q^{\frac{n}{3}}}{1-\omega^2 q^{\frac{n}{3}}} + \frac{\omega q^{\frac{n}{3}}}{1-\omega q^{\frac{n}{3}}} = 3 \frac{q^n}{1-q^n}, \tag{E36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{q^{\frac{n}{3}}}{1-q^{\frac{n}{3}}} + \omega^2 \frac{\omega^n q^{\frac{n}{3}}}{1-\omega^n q^{\frac{n}{3}}} + \omega \frac{\omega^{2n} q^{\frac{n}{3}}}{1-\omega^{2n} q^{\frac{n}{3}}} \\
&= \frac{q^{\frac{n}{3}}}{1-q^{\frac{n}{3}}} + \frac{\omega q^{\frac{n}{3}}}{1-\omega^2 q^{\frac{n}{3}}} + \frac{\omega^2 q^{\frac{n}{3}}}{1-\omega q^{\frac{n}{3}}} = 3 \frac{q^{\frac{2n}{3}}}{1-q^n}, \tag{E37}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{q^{\frac{n}{3}}}{1-q^{\frac{n}{3}}} + \omega \frac{\omega^n q^{\frac{n}{3}}}{1-\omega^n q^{\frac{n}{3}}} + \omega^2 \frac{\omega^{2n} q^{\frac{n}{3}}}{1-\omega^{2n} q^{\frac{n}{3}}} \\
&= \frac{q^{\frac{n}{3}}}{1-q^{\frac{n}{3}}} + \frac{q^{\frac{n}{3}}}{1-\omega^2 q^{\frac{n}{3}}} + \frac{q^{\frac{n}{3}}}{1-\omega q^{\frac{n}{3}}} = 3 \frac{q^{\frac{n}{3}}}{1-q^n}. \tag{E38}
\end{aligned}$$

$n = 3k, (k = 1, 2, \dots)$ のとき, $\omega^{3k} = 1$ だから,

$$\begin{aligned} & \frac{q^{\frac{n}{3}}}{1 - q^{\frac{n}{3}}} + \frac{\omega^n q^{\frac{n}{3}}}{1 - \omega^n q^{\frac{n}{3}}} + \frac{\omega^{2n} q^{\frac{n}{3}}}{1 - \omega^{2n} q^{\frac{n}{3}}} \\ &= \frac{q^{\frac{n}{3}}}{1 - q^{\frac{n}{3}}} + \frac{q^{\frac{n}{3}}}{1 - q^{\frac{n}{3}}} + \frac{q^{\frac{n}{3}}}{1 - q^{\frac{n}{3}}} = 3 \frac{q^{\frac{n}{3}}}{1 - q^{\frac{n}{3}}}, \end{aligned} \quad (\text{E39})$$

$$\begin{aligned} & \frac{q^{\frac{n}{3}}}{1 - q^{\frac{n}{3}}} + \omega^2 \frac{\omega^n q^{\frac{n}{3}}}{1 - \omega^n q^{\frac{n}{3}}} + \omega \frac{\omega^{2n} q^{\frac{n}{3}}}{1 - \omega^{2n} q^{\frac{n}{3}}} \\ &= \frac{q^{\frac{n}{3}}}{1 - q^{\frac{n}{3}}} + \frac{\omega^2 q^{\frac{n}{3}}}{1 - q^{\frac{n}{3}}} + \frac{\omega q^{\frac{n}{3}}}{1 - q^{\frac{n}{3}}} = 0, \end{aligned} \quad (\text{E40})$$

$$\begin{aligned} & \frac{q^{\frac{n}{3}}}{1 - q^{\frac{n}{3}}} + \omega \frac{\omega^n q^{\frac{n}{3}}}{1 - \omega^n q^{\frac{n}{3}}} + \omega^2 \frac{\omega^{2n} q^{\frac{n}{3}}}{1 - \omega^{2n} q^{\frac{n}{3}}} \\ &= \frac{q^{\frac{n}{3}}}{1 - q^{\frac{n}{3}}} + \frac{\omega q^{\frac{n}{3}}}{1 - q^{\frac{n}{3}}} + \frac{\omega^2 q^{\frac{n}{3}}}{1 - q^{\frac{n}{3}}} = 0. \end{aligned} \quad (\text{E41})$$

よって, モジュラー形式 $Y_1(\tau), Y_2(\tau), Y_3(\tau)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} Y_1(\tau) &= - \left\{ \left(\frac{1}{24} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^{\frac{n}{3}}}{1 - q^{\frac{n}{3}}} \right) + \left(\frac{1}{24} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\omega^n q^{\frac{n}{3}}}{1 - \omega^n q^{\frac{n}{3}}} \right) + \left(\frac{1}{24} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\omega^{2n} q^{\frac{n}{3}}}{1 - \omega^{2n} q^{\frac{n}{3}}} \right) \right. \\ &\quad \left. - 27 \left(\frac{1}{24} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^{3n}}{1 - q^{3n}} \right) \right\} \\ &= -\frac{1}{24} (1 + 1 + 1 - 27) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (3k-2)3 \frac{q^{3k-2}}{1 - q^{3k-2}} + (3k-1)3 \frac{q^{3k-1}}{1 - q^{3k-1}} \right. \\ &\quad \left. + 3k \cdot 3 \frac{q^k}{1 - q^k} - 27k \frac{q^{3k}}{1 - q^{3k}} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E42})$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 9k \frac{q^k}{1 - q^k} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ 9 \cdot (3m-2) \frac{q^{3m-2}}{1 - q^{3m-2}} + 9 \cdot (3m-1) \frac{q^{3m-1}}{1 - q^{3m-1}} + 9 \cdot 3m \frac{q^{3m}}{1 - q^{3m}} \right\}.$$

より,

$$\begin{aligned} Y_1(\tau) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\{(9k-6) + (27k-18)\} \frac{q^{3k-2}}{1 - q^{3k-2}} + \{(9k-3) + (27k-9)\} \frac{q^{3k-1}}{1 - q^{3k-1}} \right] \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (36k-24) \sum_{m=1}^{\infty} q^{(3k-2)m} + (36k-12) \sum_{m=1}^{\infty} q^{(3k-1)m} \right\} \\ &= 1 + [\{(36 \cdot 1 - 24)(q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + \dots) + (36 \cdot 2 - 24)(q^4 + q^8 + \dots) + \dots \\ &\quad + \{(36 \cdot 1 - 12)(q^2 + q^4 + q^6 + \dots) + (36 \cdot 2 - 12)(q^5 + \dots) + \dots\}] \\ &= 1 + 12q + 36q^2 + 12q^3 + 84q^4 + \dots. \end{aligned} \quad (\text{E43})$$

$$\begin{aligned}
Y_2(\tau) &= 2 \left\{ \left(\frac{1}{24} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^{\frac{n}{3}}}{1-q^{\frac{n}{3}}} \right) + \omega^2 \left(\frac{1}{24} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\omega^n q^{\frac{n}{3}}}{1-\omega^n q^{\frac{n}{3}}} \right) + \omega \left(\frac{1}{24} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\omega^{2n} q^{\frac{n}{3}}}{1-\omega^{2n} q^{\frac{n}{3}}} \right) \right\} \\
&= 2 \cdot \frac{1}{24} (1 + \omega^2 + \omega) - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 3(3k-2) \frac{q^{\frac{3k-2}{3}}}{1-q^{3k-2}} + 3(3k-1) \frac{q^{\frac{2(3k-1)}{3}}}{1-q^{3k-1}} + 0 \right\} \\
&= -6q^{\frac{1}{3}} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (3k-2) \frac{q^{k-1}}{1-q^{3k-2}} + (3k-1) \frac{q^{2k-1}}{1-q^{3k-1}} \right\} \\
&= -6q^{\frac{1}{3}} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (3k-2) q^{k-1} \sum_{m=0}^{\infty} q^{(3k-2)m} + (3k-1) q^{2k-1} \sum_{m=0}^{\infty} q^{(3k-1)m} \right\} \\
&= -6q^{\frac{1}{3}} \{ (3 \cdot 1 - 2) \cdot 1(1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots) + (3 \cdot 2 - 2) \cdot q(1 + q^4 + q^8 + \dots) \\
&\quad + (3 \cdot 3 - 2) \cdot q^2(1 + q^7 + \dots) + (3 \cdot 4 - 2) \cdot q^3(1 + q^{10} + \dots) + (3 \cdot 5 - 2) \cdot q^4(1 + q^{13} + \dots) + \dots \\
&\quad + (3 \cdot 1 - 1) \cdot q(1 + q^2 + q^4 + \dots) + (3 \cdot 2 - 1) \cdot q^3(1 + q^5 + \dots) + \dots \} \\
&= -6q^{\frac{1}{3}} (1 + 7q + 8q^2 + 18q^3 + \dots). \tag{F44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_3(\tau) &= 2 \left\{ \left(\frac{1}{24} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^{\frac{n}{3}}}{1-q^{\frac{n}{3}}} \right) + \omega \left(\frac{1}{24} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\omega^n q^{\frac{n}{3}}}{1-\omega^n q^{\frac{n}{3}}} \right) + \omega^2 \left(\frac{1}{24} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\omega^{2n} q^{\frac{n}{3}}}{1-\omega^{2n} q^{\frac{n}{3}}} \right) \right\} \\
&= 2 \cdot \frac{1}{24} (1 + \omega + \omega^2) - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 3(3k-2) \frac{q^{\frac{2(3k-2)}{3}}}{1-q^{3k-2}} + 3(3k-1) \frac{q^{\frac{3k-1}{3}}}{1-q^{3k-1}} + 0 \right\} \\
&= -6q^{\frac{2}{3}} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 3(3k-2) \frac{q^{2(k-1)}}{1-q^{3k-2}} + (3k-1) \frac{q^{k-1}}{1-q^{3k-1}} \right\} \\
&= -6q^{\frac{2}{3}} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (3k-2) q^{2(k-1)} \sum_{m=0}^{\infty} q^{(3k-2)m} + (3k-1) q^{k-1} \sum_{m=0}^{\infty} q^{(3k-1)m} \right\} \\
&= -6q^{\frac{2}{3}} \{ (3 \cdot 1 - 2) \cdot 1(1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots) + (3 \cdot 2 - 2) \cdot q^2(1 + q^4 + q^8 + \dots) \\
&\quad + (3 \cdot 3 - 2) \cdot q^4(1 + q^7 + \dots) + \dots + (3 \cdot 1 - 1) \cdot 1(1 + q^2 + q^4 + \dots) \\
&\quad + (3 \cdot 2 - 1) \cdot q(1 + q^5 + \dots) + (3 \cdot 3 - 1) \cdot q^2(1 + q^8 + \dots) + (3 \cdot 4 - 1) \cdot q^3(1 + q^{11} + \dots) \\
&\quad + (3 \cdot 5 - 1) \cdot q^4(1 + q^{14} + \dots) + \dots \} \\
&= -6q^{\frac{2}{3}} (3 + 6q + 15q^2 + 12q^3 + \dots) = -18q^{\frac{2}{3}} (1 + 2q + 5q^2 + 4q^3 + \dots). \tag{F45}
\end{aligned}$$

関連図書

- [1] S. L. Glashow, Nucl. Phys. **22** (1961), 579-588 doi:10.1016/0029-5582(61)90469-2
- [2] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19** (1967), 1264-1266 doi:10.1103/PhysRevLett.19.1264
- [3] A. Salam, Conf. Proc. C **680519** (1968), 367-377 doi:10.1142/9789812795915_0034
- [4] P. Minkowski, Phys. Lett. **67B**, 421 (1977);
- [5] T. Yanagida, in Proceedings of the Workshop on Unified Theory and Baryon Number of the Universe, edited by O. Sawada and A. Sugamoto (KEK, Tsukuba, Ibaraki 305- 0801 Japan, 1979), p. 95; T. Yanagida, Prog. Theor. Phys. **64**, 1103 (1980).
- [6] M. Gell-Mann, P. Ramond, and R. Slansky, in Supergravity, edited by P. van Nieuwenhuizen and D. Freedman (North Holland, Amsterdam, 1979); P. Ramond, hep-ph/9809459;
- [7] S. L. Glashow, in Proc. of the Cargèse Summer Institute on Quarks and Leptons, Cargèse, July 9-29, 1979, edited by M. Lévy et al. (Plenum, New York, 1980), p. 707;
- [8] R. N. Mohapatra and G. Senjanovic, Phys. Rev. Lett. **44** (1980) 912.
- [9] M. Fukugita and T. Yanagida, “Baryogenesis Without Grand Unification,” Phys. Lett. B **174** (1986) 45. doi:10.1016/0370-2693(86)91126-3
- [10] A. Pilaftsis and T. E. J. Underwood, Nucl. Phys. B **692**, 303 (2004) [hep-ph/0309342].
- [11] E. K. Akhmedov, V. A. Rubakov and A. Y. Smirnov, Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 1359.
- [12] T. Asaka and M. Shaposhnikov, Phys. Lett. B **620**, 17 (2005) [hep-ph/0505013].
- [13] F. Feruglio, arXiv:1706.08749 [hep-ph].
- [14] T. Kobayashi, N. Omoto, Y. Shimizu, K. Takagi, M. Tanimoto and T. H. Tatsuishi, JHEP **1811**, 196 (2018) [arXiv:1808.03012 [hep-ph]].
- [15] P. W. Higgs, Phys. Lett. **12** (1964), 132-133 doi:10.1016/0031-9163(64)91136-9
- [16] B. Pontecorvo, Sov. Phys. JETP **7** (1958), 172-173
- [17] Z. Maki, M. Nakagawa and S. Sakata, Prog. Theor. Phys. **28** (1962), 870-880 doi:10.1143/PTP.28.870
- [18] Y. Fukuda *et al.* [Super-Kamiokande Collaboration], Phys. Lett. B **436** (1998) 33 doi:10.1016/S0370-2693(98)00876-4 [hep-ex/9805006].
- [19] I. Esteban, M. C. Gonzalez-Garcia, M. Maltoni, T. Schwetz and A. Zhou, JHEP **09** (2020), 178 doi:10.1007/JHEP09(2020)178 [arXiv:2007.14792 [hep-ph]].

- [20] K. Abe *et al.* [T2K], Nature **580** (2020) no.7803, 339-344 [erratum: Nature **583** (2020) no.7814, E16] doi:10.1038/s41586-020-2177-0 [arXiv:1910.03887 [hep-ex]].
- [21] J. A. Casas and A. Ibarra, Nucl. Phys. B **618** (2001) 171 doi:10.1016/S0550-3213(01)00475-8 [hep-ph/0103065].
- [22] M. Tanabashi *et al.* [Particle Data Group], Phys. Rev. D **98** (2018) no.3, 030001. doi:10.1103/PhysRevD.98.030001
- [23] N. Aghanim *et al.* [Planck Collaboration], arXiv:1807.06209 [astro-ph.CO].
- [24] A. H. Guth, Phys. Rev. D **23** (1981), 347-356 doi:10.1103/PhysRevD.23.347
- [25] K. Sato, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **195** (1981), 467-479 NORDITA-80-29.
- [26] A. D. Linde, Phys. Lett. B **108** (1982), 389-393 doi:10.1016/0370-2693(82)91219-9
- [27] A. Albrecht and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **48** (1982), 1220-1223 doi:10.1103/PhysRevLett.48.1220
- [28] A. D. Linde, Phys. Lett. B **129** (1983), 177-181 doi:10.1016/0370-2693(83)90837-7
- [29] N. Turok, Class. Quant. Grav. **19** (2002), 3449-3467 doi:10.1088/0264-9381/19/13/305
- [30] S. Tsujikawa, [arXiv:hep-ph/0304257 [hep-ph]].
- [31] V. A. Kuzmin, V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, Phys. Lett. **155B** (1985) 36. doi:10.1016/0370-2693(85)91028-7
- [32] M. D'Onofrio, K. Rummukainen and A. Tranberg, Phys. Rev. Lett. **113** (2014) no.14, 141602 doi:10.1103/PhysRevLett.113.141602 [arXiv:1404.3565 [hep-ph]].
- [33] S. Davidson and A. Ibarra, Phys. Lett. B **535** (2002) 25 doi:10.1016/S0370-2693(02)01735-5 [hep-ph/0202239].
- [34] G. Lazarides and Q. Shafi, Phys. Lett. B **258** (1991) 305;
- [35] T. Asaka, K. Hamaguchi, M. Kawasaki and T. Yanagida, Phys. Lett. B **464** (1999) 12 [hep-ph/9906366];
- [36] T. Asaka, K. Hamaguchi, M. Kawasaki and T. Yanagida, Phys. Rev. D **61** (2000) 083512 [hep-ph/9907559].
- [37] B. Garbrecht and P. Schwaller, JCAP **10** (2014), 012 doi:10.1088/1475-7516/2014/10/012 [arXiv:1404.2915 [hep-ph]].
- [38] R. Barbieri, P. Creminelli, A. Strumia and N. Tetradis, Nucl. Phys. B **575** (2000) 61 doi:10.1016/S0550-3213(00)00011-0 [hep-ph/9911315].
- [39] A. Abada, S. Davidson, F. X. Josse-Michaux, M. Losada and A. Riotto, JCAP **0604** (2006) 004 [hep-ph/0601083].
- [40] E. Nardi, Y. Nir, E. Roulet and J. Racker, JHEP **0601** (2006) 164 [hep-ph/0601084].

- [41] A. Abada, S. Davidson, A. Ibarra, F-X. Josse-Michaux, M. Losada and A. Riotto, JHEP **0609** (2006) 010 [hep-ph/0605281].
- [42] S. Blanchet and P. Di Bari, JCAP **0703** (2007) 018 [hep-ph/0607330].
- [43] S. Pascoli, S. T. Petcov and A. Riotto, Phys. Rev. D **75** (2007) 083511 [hep-ph/0609125].
- [44] S. Pascoli, S. T. Petcov and A. Riotto, Nucl. Phys. B **774** (2007) 1 [hep-ph/0611338].
- [45] K. Moffat, S. Pascoli, S. T. Petcov and J. Turner, JHEP **1903** (2019) 034 doi:10.1007/JHEP03(2019)034 [arXiv:1809.08251 [hep-ph]].
- [46] A. De Simone and A. Riotto, JCAP **0702** (2007) 005 [hep-ph/0611357].
- [47] T. Asaka and H. Ishida, Phys. Lett. B **692** (2010), 105-113 doi:10.1016/j.physletb.2010.07.016 [arXiv:1004.5491 [hep-ph]].
- [48] L. Canetti and M. Shaposhnikov, JCAP **1009** (2010) 001 [arXiv:1006.0133 [hep-ph]].
- [49] T. Asaka and S. Eijima, PTEP **2013** (2013) no.11, 113B02 [arXiv:1308.3550 [hep-ph]].
- [50] M. Garny, A. Kartavtsev and A. Hohenegger, Annals Phys. **328** (2013) 26 [arXiv:1112.6428 [hep-ph]].
- [51] S. Iso, K. Shimada and M. Yamanaka, JHEP **1404** (2014) 062 [arXiv:1312.7680 [hep-ph]].
- [52] See, for example, a recent review, H. Päs and W. Rodejohann, New J. Phys. **17** (2015) no.11, 115010 [arXiv:1507.00170 [hep-ph]].
- [53] T. Asaka and T. Yoshida, JHEP **09** (2019), 089 doi:10.1007/JHEP09(2019)089 [arXiv:1812.11323 [hep-ph]].
- [54] NuFIT 3.2 (2018), www.nu-fit.org; I. Esteban, M. C. Gonzalez-Garcia, M. Maltoni, I. Martinez-Soler and T. Schwetz, JHEP **1701** (2017) 087 [arXiv:1611.01514 [hep-ph]].
- [55] P. S. Bhupal Dev, P. Millington, A. Pilaftsis and D. Teresi, Nucl. Phys. B **886** (2014) 569 [arXiv:1404.1003 [hep-ph]].
- [56] P. S. Bhupal Dev, P. Millington, A. Pilaftsis and D. Teresi, Nucl. Phys. B **891** (2015) 128 [arXiv:1410.6434 [hep-ph]].
- [57] G. Bambhaniya, P. S. Bhupal Dev, S. Goswami, S. Khan and W. Rodejohann, Phys. Rev. D **95** (2017) no.9, 095016 [arXiv:1611.03827 [hep-ph]].
- [58] M. A. Acero *et al.* [NOvA Collaboration], Phys. Rev. D **98** (2018) 032012 [arXiv:1806.00096 [hep-ex]].
- [59] G. Altarelli and F. Feruglio, Rev. Mod. Phys. **82**, 2701 (2010) [arXiv:1002.0211 [hep-ph]].
- [60] H. Ishimori, T. Kobayashi, H. Ohki, Y. Shimizu, H. Okada and M. Tanimoto, Prog. Theor. Phys. Suppl. **183**, 1 (2010) [arXiv:1003.3552 [hep-th]].
- [61] H. Ishimori, T. Kobayashi, H. Ohki, H. Okada, Y. Shimizu and M. Tanimoto, Lect. Notes Phys. **858**, 1 (2012).

- [62] S. F. King and C. Luhn, Rept. Prog. Phys. **76**, 056201 (2013) [arXiv:1301.1340 [hep-ph]].
- [63] S. F. King, A. Merle, S. Morisi, Y. Shimizu and M. Tanimoto, New J. Phys. **16**, 045018 (2014) [arXiv:1402.4271 [hep-ph]].
- [64] R. de Adelhart Toorop, F. Feruglio and C. Hagedorn, Nucl. Phys. B **858**, 437 (2012) [arXiv:1112.1340 [hep-ph]].
- [65] T. Kobayashi, K. Tanaka and T. H. Tatsuishi, Phys. Rev. D **98**, no. 1, 016004 (2018) [arXiv:1803.10391 [hep-ph]].
- [66] J. C. Criado and F. Feruglio, SciPost Phys. **5**, no. 5, 042 (2018) [arXiv:1807.01125 [hep-ph]].
- [67] P. P. Novichkov, S. T. Petcov and M. Tanimoto, Phys. Lett. B **793**, 247 (2019) [arXiv:1812.11289 [hep-ph]].
- [68] T. Nomura and H. Okada, arXiv:1904.03937 [hep-ph].
- [69] T. Kobayashi, Y. Shimizu, K. Takagi, M. Tanimoto and T. H. Tatsuishi, arXiv:1907.09141 [hep-ph].
- [70] G. J. Ding, S. F. King and X. G. Liu, arXiv:1907.11714 [hep-ph].
- [71] T. Kobayashi, Y. Shimizu, K. Takagi, M. Tanimoto and T. H. Tatsuishi, arXiv:1909.05139 [hep-ph].
- [72] J. T. Penedo and S. T. Petcov, Nucl. Phys. B **939**, 292 (2019) [arXiv:1806.11040 [hep-ph]].
- [73] P. P. Novichkov, J. T. Penedo, S. T. Petcov and A. V. Titov, JHEP **1904**, 005 (2019) [arXiv:1811.04933 [hep-ph]].
- [74] S. F. King and Y. L. Zhou, arXiv:1908.02770 [hep-ph].
- [75] P. P. Novichkov, J. T. Penedo, S. T. Petcov and A. V. Titov, JHEP **1904**, 174 (2019) [arXiv:1812.02158 [hep-ph]].
- [76] G. J. Ding, S. F. King and X. G. Liu, arXiv:1903.12588 [hep-ph].
- [77] D. Cremades, L. E. Ibanez and F. Marchesano, JHEP **0405**, 079 (2004) [hep-th/0404229].
- [78] T. Kobayashi and S. Nagamoto, Phys. Rev. D **96**, no. 9, 096011 (2017) [arXiv:1709.09784 [hep-th]].
- [79] T. Kobayashi, S. Nagamoto, S. Takada, S. Tamba and T. H. Tatsuishi, Phys. Rev. D **97**, no. 11, 116002 (2018) [arXiv:1804.06644 [hep-th]].
- [80] T. Kobayashi and S. Tamba, Phys. Rev. D **99**, no. 4, 046001 (2019) [arXiv:1811.11384 [hep-th]].
- [81] A. Baur, H. P. Nilles, A. Trautner and P. K. S. Vaudrevange, arXiv:1901.03251 [hep-th].
- [82] Y. Kariyazono, T. Kobayashi, S. Takada, S. Tamba and H. Uchida, arXiv:1904.07546 [hep-th].
- [83] T. Asaka, Y. Heo, T. H. Tatsuishi and T. Yoshida, JHEP **01** (2020), 144 doi:10.1007/JHEP01(2020)144 [arXiv:1909.06520 [hep-ph]].
- [84] S. Ferrara, D. Lust, A. D. Shapere and S. Theisen, Phys. Lett. B **225**, 363 (1989). doi:10.1016/0370-2693(89)90583-2

- [85] NuFIT 4.1 (2019), www.nu-fit.org; I. Esteban, M. C. Gonzalez-Garcia, A. Hernandez-Cabezudo, M. Maltoni and T. Schwetz, JHEP **1901** (2019) 106 [arXiv:1811.05487 [hep-ph]].
- [86] M. A. Luty, Phys. Rev. D **45** (1992), 455-465 doi:10.1103/PhysRevD.45.455
- [87] M. Plumacher, Ph.D. Thesis [hep-ph/9807557].
- [88] G. F. Giudice, A. Notari, M. Raidal, A. Riotto and A. Strumia, Nucl. Phys. B **685** (2004) 89 doi:10.1016/j.nuclphysb.2004.02.019 [hep-ph/0310123].
- [89] P. J. Fox, G. D. Kribs and A. Martin, Phys. Rev. D **90** (2014) no.7, 075006 doi:10.1103/PhysRevD.90.075006 [arXiv:1405.3692 [hep-ph]].
- [90] D. Buttazzo, G. Degrassi, P. P. Giardino, G. F. Giudice, F. Sala, A. Salvio and A. Strumia, JHEP **12** (2013), 089 doi:10.1007/JHEP12(2013)089 [arXiv:1307.3536 [hep-ph]].
- [91] R. C. Gunning, Lectures on Modular Forms, Princeton, New Jersey USA, Princeton University Press 1962.