

2020年度 博士論文

# ニュートリノ質量と背景重力波

奥井 恒

F18J002H

新潟大学大学院自然科学研究科 博士後期課程  
数理物質科学専攻 物理学コース

素粒子論研究室

# 目次

第1章 導入	2
第2章 ニュートリノ質量	4
2.1 素粒子標準模型	4
2.1.1 素粒子標準模型	4
2.1.2 クォーク・レプトンの質量の獲得	7
2.2 ニュートリノ振動	8
2.2.1 真空中のニュートリノ振動	9
2.2.2 2世代の場合	11
2.2.3 物質中のニュートリノ振動	12
2.3 観測値	14
2.4 右巻きニュートリノとシーソー機構	18
第3章 重力波	20
3.1 背景重力波	20
3.2 宇宙の熱史	21
3.2.1 標準宇宙論	21
3.2.2 インフレーション	24
3.2.3 再加熱過程	25
3.3 重力波スペクトル	25
3.3.1 重力波の運動方程式	25
3.3.2 宇宙膨張における重力波の振る舞い	27
3.3.3 重力波スペクトル	29
3.4 重力波観測実験	31
第4章 ニュートリノ質量と背景重力波	33
4.1 エントロピー生成	33
4.2 重力波スペクトル	36
4.3 シーソー機構とエントロピー生成	38
4.4 ニュートリノ質量と背景重力波	41
第5章 結論	46

# 第1章 導入

本学位申請論文では、筆者らの参考論文 [1] の結果に基づき、背景重力波によるニュートリノ質量の新たな検証方法を考察する。ニュートリノ振動現象の発見 [2] によって、ニュートリノ質量が存在することが確定した。ニュートリノ振動が起きるためには、ニュートリノの質量二乗差が存在することが条件となる。これまでの実験結果より、少なくとも二つ以上のニュートリノに質量が存在することが確定し、質量二乗差の値は決定されつつあるが、質量の絶対値は未だ測定できていない。本研究では、質量の絶対値を決定すべく、最も軽いニュートリノの質量に着目する。

素粒子標準模型 [3-5] はこれまでの多くの実験結果を説明できる模型であるが、ニュートリノ質量は含まれていない。そのため、ニュートリノ質量を説明する新たな理論が必要となる。最も有力な模型の一つが、新たな粒子として「右巻きニュートリノ」を加える模型である。標準模型のニュートリノ（左巻きニュートリノ）に比べて、非常に大きな質量を持つ2つ以上の右巻きニュートリノを導入することで、極微のニュートリノの質量を説明することができる。この機構は一般にシーソー機構 [6-12] と呼ばれる。導入する右巻きニュートリノの数が二つの場合は、左巻きニュートリノのうち2つが質量を持ち、残りの1つは質量を0と取ることができる。右巻きニュートリノを3つ導入する場合、最も軽い左巻きニュートリノは有限の質量を持つことができる。振動実験による2種類の質量二乗差の結果を用いると、最も軽いニュートリノ質量値を決定することができれば、全てのニュートリノの質量が確定することになる。

最も軽いニュートリノが比較的大きな値を取る場合は、ベータ崩壊などの実験 [13, 14] で検証できる可能性があるが、小さな値を取る場合は、これまで行われてきたような実験で検証することは極めて困難になる。本研究では、最も軽いニュートリノの質量値が非常に小さい場合に起きる宇宙論的な観点に基づいて、重力波によりニュートリノ質量を検証する。最も軽いニュートリノ質量が非常に小さい場合、シーソー機構に基づき、右巻きニュートリノの結合定数が非常に小さくなる。すると、右巻きニュートリノの崩壊幅が小さくなることで、非常に長い寿命を持つ。そのような粒子が初期宇宙に存在すると、宇宙のエネルギー密度の大きな割合を占めることが可能となる。宇宙のエネルギーの大きな割合を占めた後に、右巻きニュートリノが標準模型粒子に崩壊すると、付加的なエントロピーが生成されることになる。このような機構をエントロピー生成という。

重力波は、一般相対性理論から予言される時空の歪みが波として伝播する現象であり、2015年にその存在が初めて直接観測された [15]。本研究では、初期宇宙で生成される背景重力波に着目する。背景重力波は、宇宙のどの場所にも常に安定して存在する重力波であり、将来の重力波観測の重要なターゲットの一つである。重力波は、宇宙膨張の影響を受けて発展するために、初期宇宙で生成された重力波には、初期宇宙から現在までの宇宙膨張の歴史の情報が刻まれることになる。現段階において、初期宇宙を直接観測するには重力波を用いる以外に手段はなく、初期宇宙に生成された重力波を観測することが唯一の手段になる。宇宙膨張率は宇宙のエネルギー密度に依存して変化する。エントロピー生成が起きる場合には宇宙膨張が大きく変更されることになるため、最も軽いニュートリノ質量に伴う右巻きニュートリノの崩壊が引き起こすエントロピー生成が重力波に与える影響を予言することで、最も軽いニュートリノ質量の検証を行う。

本研究では、特に、最も軽いニュートリノ質量が  $10^{-7}$  eV 以下である場合に、大きなエントロピー生成を引き起こし、背景重力波スペクトルに大きな影響を与えることを見出した。エントロピー生成が起きる場合の重力波スペクトルは、標準宇宙論が予言する重力波スペクトルに比べて減衰すること

になる。この減衰が起きる周波数域は、最も軽いニュートリノ質量とエントロピー生成を起こす右巻きニュートリノ質量に依存しており、スペクトル減衰率は最も軽いニュートリノ質量のみに依存しているため、将来の重力波観測によって、減衰される周波数域と減衰率を測定することができれば、最も軽いニュートリノ質量とそれに関連する右巻きニュートリノ質量を決定することが可能となる。将来的には、この方法によって最も軽いニュートリノ質量に対する実験観測による下限を与えることが可能になる。

第一章では本論文の概要を述べた。第二章では、ニュートリノ質量について解説し、第三章では宇宙の熱史と背景重力波について解説する。第四章では本論文の主要結果について説明し、第五章で結論を述べる。

## 第2章 ニュートリノ質量

素粒子標準模型 (Standard model) [4] はこれまでの多くの実験結果を説明しているが、標準模型では説明できない現象も存在する。その中でも、最も重要な現象の一つが「ニュートリノ振動」である。ニュートリノ振動はニュートリノに質量が存在することを示唆しており、標準模型にはニュートリノ質量は組み込まれていない。したがって、ニュートリノ質量を説明する新理論が必要となる。ニュートリノ質量を説明する最も有力な理論が、標準模型に新粒子として「右巻きニュートリノ」を加え、シーソー機構 [6-12] によって、ニュートリノ質量を説明する理論である。

本章では、まず素粒子標準模型について解説し、次に、ニュートリノ質量の存在を証明する重要な現象であるニュートリノ振動について解説する。さらに、ニュートリノについて現在まで理解されている性質とニュートリノ質量に対する制限をまとめた後に、新粒子「右巻きニュートリノ」とシーソー機構について解説する。

### 2.1 素粒子標準模型

素粒子標準模型 (Standard Model) は、宇宙に存在する全ての物質を構成する最も基本的な粒子である素粒子と、その間に働く3つの相互作用（電磁相互作用、強い相互作用、弱い相互作用）を記述する理論である。標準模型は、全体として  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  のゲージ対称性により記述される。 $SU(2)_L \times U(1)_Y$  のゲージ対称性による電磁相互作用・弱い相互作用を統一的に記述する「電弱統一理論」と、 $SU(3)_C$  のゲージ対称性による強い相互作用を記述する「量子色力学」をまとめたものである。 $C$  はクォークの持つ性質であるカラー (Color) を意味し、 $L$  は左巻きのカイラリティ、 $Y$  は弱ハイパーチャージを表している。さらに、ヒッグス場を導入し、自発的対称性の破れの機構を用いて、ニュートリノを除く標準模型粒子は質量を得ることになる。ここでは、フェルミオンの質量についてのみ着目する。ゲージボソンの質量獲得やヒッグスの質量については、他の文献を参照していただきたい。

#### 2.1.1 素粒子標準模型

まず初めに、基本的な場と相互作用について解説する。

素粒子標準模型には、スピン1のゲージ場 (gauge fields)、スピン1/2のフェルミオン場 (fermion fields)、スピン0のスカラー場 (scalar fields) が存在する。

スピン1のゲージ場は、相互作用を媒介する。強い相互作用を媒介する場はグルーオン (gluon) が媒介し、弱い相互作用はWボソンとZボソン ( $W^\pm$  boson and  $Z$  boson) が媒介する。そして、電磁相互作用は光子 (photon) が媒介する。

スピン1/2のフェルミオン場は、強い相互作用を持つクォーク (quark) と強い相互作用を持たないレプトン (lepton) がある。クォークには、アップ (u : up)、ダウン (d : down)、チャーム (c : charm)、ストレンジ (s : strange)、トップ (t : top)、ボトム (b : bottom) があり、レプトンには、電子 (e :

electron)、ミュー粒子 ( $\mu$ : muon)、タウ粒子 ( $\tau$ : tauon)、電子ニュートリノ ( $\nu_e$ )、ミューニュートリノ ( $\nu_\mu$ )、タウニュートリノ ( $\nu_\tau$ ) がある。

そしてスピン 0 のスカラー場は素粒子に質量をもたらす鍵となるヒッグス場 (Higgs field) である。

素粒子標準模型のゲージ群は、 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  であり、場の構成要素をまとめると表 2.1 のようになる。ここで、 $G_\mu^A$  ( $A = 1, \dots, 8$ ) は  $SU(3)_C$  ゲージ場、 $A_\mu^a$  ( $a = 1, \dots, 3$ ) は  $SU(2)_L$  ゲージ場、 $B_\mu$  は  $U(1)_Y$  ゲージ場である。 $q_{Li}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) は左巻きのクォーク場、 $u_{Ri}, d_{Ri}$  はそれぞれアップ型、ダウン型の右巻きクォーク場で、 $l_{Li}, e_{Ri}$  はそれぞれ左巻きのレプトン場、右巻きの荷電レプトン場である。 $\Phi$  はヒッグス場を表す。

表 2.1: 素粒子標準模型の場とゲージ量子数

スピン	場	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$
1	$G_\mu^A$ ( $A = 1, \dots, 8$ )	8	1	0
	$A_\mu^a$ ( $a = 1, \dots, 3$ )	1	3	0
	$B_\mu$	1	1	0
$\frac{1}{2}$	$q_{Li} = \begin{pmatrix} u_{Li} \\ d_{Li} \end{pmatrix}$ ( $i = 1, 2, 3$ )	3	2	$+\frac{1}{6}$
	$u_{Ri}$	3	1	$+\frac{2}{3}$
	$d_{Ri}$	3	1	$-\frac{1}{3}$
	$l_{Li} = \begin{pmatrix} \nu_{Li} \\ e_{Li} \end{pmatrix}$ ( $i = 1, 2, 3$ )	1	2	$-\frac{1}{2}$
	$e_{Ri}$	1	1	-1
0	$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$	1	2	$+\frac{1}{2}$

これらの場について、ローレンツ不変でゲージ対称性を持ち、くりこみ可能なラグランジアンを書き出すと以下ようになる<sup>1</sup>。

$$\mathcal{L}_{\text{SM}} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_\Phi + \mathcal{L}_Y \quad (2.1)$$

ここで、 $\mathcal{L}_G$  はゲージ場のラグランジアン、 $\mathcal{L}_F$  はフェルミオンのラグランジアン、 $\mathcal{L}_\Phi$  はヒッグス場のラグランジアン、 $\mathcal{L}_Y$  は湯川相互作用のラグランジアンである。まず、ゲージ場のラグランジアンは以下のように与えられる。

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^A G^{\mu\nu A} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}^A B^{\mu\nu A}, \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} G_{\mu\nu}^A = \partial_\mu G_\nu^A - \partial_\nu G_\mu^A + g_S f_{SU(3)_C}^{ABC} G_\nu^B G_\mu^C \\ F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{SU(2)_L}^{abc} A_\nu^b A_\mu^c \\ B_{\mu\nu}^A = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \end{cases} \quad (2.3)$$

ここで、 $g_S, g, g_Y$  をそれぞれ  $SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y$  のゲージ結合定数とする。また、 $f_{SU(3)_C}^{ABC}, f_{SU(2)_L}^{abc}$  はそれぞれ  $SU(3)_C, SU(2)_L$  の構造定数である。次に、フェルミオンのラグランジアンは以下のように与えられる。

$$\mathcal{L}_F = \bar{q}_{Li} i \not{D} q_{Li} + \bar{u}_{Ri} i \not{D} u_{Ri} + \bar{d}_{Ri} i \not{D} d_{Ri} + \bar{l}_{Li} i \not{D} l_{Li} + \bar{e}_{Ri} i \not{D} e_{Ri}. \quad (2.4)$$

<sup>1</sup>ゲージ固定項は無視した。

ここで、 $\not{D} = \gamma^\mu D_\mu$  であり、それぞれ、

$$D_\mu q_{Li} = \left\{ \partial_\mu - ig_S T_{SU(3)_C}^A G_\mu^A - ig T_{SU(2)_L}^a A_\mu^a - ig_Y \left( +\frac{1}{6} \right) B_\mu \right\} q_{Li}, \quad (2.5)$$

$$D_\mu u_{Ri} = \left\{ \partial_\mu - ig_S T_{SU(3)_C}^A G_\mu^A - ig_Y \left( +\frac{2}{3} \right) B_\mu \right\} u_{Ri}, \quad (2.6)$$

$$D_\mu d_{Ri} = \left\{ \partial_\mu - ig_S T_{SU(3)_C}^A G_\mu^A - ig_Y \left( -\frac{1}{3} \right) B_\mu \right\} d_{Ri}, \quad (2.7)$$

$$D_\mu l_{Li} = \left\{ \partial_\mu - ig T_{SU(2)_L}^a A_\mu^a - ig_Y \left( -\frac{1}{2} \right) B_\mu \right\} l_{Li}, \quad (2.8)$$

$$D_\mu e_{Ri} = \left\{ \partial_\mu - ig_Y (-1) B_\mu \right\} e_{Ri}, \quad (2.9)$$

となる。また、 $T_{SU(3)_C}^A = \lambda^A/2$  で、 $\lambda^A$  はゲルマン行列であり以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

また、 $T_{SU(2)_L}^a = \sigma^a/2$  で、 $\sigma^a$  はパウリ行列であり以下のように与えられる。

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

ヒッグス場のラグランジアンは以下ようになる。

$$\mathcal{L}_\Phi = (D_\mu \Phi)^\dagger D_\mu \Phi - V(\Phi), \quad (2.12)$$

ここで、

$$D_\mu \Phi = \left( \partial_\mu - ig T_{SU(2)_L}^a A_\mu^a - ig_Y \frac{1}{2} B_\mu \right) \Phi, \quad (2.13)$$

$$V(\Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad (2.14)$$

であり、 $\mu$  はヒッグス場の 2 点結合定数で、 $\lambda$  はヒッグス場の 4 点結合定数である。最後に、湯川相互作用ラグランジアンは以下のように与えられる。

$$\mathcal{L}_Y = -f_{ij}^{(u)} \bar{q}_{Li} \tilde{\Phi} u_{Rj} - f_{ij}^{(d)} \bar{q}_{Li} \Phi d_{Rj} - f_{ij}^{(e)} \bar{l}_{Li} \Phi e_{Rj} + h.c., \quad (2.15)$$

ここで、 $f_{ij}^{(u, d, e)}$  は  $3 \times 3$  の湯川結合行列であり、 $\tilde{\Phi} = (i\sigma^2)\Phi^*$  である。

ヒッグス場のラグランジアンは、次式で与えられる。

$$\mathcal{L}_\Phi = (D_\mu \Phi)^\dagger D_\mu \Phi + \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (2.16)$$

ここで、

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad \Phi^\dagger = \left( (\phi^+)^*, (\phi^0)^* \right) \quad (2.17)$$

であり、

$$\begin{aligned} \Phi^\dagger \Phi &= \left( (\phi^+)^*, (\phi^0)^* \right) \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \\ &= |\phi^+|^2 + |\phi^0|^2 = X^2 \end{aligned} \quad (2.18)$$

とする。ここで、真空の安定性を確保するために、 $\lambda > 0$ であることを要請する。また、 $\mu^2 > 0$ であることも仮定する。ポテンシャルについて最小値を考えると、

$$\begin{aligned} V(X) &= -\mu^2 X^2 + \lambda X^4, \\ \frac{dV(X)}{dX} &= -2\mu^2 X + 4\lambda X^3 \\ &= 4\lambda X \left( X^2 - \frac{\mu^2}{2\lambda} \right) = 0 \\ \therefore X &= 0, \quad \pm \frac{\mu}{\sqrt{2\lambda}} \end{aligned} \quad (2.19)$$

となる。場  $\Phi$  の真空期待値について、 $\langle \phi^0 \rangle \neq 0$  とすると、

$$\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \langle \phi^0 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mu}{\sqrt{2\lambda}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

となり、 $v$  を正の定数として、

$$v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \quad (2.21)$$

と定義することができる。

### 2.1.2 クォーク・レプトンの質量の獲得

湯川相互作用から、ヒッグス場を真空期待値で置き換えると、荷電レプトンとクォークの質量が得られる。アップ型クォークの湯川相互作用ラグランジアンは、

$$\mathcal{L}_Y^{(u)} = -f_{ij}^{(u)} \bar{q}_{Li} \tilde{\Phi} u_{Rj} + h.c. , \quad (2.22)$$

であり、質量項は、

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}^{(u)} = -m_u \bar{u}u - m_c \bar{c}c - m_t \bar{t}t, \quad (2.23)$$

となる。ここで、

$$m_u = f_1^{(u)} \frac{v}{\sqrt{2}} \simeq 2.16 \text{ MeV}, \quad (2.24)$$

$$m_c = f_2^{(u)} \frac{v}{\sqrt{2}} \simeq 1.27 \text{ GeV}, \quad (2.25)$$

$$m_t = f_3^{(u)} \frac{v}{\sqrt{2}} \simeq 172.9 \text{ GeV}, \quad (2.26)$$



である。一方ダウン型クォークの湯川相互作用ラグランジアンは、

$$\mathcal{L}_Y^{(d)} = -f_{ij}^{(d)} \bar{q}_{Li} \Phi d_{Rj} + h.c. , \quad (2.27)$$

であり、質量項は、

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}^{(d)} = -m_d \bar{d}d - m_s \bar{s}s - m_b \bar{b}b, \quad (2.28)$$

となる。ここで、

$$m_d = f_1^{(d)} \frac{v}{\sqrt{2}} \simeq 4.67 \text{ MeV}, \quad (2.29)$$

$$m_s = f_2^{(d)} \frac{v}{\sqrt{2}} \simeq 93 \text{ MeV}, \quad (2.30)$$

$$m_b = f_3^{(d)} \frac{v}{\sqrt{2}} \simeq 4.18 \text{ GeV}, \quad (2.31)$$

である。最後に、荷電レプトンの湯川相互作用ラグランジアンは、

$$\mathcal{L}_Y^{(e)} = -f_{ij}^{(e)} \bar{l}_{Li} \Phi e_{Rj} + h.c. , \quad (2.32)$$

であり、質量項は、

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}^{(e)} = -m_e \bar{e}e - m_\mu \bar{\mu}\mu - m_\tau \bar{\tau}\tau, \quad (2.33)$$

となる。となる。ここで、

$$m_e = f_1^{(u)} \frac{v}{\sqrt{2}} \simeq 0.511 \text{ MeV}, \quad (2.34)$$

$$m_\mu = f_2^{(u)} \frac{v}{\sqrt{2}} \simeq 105.7 \text{ MeV}, \quad (2.35)$$

$$m_\tau = f_3^{(u)} \frac{v}{\sqrt{2}} \simeq 1776.86 \text{ MeV}, \quad (2.36)$$

である。なお、ここまでのアップ型クォーク、ダウン型クォーク、荷電レプトンの質量値は、PDG [16] を参照した。標準模型のフェルミオンの質量について解説したが、ここまでの議論では、ニュートリノには質量が存在しない。しかし、次章で解説するニュートリノ振動現象の発見によって、ニュートリノには質量が存在することが明らかとなり、素粒子標準模型を拡張し、ニュートリノ質量を説明する新理論を構築する必要性が出てきた。

## 2.2 ニュートリノ振動

ニュートリノ振動は、ニュートリノのフレーバー ( $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ ) が時間、エネルギーに依存して確率的に変化する現象である。ニュートリノ振動現象が起きるためには、ニュートリノに混合があり、質量二乗差が存在することが条件となる。ニュートリノ振動が発見 [2] されたことによって、ニュートリノに質量が存在することが明らかとなった。素粒子標準模型では、ニュートリノには質量が存在しないために、ニュートリノ質量を説明する理論が必要となるため、重要な現象である。

### 2.2.1 真空中のニュートリノ振動

ここでは、平面波近似による一般的なニュートリノ振動確率の導出について議論する。まず、フレーバー固有状態は質量固有状態の重ね合わせで書ける。

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle \quad (2.37)$$

$\alpha = e, \mu, \tau$  はニュートリノのフレーバー固有状態を表し、 $i = 1, 2, 3$  はニュートリノの質量固有状態を表す。有限の規格化体積  $V$  を考え、質量固有状態は規格直交化されているとする。

$$\langle \nu_k | \nu_j \rangle = \delta_{kj} \quad (2.38)$$

フレーバー固有状態も混合行列のユニタリー性により、規格直交化されている。

$$\langle \nu_\alpha | \nu_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} \quad (2.39)$$

ニュートリノの時間発展は、質量固有状態によって行われる。質量固有状態  $|\nu_i\rangle$  の時間発展方程式は、シュレディンガー方程式から次のようになる。

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} |\nu_i\rangle &= H |\nu_i\rangle \\ &= E_i |\nu_i\rangle. \end{aligned} \quad (2.40)$$

ここで、

$$E_i = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_i^2}, \quad (2.41)$$

である。 $\mathbf{p}$  はニュートリノの3元運動量、 $m_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) はニュートリノの質量を表す。これを解くと、時刻  $t = 0$  で  $|\nu_i\rangle$  のニュートリノは、任意の時刻  $t$  での状態が得られる。

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} |\nu_i\rangle &= E_i |\nu_i\rangle \\ \therefore |\nu_i(t)\rangle &= e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle \end{aligned} \quad (2.42)$$

ここで、 $|\nu_i\rangle = |\nu_i(t=0)\rangle$  とした。よって、時刻  $t = 0$  でフレーバー固有状態  $|\nu_\alpha\rangle$  の状態が、任意の時刻  $t$  では次のようになる。<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} |\nu_\alpha(t)\rangle &= \sum_i U_{\alpha i}^* |\nu_i(t)\rangle \\ &= \sum_i U_{\alpha i}^* e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle \end{aligned} \quad (2.43)$$

---

<sup>2</sup>  $\nu_\alpha = \sum_i U_{\alpha i} \nu_i \rightarrow |\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle$  となる理由を説明する。ディラック場は、

$$\hat{\Psi}_{\nu_\alpha}(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm 1} \left[ \underbrace{\hat{b}_{\nu_k}^{(h)}(p)}_{\text{粒子の消滅 op.}} u_{\nu_k L}^{(h)}(p) e^{-ipx} + \underbrace{\hat{d}_{\nu_k}^{(h)\dagger}(p)}_{\text{反粒子の生成 op.}} \overline{v_{\nu_k L}^{(h)}}(p) e^{ipx} \right]$$

であり、 $\hat{\Psi}_{\nu_\alpha} \equiv \sum_i U_{\alpha i} \hat{\Psi}_{\nu_i}$  とすると、 $|\nu_\alpha\rangle = C \hat{b}_{\nu_\alpha}^{(h)\dagger} |0\rangle$ ,  $|\nu_i\rangle = C' \hat{b}_{\nu_i}^{(h)\dagger} |0\rangle$  なので、

$$|\nu_\alpha\rangle \sim \hat{b}_{\nu_\alpha}^{(h)\dagger} |0\rangle \sim \overline{\nu_\alpha}(x) |0\rangle = \sum_{i=1}^3 \overline{\nu_i} U_{\alpha i}^* |0\rangle = \sum_{i=1}^3 U_{\alpha i}^* \overline{\nu_i} |0\rangle \sim \sum_{i=1}^3 U_{\alpha i}^* \hat{b}_{\nu_i}^{(h)\dagger} |0\rangle \sim \sum_{i=1}^3 U_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle$$

ここで、ユニタリー関係より  $\sum_{\alpha} U_{\alpha k}^* U_{\alpha j} = \delta_{jk}$  なので、質量固有状態はフレーバー固有状態の重ね合わせとして次のように書ける。

$$|\nu_k\rangle = \sum_{\alpha} U_{\alpha k} |\nu_{\alpha}\rangle \quad (2.44)$$

よって、時刻  $t = 0$  でフレーバー固有状態  $|\nu_{\alpha}\rangle$  の状態が、任意の時刻  $t$  では次のようになる。

$$\begin{aligned} |\nu_{\alpha}(t)\rangle &= \sum_i U_{\alpha i}^* e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle \\ &= \sum_{\beta=e,\mu,\tau} \left( \sum_k U_{\alpha k}^* e^{-iE_k t} U_{\beta k} \right) |\nu_{\beta}\rangle \end{aligned} \quad (2.45)$$

フレーバー固有状態  $|\nu_{\alpha}\rangle$  のニュートリノがフレーバー固有状態  $|\nu_{\beta}\rangle$  へ遷移する振動の確率振幅は次のように定義される。

$$A_{\alpha\beta}(t) \equiv \langle \nu_{\beta} | \nu_{\alpha}(t) \rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* U_{\beta k} e^{-iE_k t} \quad (2.46)$$

振動確率は確率振幅を絶対値二乗して、次のように与えられる。

$$P(\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}; t) = |A_{\alpha\beta}(t)|^2 = \sum_{k,j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i(E_k - E_j)t} \quad (2.47)$$

ニュートリノは相対論的粒子で、その質量が運動量の大きさに比べて十分小さいという近似  $|\mathbf{p}| \gg m_i$  を用いると、

$$E_i \simeq |\mathbf{p}| + \frac{m_i^2}{2|\mathbf{p}|} \simeq |\mathbf{p}| + \frac{m_i^2}{2E} \quad (2.48)$$

ここで、 $E \simeq |\mathbf{p}|$  は平均的なニュートリノのエネルギーである。この場合、

$$E_k - E_j \simeq \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} \quad (2.49)$$

と書ける。ここで、 $\Delta m_{kj}^2$  は質量二乗差である。:  $\Delta m_{kj}^2 = m_k^2 - m_j^2$  すると、ニュートリノ振動の確率は次のように近似される。

$$P(\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}; t) = \sum_{k,j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp \left[ -i \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} t \right] \quad (2.50)$$

また、ニュートリノの伝搬速度がほとんど光速だとすると、 $t = L$  ( $L$  はニュートリノ飛程距離) と近似することができ、次のように書くことができる。

$$P(\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}; t) = \sum_{k,j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp \left[ -i \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} L \right] \quad (2.51)$$

ここから、ニュートリノ振動が起きるためには、ニュートリノに混合があること、またニュートリノが質量を持つことが条件となることがわかる。ニュートリノ振動の位相は

$$\Phi_{kj} = -\frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} L \quad (2.52)$$

で決まっている。それぞれ、質量二乗差  $\Delta m_{kj}^2$ 、ニュートリノエネルギー  $E$ 、ニュートリノ飛程距離  $L$  である。実際は、質量二乗差は物理的な定数であり、ニュートリノエネルギーと飛程距離の二つの変数で決まる。また、ニュートリノ振動の振幅は混合行列の要素によって決まる。よって、ニュートリノ振動実験ではニュートリノ飛程距離とエネルギーの情報を使って、質量二乗差と混合行列の要素の値を見積もることができる。

### 2.2.2 2世代の場合

ここで最も簡単な場合として、ニュートリノの世代数が2の場合を考える。2世代の場合、混合行列を次のように書くことができる。

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

ここで、 $\theta$  の定義域は、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  とする。2世代混合の場合、質量二乗差は次のように定義しておく。

$$\Delta m^2 \equiv \Delta m_{21}^2 \equiv m_2^2 - m_1^2 \quad (2.54)$$

ニュートリノのフレーバー固有状態と質量固有状態の関係は次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} |\nu_e(t=0)\rangle \\ |\nu_\mu(t=0)\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_1(t=0)\rangle \\ |\nu_2(t=0)\rangle \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

式 (2.43) より、時刻  $t = 0$  でそれぞれ  $|\nu_e\rangle$ ,  $|\nu_\mu\rangle$  のニュートリノは、時刻  $t$  では次のように書くことができる。

$$|\nu_e(t)\rangle = \cos \theta e^{-iE_1 t} |\nu_1(0)\rangle + \sin \theta e^{-iE_2 t} |\nu_2(0)\rangle \quad (2.56)$$

$$|\nu_\mu(t)\rangle = -\sin \theta e^{-iE_1 t} |\nu_1(0)\rangle + \cos \theta e^{-iE_2 t} |\nu_2(0)\rangle \quad (2.57)$$

例えば、 $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$  へのフレーバーを変える遷移確率を計算すると、その遷移振幅は以下のように評価される。

$$\begin{aligned} A_{e\mu}(t) &= \langle \nu_\mu | \nu_e(t) \rangle \\ &= (-\sin \theta \langle \nu_1 | + \cos \theta \langle \nu_2 |) (\cos \theta e^{-iE_1 t} |\nu_1\rangle + \sin \theta e^{-iE_2 t} |\nu_2\rangle) \\ &= -\sin \theta \cos \theta e^{-iE_1 t} \langle \nu_1 | \nu_1 \rangle - \sin^2 \theta \langle \nu_1 | \nu_2 \rangle \\ &\quad + \cos^2 \theta e^{-iE_2 t} \langle \nu_2 | \nu_1 \rangle + \sin \theta \cos \theta e^{-iE_2 t} \langle \nu_2 | \nu_2 \rangle \\ &= -\sin \theta \cos \theta (e^{-iE_1 t} - e^{-iE_2 t}) \\ &= -\sin \theta \cos \theta e^{-iE_1 t} (1 - e^{-i(E_2 - E_1)t}) \end{aligned} \quad (2.58)$$

ここで、ニュートリノが相対論的運動をしていると仮定し、 $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$  とすると

$$E_2 - E_1 \simeq \left( |\mathbf{p}| + \frac{m_2^2}{2E} \right) - \left( |\mathbf{p}| + \frac{m_1^2}{2E} \right) = \frac{\Delta m^2}{2E} \quad (2.59)$$

この結果を用いれば、振動確率は次のようになる。

$$\begin{aligned} P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; E, t) &= |A_{e\mu}(t)|^2 \\ &= \left| -\sin \theta \cos \theta e^{-iE_1 t} (1 - e^{-i\frac{\Delta m^2}{2E} t}) \right|^2 \\ &= \left| \sin \theta \cos \theta \left( 1 - e^{-i\frac{\Delta m^2}{2E} t} \right) \right|^2 \\ &= (\sin \theta \cos \theta)^2 \left| 1 - \cos \frac{\Delta m^2}{2E} t + i \sin \frac{\Delta m^2}{2E} t \right|^2 \\ &= (\sin \theta \cos \theta)^2 \left( \left( 1 - \cos \frac{\Delta m^2}{2E} t \right)^2 + \sin^2 \frac{\Delta m^2}{2E} t \right) \\ &= 2(\sin \theta \cos \theta)^2 \left( 1 - \cos \frac{\Delta m^2}{2E} t \right) \\ &= \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\Delta m^2}{4E} t \right) \end{aligned} \quad (2.60)$$

ニュートリノ振動が起きるためには、 $\sin^2 2\theta \neq 0$ ,  $\Delta m^2 \neq 0$  が必要な条件であることがわかる。

今、ニュートリノは相対論的運動をしていて速度が光速と近いことを仮定していたので、 $t \simeq x$  として、2世代間振動を考えると、進藤確率は次のようになる。

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e; E, x) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\Delta m^2}{4E} x \right) \quad (2.61)$$

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; E, x) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\Delta m^2}{4E} x \right) \quad (2.62)$$

ニュートリノが距離を進むごとに、 $\nu_e \rightarrow \nu_e$  の振動確率が大きくなったり、小さくなったりと振動していることがわかる。これがニュートリノ振動と言われる所以である。また、通常のニュートリノ実験は距離が固定されることが多く、この時には、エネルギースペクトル（検出点でのそれぞれのエネルギーの振動確率）を測定することになる。ニュートリノ 質量固有状態は3つあるが、その質量階層性 (Mass Hierarchy) は以下二つの取り方があり得る。順階層 (Normal Ordering/ Hierarchy) の場合

$$m_1 < m_2 < m_3 \quad (2.63)$$

逆階層 (Inverted Ordering/ Hierarchy) の場合

$$m_3 < m_1 < m_2 \quad (2.64)$$

### 2.2.3 物質中のニュートリノ 振動

ニュートリノが地球内部を通過する場合、ニュートリノ と物質（電子、陽子、中性子など）の相互作用の影響により、振動確率が物質密度に依存して変化する。ここでは、超相対論的な運動をしている左巻きニュートリノを考える。ニュートリノのフレーバー固有状態は前章で議論したとおり、質量固有状態の重ね合わせで書ける。

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle \quad (2.65)$$

ここで、 $\alpha = e, \mu, \tau$  はニュートリノのフレーバー固有状態を表し、 $i = 1, 2, 3$  はニュートリノの質量固有状態を表す。質量固有状態  $|\nu_i\rangle$  は、真空中のハミルトニアン  $\hat{H}_0$  の固有状態である。

$$\hat{H}_0 |\nu_i\rangle = E_i |\nu_i\rangle, \quad E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2} \quad (2.66)$$

物質中の全ハミルトニアンは、ニュートリノと物質との散乱による有効ポテンシャルが加わり次のようになる。

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \quad \hat{V} |\nu_\alpha\rangle = V_\alpha |\nu_\alpha\rangle \quad (2.67)$$

ここで、 $\hat{H}_0$  は真空でのハミルトニアン、 $\hat{V}$  は有効ポテンシャルを表す。シュレディンガー描像では、初期状態として  $|\nu_\alpha\rangle$  のニュートリノの状態は次の時間発展方程式に従う。

$$i \frac{d}{dt} |\nu_\alpha(t)\rangle = \hat{H} |\nu_\alpha(t)\rangle, \quad |\nu_\alpha(0)\rangle = |\nu_\alpha\rangle \quad (2.68)$$

$\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$  の確率振幅は次のように与えられる。

$$A_{\alpha\beta}(t) = \langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle, \quad A_{\alpha\beta}(0) = \delta_{\alpha\beta} \quad (2.69)$$

時刻  $t = 0$  でフレーバー  $\alpha$  で、時刻  $t$  でフレーバー  $\beta$  と遷移する確率振幅は次のようになる。

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) = |A_{\alpha\beta}(t)|^2 \quad (2.70)$$

フレーバー遷移の確率振幅について、時間発展方程式は次のようになる。

$$i \frac{d}{dt} A_{\alpha\beta}(t) = \sum_{\eta} \left( \sum_k U_{\beta k} E_k U_{\eta k}^* + \delta_{\beta\eta} V_{\beta} \right) A_{\alpha\eta}(t) \quad (2.71)$$

超相対論的なニュートリノの場合

$$E_k \simeq E + \frac{m_k^2}{2E}, \quad p \simeq E, \quad t \simeq x \quad (2.72)$$

ここで、 $x$  はニュートリノ生成源からの距離である。これらの下で、時間発展方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dx} A_{\alpha\beta}(x) &= \left( p + \frac{m_1^2}{2E} + V_{NC} \right) A_{\alpha\beta}(x) \\ &+ \sum_{\eta} \left( \sum_k U_{\beta k} U_{\eta k} \frac{\Delta m_{k1}^2}{2E} U_{\eta k}^* + \delta_{\beta\eta} \delta_{\eta e} V_{CC} \right) A_{\alpha\eta}(x) \end{aligned} \quad (2.73)$$

最初の項はすべてのフレーバーに共通しており、位相をシフトさせることによって、この寄与を無視することができる。

$$A_{\alpha\beta}(x) \rightarrow A_{\alpha\beta}(x) e^{-i \left( p + \frac{m_1^2}{2E} \right) x} - i \int_0^x V_{NC}(x') dx' \quad (2.74)$$

よって、フレーバー遷移の確率振幅の適切な時間発展の方程式は次のようになる。

$$i \frac{d}{dx} A_{\alpha\beta}(x) = \sum_{\eta} \left( \sum_k U_{\beta k} U_{\eta k} \frac{\Delta m_{k1}^2}{2E} U_{\eta k}^* + \delta_{\beta\eta} \delta_{\eta e} V_{CC} \right) A_{\alpha\eta}(x) \quad (2.75)$$

行列の形で書くと、次のようになる。

$$i \frac{d}{dx} \vec{A} = \hat{H}_F \vec{A}, \quad (2.76)$$

ここで、

$$\hat{H}_F = \frac{1}{2E} (U \mathbf{M}^2 U^\dagger + \mathbf{A}), \quad (2.77)$$

$\hat{H}_F$  はエルミート演算子であり、

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_{\alpha e}(x) \\ A_{\alpha \mu}(x) \\ A_{\alpha \tau}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta m_{21}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta m_{31}^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2EV_{CC} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

となり、有効ポテンシャル  $V_{CC}$  は以下で与えられる。

$$V_{CC} = \sqrt{2} G_F n_e. \quad (2.79)$$

このように、ニュートリノ振動確率は、ニュートリノが通過した地殻中の電子数密度に依存する。これを応用し、ニュートリノ振動実験で得られるデータを解析することで、ニュートリノが通過した地殻の密度分布の情報を抜き出すという「ニュートリノトモグラフィー」という試みも行われている<sup>3</sup>。現段階ではこの新しい技術は実現されていないが、将来の実験で実現されるかもしれない。

<sup>3</sup>筆者も同様の研究を行っており [17]、興味がある方は、この論文や、この中で引用している論文を参照していただきたい。

## 2.3 観測値

ニュートリノは(重力相互作用を除くと)弱い相互作用を通じてのみ、他の素粒子と相互作用する。ニュートリノ振動実験によって、混合角と質量二乗差が正確に測定されつつあるが、振動実験では測定することができないパラメータも存在する。特に、質量の絶対値は未だ決定されていない。宇宙論よりニュートリノ質量について制限は与えられている。

素粒子標準模型における、ニュートリノの相互作用を書き出すと以下ようになる。

$$\mathcal{L}_{CC} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} j_{CC}^\mu W_\mu + h.c. \quad (2.80)$$

$$\mathcal{L}_{NC} = -\frac{g}{2\cos\theta_W} j_{NC}^\mu Z_\mu \quad (2.81)$$

ここで、CCは荷電カレント (Charged Current) を意味し、NCは中性カレント (Neutral Current) を意味する。 $g$ は $SU(2)_L$ の結合定数であり、LはLeft-Handedの頭文字をとったもので、左巻きのレプトンのみがこの相互作用に関与するということを意味する。 $\theta_W$ はワインバーグ角と呼ばれ、 $U(1)_Y$ のベクトル場と、 $SU(2)_L$ の3番目のベクトル場との混合における混合角である。

$$A^\mu = \sin\theta_W A_3^\mu + \cos\theta_W B^\mu \quad (2.82)$$

$$Z^\mu = \cos\theta_W A_3^\mu - \sin\theta_W B^\mu \quad (2.83)$$

$j_{CC}^\mu, j_{NC}^\mu$ は以下で与えられる。

$$j_{CC}^\mu = 2 \sum_{l=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_{lL} \gamma^\mu l_L + \dots \quad (2.84)$$

$$j_{NC}^\mu = \sum_{l=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_{lL} \gamma^\mu \nu_{lL} \quad (2.85)$$

Zボソンの崩壊によりニュートリノは生成されることができ、Zボソンの崩壊の測定によってニュートリノの数が確認されている。Zボソンの全崩壊幅は、

$$\Gamma_{Z \rightarrow f\bar{f}} = \sum_{l=e,\mu,\tau} \Gamma_{Z \rightarrow l\bar{l}} + \sum_{q \neq t} \Gamma_{Z \rightarrow q\bar{q}} + \Gamma_{inv}, \quad (2.86)$$

と与えられる。ここで、 $\sum_{l=e,\mu,\tau} \Gamma_{Z \rightarrow l\bar{l}}$ はレプトンへの崩壊幅で、 $\sum_{q \neq t} \Gamma_{Z \rightarrow q\bar{q}}$ はクォークへの崩壊幅である。そして、 $\Gamma_{inv}$ は見えない粒子への崩壊幅を表す。Zボソンの崩壊幅の測定により、見えない崩壊幅から、図 2.1 にのように、フレーバーニュートリノの種類は  $2.9840 \pm 0.0082$  と得られ、3種類だと考えられている [18]。

ニュートリノが質量を持つとすると、ニュートリノの相互作用ラグランジアンは次のように記述される。

$$\mathcal{L}^{(CC)} = \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \left( \bar{e}, \bar{\mu}, \bar{\tau} \right) \gamma^\mu P_L U_{PMNS} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} + h.c. \quad (2.87)$$

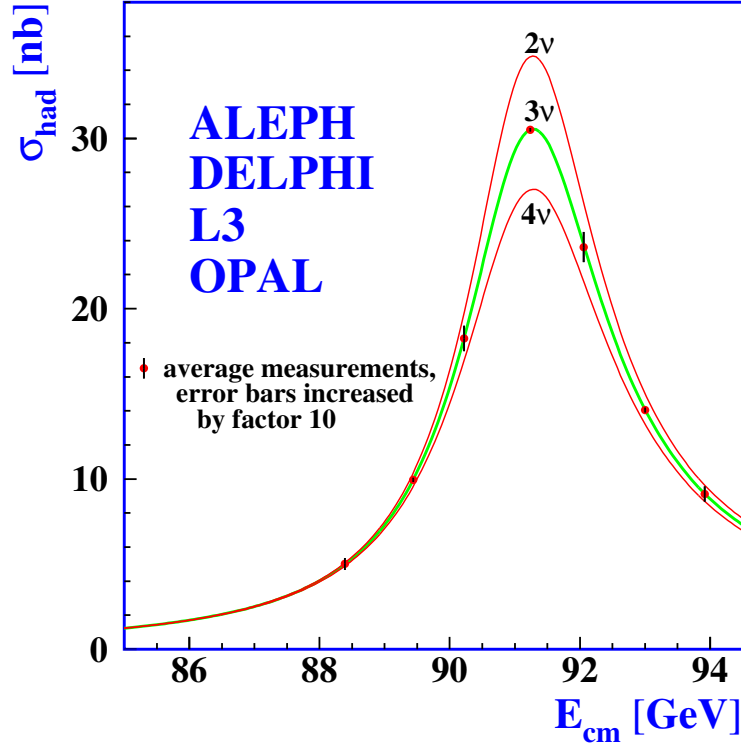


図 2.1:  $Z$  共鳴周辺のハドロン生成断面積の測定。曲線は SM カップリングと無視できる質量を持つ 2,3,4 種のニュートリノについて予測された断面積を示されている。[18] より転載。

フレーバー固有状態を  $\nu_\alpha (\alpha = e, \mu, \tau)$ 、質量固有状態を  $\nu_i (i = 1, 2, 3)$  とすると、フレーバー固有状態 (ゲージ固有状態) は、質量固有状態の重ね合わせでかける。

$$\nu_\alpha = \sum_i (U_{\text{PMNS}})_{\alpha i} \nu_i \quad (2.88)$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = U_{\text{PMNS}} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \quad (2.89)$$

ここで、 $U_{\text{PMNS}}$  はポンテコルボ・牧・中川・坂田行列と呼ばれ、 $3 \times 3$  のユニタリー行列である。

$$U_{\text{PMNS}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{-i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P \quad (2.90)$$

ここで、 $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ ,  $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ 。ニュートリノがマヨラナ粒子の場合は、物理的なマヨラナ位相が増える。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix} \quad (2.91)$$

ニュートリノの質量がゼロのときは、フレーバー固有状態と質量固有状態は一致する。

PMNS 行列に現れる混合角  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{23}$ ,  $\theta_{12}$  と位相  $\delta$ 、さらに、二つの二乗差は様々な振動実験によって測定されている。現段階で最新のニュートリノ振動実験による結果 [19] を表 2.2 に示す。なお、ニュート



リノ振動実験ではマヨラナ位相は測定することができない。マヨラナ位相を測定するためには、ニュートリノを伴わない二重ベータ崩壊など別の実験が必要となる。

表 2.2: NuFIT 5.0 w/SK (2020) によるニュートリノ 振動実験結果のまとめ。

パラメータ	$\theta_{12}/^\circ$	$\theta_{23}/^\circ$	$\theta_{13}/^\circ$	$\frac{\Delta m_{21}^2}{10^{-5}\text{eV}^2}$	$\frac{\Delta m_{3l}^2}{10^{-3}\text{eV}^2}$	$\delta_{CP}/^\circ$
順階層						
ベストフィット $\pm 1\sigma$	$33.44^{+0.77}_{-0.74}$	$49.2^{+0.9}_{-1.2}$	$8.57^{+0.12}_{-0.12}$	$7.42^{+0.21}_{-0.20}$	$+2.517^{+0.026}_{-0.028}$	$197^{+27}_{-24}$
逆階層						
ベストフィット $\pm 1\sigma$	$33.45^{+0.78}_{-0.75}$	$49.3^{+0.9}_{-1.1}$	$8.60^{+0.12}_{-0.12}$	$7.42^{+0.21}_{-0.20}$	$-2.498^{+0.028}_{-0.028}$	$282^{+26}_{-30}$

ベータ崩壊における陽電子スペクトルを観測することで、ニュートリノ質量による影響を知ることができる。ベータ崩壊はニュートリノが存在することを予言するきっかけとなった現象であり、1930年に W.Pauli によりニュートリノの存在が初めて提唱された。ニュートリノ物理学の歴史的にも重要な現象である。

原子核の構成要素は、中性子  $n$  と陽子  $p$  であり、中性子  $n$  の崩壊を考えると、電荷の保存から以下のような反応が予想される。

$$n \rightarrow p + e^- \quad (2.92)$$

しかし、この場合、電子のエネルギー分布が連続的で無くなってしまう。さらに、 $n$ ,  $p$ ,  $e^-$  は全てスピンが  $1/2$  のフェルミ粒子であり、崩壊前の  $n$  の角運動量は反奇数であるのに対して、崩壊後の  $p$  と  $e^-$  の合成の各運動量は整数となり一致しなくなってしまう。

そこで、パウリは、中性の微粒子（今では、これがニュートリノであることを知っているのここでは、 $\bar{\nu}$  とする）を導入し、

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu} \quad (2.93)$$

という過程を考えることで、これらの問題に対する解決策を提案した。

ニュートリノ質量の影響は、ベータスペクトルのテール部分に現れる。トリチウムのベータ崩壊を調べる KARIN 実験によって、現時点で最も厳しいベータ崩壊によるニュートリノ（有効）質量への制限が得られた [13]。

$$m_{\nu_e} = \sqrt{\sum_i |U_{ei}|^2 m_{\nu_i}^2} < 1.1 \text{ eV} \quad (2.94)$$

同様に、エネルギースペクトルに現れるニュートリノ質量の影響を考慮することで、ミューニュートリノ、タウニュートリノに対しても制限が与えられている [16]。

$$m_{\nu_\mu}^2 = \sqrt{\sum_i |U_{\mu i}|^2 m_{\nu_i}^2} < 190 \text{ keV} \quad (2.95)$$

$$m_{\nu_\tau}^2 = \sqrt{\sum_i |U_{\tau i}|^2 m_{\nu_i}^2} < 18.2 \text{ MeV} \quad (2.96)$$

さらに、ニュートリノがマヨラナ粒子の場合は、ニュートリノを伴わない二重ベータ崩壊を起こすことができる。これについての現時点での最も厳しい制限は、KamLAND-Zen 実験で与えられている [20]。ここで、有効質量は、

$$\langle m_{\beta\beta} \rangle \equiv \left| \sum_i U_{ei}^2 m_i \right| = 61 - 165 \text{ meV}. \quad (2.97)$$

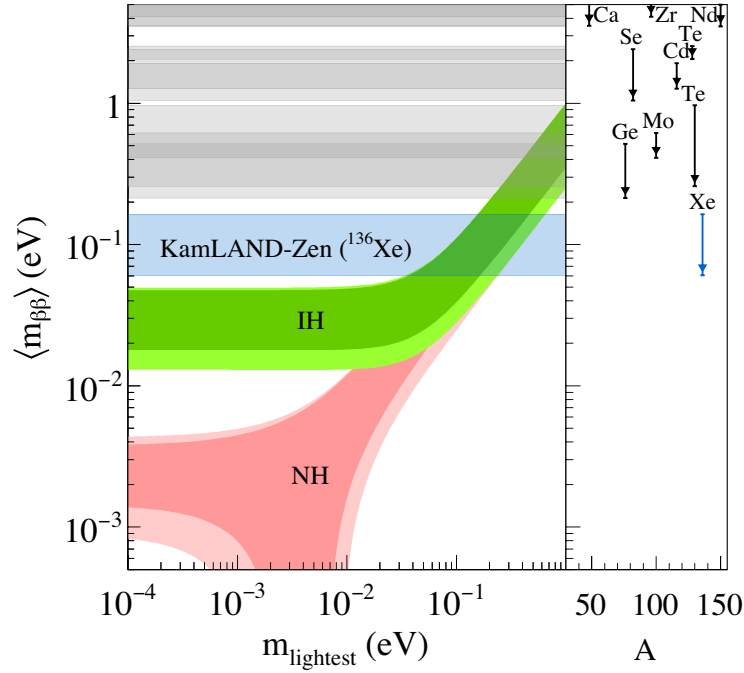


図 2.2: [20] より転載。最軽量のニュートリノ質量  $m_{\text{lightest}}$  の関数としての有効ニュートリノ質量  $\langle m_{\beta\beta} \rangle$  を表す。順階層 (NH) と逆階層 (IH) の色付けされた領域について、濃い領域はニュートリノ振動パラメータのベストフィット値に基づく予測値であり、薄い領域は、振動パラメータの不確かさを含んで計算された 3 の範囲を示している。水平線のバンドは、KamLAND-Zen [20] の  $^{136}\text{Xe}$  を用いた場合の 90 % C.L. の上限を示している。サイドパネルは、質量数の関数としての各原子核の対応する限界を示している。

と与えられており (図 2.2)、最も軽いニュートリノ質量に対しては、

$$m_{\text{lightest}} < (180 - 480) \text{ meV (90\% C.L.)} \quad (2.98)$$

という上限が与えられている。

また、銀河の構造形成の種となる密度ゆらぎの発展に影響を与えてしまうことから、ニュートリノ質量の和には制限がついており、Planck 2018 によって、

$$\sum m_\nu < 0.12 \text{ eV} \quad (2.99)$$

という制限が与えられている [21]。最も軽いニュートリノの質量を  $m_0$  とすると、Planck 2018 から得られる制限とニュートリノ振動実験の測定による二つの質量二乗差の値を用いて、最も軽いニュートリノ質量の上限を与えることができる。

$$m_0 < 0.030 \text{ eV (順階層の場合)} \quad (2.100)$$

$$m_0 < 0.016 \text{ eV (逆階層の場合)} \quad (2.101)$$

そしてこれが、現時点での最も厳しい  $m_0$  に対する制限になる。

## 2.4 右巻きニュートリノとシーソー機構

標準模型に「右巻きニュートリノ」を導入することでニュートリノ質量の説明が可能となる。右巻きニュートリノのニュートリノ質量が相対的に十分に大きい場合、ニュートリノの極微の質量を説明することができる。この機構は、シーソー機構と呼ばれる。

素粒子標準模型に1重項の右巻きニュートリノを導入する。ラグランジアンは以下のように与えられる。

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{SM}} + i\bar{\nu}_{RI}\gamma^\mu\partial_\mu\nu_{RI} - \left( F_{\alpha I}\bar{L}_\alpha H\nu_{RI} + \frac{M_I}{2}\bar{\nu}_{RI}^c\nu_{RI} + h.c. \right), \quad (2.102)$$

ここで、 $H$  はヒッグス場の二重項、 $L_\alpha$  ( $\alpha = e, \mu, \tau$ ) はレプトンの二重項である。 $F_{\alpha I}$  は  $Y$  結合行列を表す。このラグランジアンには、ニュートリノのディラック質量  $M_D = F\langle H \rangle$  とマヨラナ質量  $M_M = M_I$  の両方が与えられている。ここでは、荷電レプトンと右巻きニュートリノの質量行列が実対角的な基底をとる。ヒッグスの真空期待値は  $\langle H \rangle = 174\text{GeV}$  であり、ニュートリノの質量項は以下になる。

$$-\mathcal{L}_{\text{mass}} = M_D\bar{\nu}_L\nu_R + \frac{1}{2}M_M\bar{\nu}_R^c\nu_R. \quad (2.103)$$

ここで、 $\bar{\nu}_L\nu_R = \bar{\nu}_R^c\nu_L^c$  を使うと、質量項は次のように書くことができる。

$$-\mathcal{L}_{\text{mass}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{\nu}_R^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & M_D \\ M_D^T & M_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ \nu_R \end{pmatrix} + h.c. \quad (2.104)$$

右巻きニュートリノの数を  $\mathcal{N}$  とすると、 $M_D$  は  $3 \times \mathcal{N}$  行列であり、 $M_M$  は  $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$  行列である。この質量行列を  $\mathcal{M}$  とする。

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & M_D \\ M_D^T & M_M \end{pmatrix} \quad (2.105)$$

この段階では、左巻きニュートリノの質量固有値は見えにくい構造になっており、対角化をすることによって、全てのニュートリノの質量固有値を明らかにする。まずブロック対角化を行い、その後さらに、質量行列の左上ブロックを対角化することで、 $\mathcal{M}$  の対角化を行う。ここで、次のような階層性を仮定する。

$$\frac{|(M_D)_{\alpha I}|}{|(M_M)_{II}|} \ll 1. \quad (2.106)$$

次のような混合  $\Theta$  ( $|\Theta| \ll 1$ )

$$\Theta = \frac{(M_D)_{\alpha I}}{M_I} = \frac{F_{\alpha I}\langle H \rangle}{M_I}, \quad (2.107)$$

を含む混合行列  $\hat{U}_1$

$$\hat{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 & \Theta \\ -\Theta^\dagger & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.108)$$

を用いて、次のようにブロック対角化を行う。

$$\hat{U}_1^\dagger \mathcal{M} \hat{U}_1^* = \begin{pmatrix} M_\nu & 0 \\ 0 & M_I \end{pmatrix}. \quad (2.109)$$

ここで、ユニタリー条件は、 $\mathcal{O}(\Theta)$  まで満たされる：

$$\hat{U}_1^\dagger \hat{U}_1 = \hat{U}_1 \hat{U}_1^\dagger = \begin{pmatrix} 1 + \Theta \Theta^\dagger & 0 \\ 0 & 1 + \Theta^\dagger \Theta \end{pmatrix} = 1 + \mathcal{O}(\Theta^2). \quad (2.110)$$

$3 \times 3$  行列  $M_\nu$  は以下のように与えられ、

$$[M_\nu]_{\alpha\beta} = -[M_D]_{\alpha I} [M_D]_{\beta I} M_I^{-1}, \quad (2.111)$$

さらに  $M_\nu$  を  $3 \times 3$  ユニタリー行列  $U$  ( $U^\dagger U = U U^\dagger = 1$ ) を用いて、次のように対角化する。

$$U^\dagger M_\nu U^* = D_\nu = \text{diag}(m_1, m_2, m_3). \quad (2.112)$$

この過程を、次のような行列  $\hat{U}_2$ ,

$$\hat{U}_2 = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.113)$$

を用いて、次のように書ける。

$$\hat{U}_2^\dagger \hat{U}_1^\dagger \mathcal{M} \hat{U}_1 \hat{U}_2 = \begin{pmatrix} D_\nu & 0 \\ 0 & D_N \end{pmatrix} \quad (2.114)$$

ここで、 $D_N = M_M = \text{diag}(M_1, \dots, M_N)$  である。以上をもって、全てを対角化することができたことになる。ここまでの処方箋を一つのユニタリー行列  $\hat{U}$ 、

$$\hat{U} = \hat{U}_1 \hat{U}_2 = \begin{pmatrix} U & \Theta \\ -\Theta^\dagger U & 1 \end{pmatrix} \quad (2.115)$$

にまとめることができる。最終的に、左巻きニュートリノのフレーバー固有状態  $\nu_{L\alpha}$  と右巻きニュートリノのフレーバー固有状態  $\nu_{RI}$  は次のように表される。

$$\nu_{L\alpha} = U_{\alpha i} \nu_i + \Theta_{\alpha I} N_I^c \quad (2.116)$$

$$\nu_{RI}^c = N_I^c - (\Theta^\dagger U)_{Ii} \nu_i \quad (2.117)$$

ここで、 $\nu_i$  は左巻きニュートリノの質量固有状態であり、 $N_I$  は右巻きニュートリノの質量固有状態である。

## 第3章 重力波

重力波は、一般相対性理論により予言されるアインシュタイン時空の歪みが波として伝播する現象である。2015年9月14日、アメリカの Advanced LIGO により、始めて直接検出された [15]。重力波が発見されたことにより、新たな物理探索の時代が訪れている。将来の重力波実験も続々と計画されており、その重要なターゲットの一つが背景重力波の検出である。背景重力波は、宇宙のどの場所にも常に安定して存在する重力波で、初期宇宙起源の重力波と天体起源の重力波がある。重力波は極めて透過性が高く、散乱することなく伝播する。重力波は宇宙膨張の影響を受けて発展するために、初期宇宙で生成された重力波には宇宙の熱史が刻まれることになる。本章では、特にインフレーション起源の背景重力波（原始重力波とも呼ばれる）を想定し、標準宇宙論での熱史がインフレーション起源の背景重力波スペクトルに与える影響を解説する。まず、宇宙の熱史について簡単に振り返り、その次に宇宙の熱史に伴う重力波の発展、さらに、重力波スペクトルについて解説する。

### 3.1 背景重力波

宇宙の熱史について振り返る前に、まず、この章では、[22] を参考に、背景重力波の生成源を簡単にまとめておきたい。背景重力波については、大きく分けると初期宇宙起源の重力波と天体起源の重力波がある。これまで幾つかの生成源が考えられている。

- 初期宇宙起源の重力波

- 初期宇宙における量子揺らぎから生成される（密度揺らぎや）重力波 [23, 24]
- 1次相転移からの重力波 [25–29]
- インフレーション後の Preheating [30]
- 位相欠陥 [31–35]

- 天体起源の重力波

- コンパクト天体（ブラックホール、中性子星、白色矮星）連星 [36, 37]
- 超新星爆発 [38, 39]
- 中性子星の  $r$  モード不安定性 [40]
- マグネター [41]

これらのように背景重力波には多くの起源が考えられるが、本論文では特にインフレーション起源の重力波に着目する。本論文では、初期宇宙での宇宙膨張の変化が刻まれた背景重力波スペクトルを予言することで、最も軽いニュートリノ質量値に対する予言を考察することを目的としている。重力波が初期宇宙における膨張則の影響を受けるためには、その重力波自身がそれ以前の宇宙で生成されている必要がある。そこで、宇宙の非常に初期で起こると考えられ、かつ、その重力波の振る舞い（周波数依存性）が単純になるインフレーションによる重力波に着目することとした。

また、本論文では、このインフレーション起源の重力波と、その他の背景重力波との分離に関わる議論については立ち入らないこととする。それぞれの起源による背景重力波は、そのモデルに現れるパ

ラメータによって大きなスペクトルを取る場合もある。すると、例えば、今のようなインフレーション起源の重力波を対象としている場合、それ以外の前景背景重力波を分離しなければならなくなる。対象以外の背景重力波を分離することは非常に困難な作業であると考えられるが、今後の発展を期待したい。

## 3.2 宇宙の熱史

### 3.2.1 標準宇宙論

一様等方な宇宙を考える。ミンコフスキー時空を

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ \eta_{\mu\nu} &= \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \end{aligned} \quad (3.1)$$

のように取る。アインシュタイン方程式は以下のように与えられる。

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R + \Lambda g^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu} \quad (3.2)$$

ここで、 $g^{\mu\nu}$  が計量であり、 $R^{\mu\nu}$  はリッチ曲率テンソル (Ricci curvature tensor)、 $R$  はスカラー曲率 (scalar curvature)、 $\Lambda$  は宇宙定数 (cosmological constant) である。 $G$  はニュートン定数、 $T_{\mu\nu}$  はエネルギー-運動量テンソルを表す。一様等方宇宙では、エネルギー-運動量テンソルは、

$$T^\mu_\nu = \text{diag}(-\rho, p, p, p) \quad (3.3)$$

となる。 $\rho$  はエネルギー密度、 $p$  は圧力を表す。エネルギー保存則より、

$$d(\rho a^3) = -p d(a^3) \quad (3.4)$$

ここで、 $a$  はスケール因子である。状態方程式  $p = w\rho$  を使うと、エネルギー密度のスケール因子に対する依存性は次のようになる。

$$\rho \propto a^{-3(1+w)} \quad (3.5)$$

相対論的な粒子の場合  $w = \frac{1}{3}$  となり、これを放射 (Radiation) と呼ぶ。非相対論的な粒子の場合  $w = 0$  となり、これを物質 (Matter) と呼ぶ。また、真空エネルギーの場合は、 $w = -1$  となる。これをまとめると、エネルギー密度の振る舞いは次のようになる。

$$\rho \propto \begin{cases} a^{-4} & \text{放射 } (p = \frac{1}{3}\rho) \\ a^{-3} & \text{物質 } (p = 0) \\ \text{const.} & \text{真空 } (p = -\rho) \end{cases}, \quad (3.6)$$

宇宙膨張則は、フリードマン方程式によって記述される。

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{3M_P^2}(\rho_{\text{tot}}). \quad (3.7)$$

ここで、ドット ( $\dot{\phantom{x}}$ ) は時間微分を表す。 $M_P$  はプランク質量 (Reduced Planck mass) であり、 $\rho_{\text{tot}}$  は宇宙全体のエネルギー密度である。エネルギー密度のスケール因子依存性より、宇宙は時間発展するにつれて放射優勢、物質優勢、真空エネルギー優勢となることが予想される。

初期宇宙では高温高密度であり、各エネルギー成分は平衡状態になっていると考えられる。よって、質量  $m$  の粒子が温度  $T$  の平衡分布をしているとき、運動量  $\mathbf{p}$  に対する分布関数は以下で与えられる。

$$f(\mathbf{p}) = \frac{1}{\exp((E - \mu)/T) \pm 1} \quad (3.8)$$

ここで、 $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$  であり、 $+$  はフェルミ-ディラック統計、 $-$  はボーズ-アインシュタイン統計を表す。 $\mu$  は化学ポテンシャルである。すると、数密度、エネルギー密度、圧力は以下のように与えられる。

$$n = \frac{g}{(2\pi)^3} \int f(\mathbf{p}) d^3p \quad (3.9)$$

$$\rho = \frac{g}{(2\pi)^3} \int E f(\mathbf{p}) d^3p \quad (3.10)$$

$$p = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{|\mathbf{p}|^2}{3E} f(\mathbf{p}) d^3p \quad (3.11)$$

ここで、 $g$  は粒子の自由度を表す。

相対論的な極限では、

$$\rho = \begin{cases} \frac{\pi^2}{30} g T^4 & (\text{ボゾン}) \\ \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} g T^4 & (\text{フェルミオン}) \end{cases} \quad (3.12)$$

$$n = \begin{cases} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g T^3 & (\text{ボゾン}) \\ \frac{3}{4} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g T^3 & (\text{フェルミオン}) \end{cases} \quad (3.13)$$

$$p = \frac{\rho}{3} \quad (3.14)$$

となる。非相対論的な極限では、

$$n = g \left( \frac{mT}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left[ -\frac{m - \mu}{T} \right] \quad (3.15)$$

$$\rho = mn \quad (3.16)$$

$$p = nT \ll \rho. \quad (3.17)$$

となる。平衡下の全ての相対論的粒子のエネルギー密度を以下のように書く。

$$\rho_R(T) = \frac{\pi^2}{30} g_*(T) T^4 \quad (3.18)$$

ここで、 $g_*(T)$  は、相対論的粒子の自由度の和であり、

$$g_*(T) = \sum_{\text{boson}} g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{\text{fermion}} g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^4 \quad (3.19)$$

$T_i$  はそれぞれの粒子の温度である。

エントロピー密度も熱平衡下で共動体積 ( $V = a^3$ ) あたりのエントロピー  $S$  として定義することができる。

$$s \equiv \frac{S}{V} = \frac{\rho + p}{T} \quad (3.20)$$

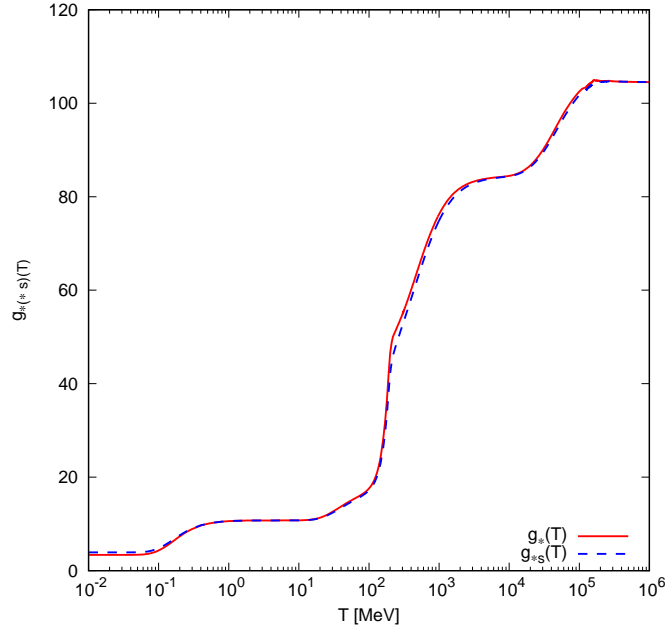


図 3.1: 標準模型における有効自由度  $g_*(T)$  と  $g_{*s}(T)$  : 横軸は宇宙の温度  $T$  [MeV] を表す。赤の実線が  $g_*(T)$  であり、青の破線が  $g_{*s}(T)$  である。Mikko Laine 氏の HP(<http://www.laine.itp.unibe.ch/eos15/>) にて公開しているデータを用いた。

すると、同様に、以下のように有効自由度を用いて定義することができる。

$$s(T) = \frac{2\pi^2}{45} g_{*s}(T) T^3 \quad (3.21)$$

ここで、有効自由度  $g_{*s}(T)$  は以下で定義される。

$$g_{*s}(T) = \sum_{\text{boson}} g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{\text{fermion}} g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^3 \quad (3.22)$$

素粒子標準模型の場合、 $g_*(T)$  と  $g_{*s}(T)$  は、図 3.1 のように与えられる。 $T \gtrsim 300$  GeV の非常に高温な初期宇宙では、標準模型の素粒子は全て相対論的で熱平衡状態になっており、有効自由度は以下のようにあ与えられる。

$$\begin{aligned} g_*(T \gtrsim 300 \text{ GeV}) &= \underbrace{4}_{\text{EW gauge boson}} + \underbrace{8 \times 2}_{\text{gluon}} + \underbrace{4 \times 2}_{\text{Higgs}} \\ &\quad + \frac{7}{8} (\underbrace{6 \times 2 \times 6}_{\text{quark}} + \underbrace{3 \times 2 \times 2}_{\text{charged lepton}} + \underbrace{3 \times 2}_{\text{neutrino}}) \\ &= 106.75 \end{aligned} \quad (3.23)$$

温度が 200 GeV 程度に下がると、電弱相転移に伴って電弱相互作用の自発的対称性の破れがおき、光子とグルーオンを除いて、ほとんどの粒子が質量を獲得する。さらに温度が下がるにつれて質量が大きい粒子が非相対論的になっていき、自由度は小さくなっていく。温度が 200 MeV 程度になると、QCD 相転移が起き、クォーク・グルーオン・プラズマの状態が保てなくなり、クォークとグルーオンはハドロンとしてしか存在できなくなる。その後、さらに温度が下がり現在の宇宙の温度になるまでに、電子・陽電子の対消滅が起き、陽子数と同じ数だけの電子が残されて、非相対論的になる。電子・陽電



子の対消滅の少し前には、ニュートリノの相互作用が脱結合するために、ニュートリノの温度は光子の温度に比べて  $(4/11)^{4/3}$  倍だけ小さくなる。よって、現在の自由度には光子とニュートリノのみが効き、それぞれ、以下のように与えられる。

$$g_{*0} = 2 + \frac{7}{8} \times 3 \times 2 \times \left(\frac{4}{11}\right)^{\frac{4}{3}} \simeq 3.363 \quad (3.24)$$

$$g_{*s0} = 2 + \frac{7}{8} \times 3 \times 2 \times \frac{4}{11} \simeq 3.909 \quad (3.25)$$

ここで、標準宇宙論におけるの宇宙の熱史を振り返る。まず量子揺らぎによりインフレーションと呼ばれる加速膨張期があったと予測されている。その後、再加熱過程と呼ばれる粒子生成がおき、放射が生成される。宇宙が冷えていくにつれて、放射優勢期、物質優勢期と発展していく。

### 3.2.2 インフレーション

多くのインフレーションモデルでは、加速膨張はスカラー場  $\phi$  によって起こり、運動方程式は次のように与えられる。

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V' = 0. \quad (3.26)$$

ここで、プライム (') は  $\phi$  についての微分を意味する。  $V$  は  $\phi$  のポテンシャルである。ハッブルパラメータはこのスカラー場  $\phi$  のエネルギー密度  $\rho_\phi = \dot{\phi}^2/2 + V$  によって決定され、フリードマン方程式は次のようになる。

$$H^2 \equiv \frac{8\pi}{3m_{\text{Pl}}^2} \left( \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right). \quad (3.27)$$

ここで、  $M_{\text{Pl}} = 1/\sqrt{G}$  はプランク質量 (Planck mass) である。指数関数膨張のためには、場  $\phi$  のエネルギー密度は、そのポテンシャルエネルギーにより支配される ( $\dot{\phi}^2/2 \ll V$ )。この条件は、よく次のように定義されるスローロールパラメータ (slow-roll parameters) によって特徴付けられる。

$$\epsilon \equiv \frac{m_{\text{Pl}}^2}{16\pi} \left( \frac{V'}{V} \right)^2, \quad (3.28)$$

$$\eta \equiv \frac{m_{\text{Pl}}^2}{8\pi} \frac{V''}{V}. \quad (3.29)$$

いわゆるスローロールの条件である  $\epsilon \ll 1$  と  $|\eta| \ll 1$  が満たされている限り、宇宙膨張率をほぼ一定に保ったままインフレーションが継続するので、スローロール近似はインフレーション時に生じるゆらぎを理論的に研究するのに有用なツールとなる。

スローロールの領域では、地平線の外側に発生する原始スカラー摂動スペクトル  $\mathcal{P}_{\text{S,prim}}(k)$  と原始テンソル摂動スペクトル  $\mathcal{P}_{\text{T,prim}}$  が次のように導出される。

$$\mathcal{P}_{\text{S,prim}}(k) = \frac{1}{\pi\epsilon} \left( \frac{H}{m_{\text{Pl}}} \right)^2 \Big|_{k=aH} \quad (3.30)$$

$$\mathcal{P}_{\text{T,prim}}(k) = \frac{16}{\pi} \left( \frac{H}{m_{\text{Pl}}} \right)^2 \Big|_{k=aH} \quad (3.31)$$

ここで、  $H$  は波数  $k$  のモードが地平線を出た時の時間で評価される。テンソルスペクトル  $\mathcal{P}_{\text{T,prim}}(k)$  のスケール不変性からの偏差をパラメータ化するために、スローロールパラメータ [42, 43] の観点から表

すことができるテンソルスペクトル指数 (the tensor spectral index)  $n_T$  とそのランニング指数 (running index)  $\alpha_T$  を使用することができる。

$$n_T(k) \equiv \frac{d \ln \mathcal{P}_{T,\text{prim}}(k)}{d \ln k} \simeq -2\epsilon \quad (3.32)$$

$$\alpha_T(k) \equiv \frac{dn_T}{d \ln k} \simeq 4\epsilon\eta - 8\epsilon^2 \quad (3.33)$$

よって、パワースペクトルは、次のような展開で表すことができる。

$$\ln \frac{\mathcal{P}_{T,\text{prim}}(k)}{\mathcal{P}_{T,\text{prim}}(k_0)} = n_T(k_0) \ln \frac{k}{k_0} + \frac{1}{2} \alpha_T(k_0) \ln^2 \frac{k}{k_0} + \dots, \quad (3.34)$$

ここで、 $k_0$  はピボットスケール (pivot scale) である。また、テンソル-スカラー指数  $r$  についても、 $\epsilon$  によって書くことができる。

$$r \equiv \frac{\mathcal{P}_{T,\text{prim}}(k)}{\mathcal{P}_{S,\text{prim}}(k)} \simeq 16\epsilon. \quad (3.35)$$

これらのパラメータは後に用いることになる。

### 3.2.3 再加熱過程

インフレーション後に起きる再加熱過程の間、スカラー場のエネルギーは、放射、あるいは、軽い他の粒子についてのポテンシャルエネルギーの最小値近傍の振動に変換される。ここでは、スカラー場の摂動的な崩壊 [44, 45] で、スカラー場と軽いフェルミオンの相互作用のみを考える。すると、 $\phi$  の方程式は、崩壊項を含めて [?, 46]、次のように書かれる。

$$\ddot{\phi} + (3H + \Gamma)\dot{\phi} + V' = 0 \quad (3.36)$$

ここで、 $\Gamma$  は  $\phi$  の崩壊幅であり、ポテンシャル底での振動周波数に依存する。この式は相互作用場の質量と崩壊率  $\Gamma$  が場  $\phi$  の振動周波数より十分に小さい場合にのみ有効である。崩壊がボソニックであり、パラメータが特定の条件 [46] を満たす場合に起こる予熱 (Preheating) [47, 48] のような非線形過程は扱わない。そのような過程は、高周波数で変わった形のスペクトルになる重力波を生成しうる [49–52]。しかし、本論文ではそのような過程を考えないため、詳細には立ち入らない。

放射のエネルギー密度は次のように書かれる。

$$\dot{\rho}_R + 4H\rho_R = \Gamma\rho_\phi. \quad (3.37)$$

フリードマン方程式は、宇宙の全エネルギー密度を用いて表されるので、

$$H^2 = \frac{8\pi}{3m_{\text{Pl}}^2}(\rho_\phi + \rho_R) \quad (3.38)$$

式 (3.36)-(3.38) を解くことで、宇宙膨張率を求めることができる。インフレーション後の再加熱は、 $\Gamma \sim H$  あたりで終了する。ここで、場  $\phi$  は崩壊し、宇宙は放射優勢になる。

## 3.3 重力波スペクトル

### 3.3.1 重力波の運動方程式

[53, 54] を元に解説する。重力波は平坦なフリードマン-ロバートソン-ウォーカー時空での計量の揺らぎとして記述される。計量を次のように取る。

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(\delta_{ij} + h_{ij}(t, \mathbf{x}))dx^i dx^j. \quad (3.39)$$

ここで、 $a(t)$  はスケール因子で、 $t$  は時間、 $x$  は共動座標を表す。また、 $h_{ij}$  は、トランスバース-トレースレス条件 ( $h_{00} = h_{0i} = \partial^i h_{ij} = h_i^i = 0$ ) を満たすとする。

重力波の運動方程式は以下で与えられる。

$$-\frac{1}{2}h_{ij;\nu}{}^{;\nu} = 8\pi G\Pi_{ij}. \quad (3.40)$$

ここで、 $\Pi_{ij}$  はエネルギー-運動量テンソルの非等方圧のトランスバース-トレースレス成分であり、以下で定義される。

$$T_{ij} = pg_{ij} + a^2\Pi_{ij}. \quad (3.41)$$

$p$  は圧力を表す。完全流体の場合は、 $\Pi_{ij} = 0$  となるが、これは一般的には正しくなく、例えば、ニュートリノ脱結合後に  $\Pi_{ij} \neq 0$  となることが予言されている。この項は、脱結合した相対論的粒子が存在し、その粒子のエネルギー密度が宇宙のエネルギー密度に比べて比較的大きい場合に、この項の効果によって重力波スペクトルが減衰する。しかし、例本研究で考察する重力波周波数域にはこの影響は現れず、加えて、本論文で考察する  $N_S$  による  $\Pi_{ij}$  の寄与は非常に小さいことが考えられるため、以降、 $\Pi_{ij} = 0$  とする。また、テンソルの摂動  $h_{ij}$  のみを扱うので、各成分を一般座標変換の下でスカラー量として扱うことができ、例えば  $h_{ij;\mu} = h_{ij,\mu}$  となる。重力波の運動方程式について、左辺は以下のようになる。

$$\begin{aligned} h_{ij;\nu}{}^{;\nu} &= \bar{g}^{\mu\nu}(h_{ij,\mu\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha h_{ij,\alpha}), \\ &= -\dot{h}_{ij} + \left(\frac{\nabla^2}{a^2}\right)h_{ij} - \left(\frac{3\dot{a}}{a}\right)h_{ij}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

ここで、 $\Gamma_{0\nu}^0 = \Gamma_{\mu 0}^0 = 0$ ,  $\Gamma_{ij}^0 = \delta_{ij}\dot{a}a$  であり、 $\bar{g}_{ij} = a^{-2}\delta_{ij}$  とした。ドット ( $\dot{\phantom{x}}$ ) は時間微分を表す。よって、式 (3.40) は、以下のようになる。

$$\ddot{h}_{ij} + 3H\dot{h}_{ij} - \frac{\nabla^2}{a^2}h_{ij} = 0. \quad (3.43)$$

$H = \dot{a}/a$  はハッブルパラメータである。後の便利のため、 $h_{ij}$  をフーリエモードに分解し、共動運動量を  $\mathbf{k}$  とすると、

$$h_{ij}(t, \mathbf{x}) = \sum_{\lambda=+, \times} \int \frac{dk^3}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \epsilon_{ij}^\lambda(\mathbf{k}) h_{\mathbf{k}}^\lambda, \quad (3.44)$$

となる。ここで、 $\epsilon_{ij}^\lambda$  はトランスバース-トレースレス条件を満たし、 $\sum_{ij} \epsilon_{ij}^\lambda (\epsilon_{ij}^{\lambda'})^* = 2\delta^{\lambda\lambda'}$  と規格化される。フーリエモードを用いて、式 (3.43) は、以下のようになる。

$$\ddot{h}_{\mathbf{k}}^\lambda + 3H\dot{h}_{\mathbf{k}}^\lambda + \frac{k^2}{a^2}h_{\mathbf{k}}^\lambda = 0. \quad (3.45)$$

エネルギー-運動量テンソルのトランスバース-トレースレス成分  $Pi_{ij}$  が無視できる場合、宇宙の他の成分の寄与は第二項を通してのみ現れる。つまり、ハッブルパラメータ  $H$  に依存して、重力波が発展することを意味している。共形時間 (conformal time)  $\tau (d\tau \equiv dt/a(t))$  で定義される。) を用いて記述すると、

$$\frac{d^2 h_{\mathbf{k}}^\lambda}{d\tau^2} + \left[ \frac{2}{a} \frac{da}{d\tau} \right] \frac{dh_{\mathbf{k}}^\lambda}{d\tau} + k^2 h_{\mathbf{k}}^\lambda(t, \mathbf{k}) = 0. \quad (3.46)$$

となる。

### 3.3.2 宇宙膨張における重力波の振る舞い

以下、膨張する宇宙の中で初期宇宙で生成された重力波がどのように進化していくのかを簡単に説明する。特に、インフレーション時の揺らぎによって生成された背景重力波（原始重力波とも呼ばれる）を想定し、解説する。

#### インフレーション中の振幅

まず、インフレーション中の  $h_k^\lambda$  の振幅を求める。インフレーション当初の間では、注目すべきモード  $k$  はハッブル地平線  $aH$  の奥深く ( $k \gg aH$ ) にあり、量子力学的にゆらぎを持っていた。この段階の  $h_k^\lambda$  の振幅を求める。（詳細は [43, 55] 見ればいいらしい。）インフレーション中の重力波の初期条件を求めるために、量子力学的な取り扱いを必要とする。

$h_k^\lambda$  を揺らぎとして取り扱っており、いわゆる量子化を行うように、交換関係を設定するが、これについて、再スケール化した変数によって実施する。

$$v_k^\lambda(\tau, \mathbf{k}) \equiv \frac{ah_k^\lambda}{16\pi G}. \quad (3.47)$$

この共役運動量を  $\pi_k^\lambda(\tau, \mathbf{k}) = \partial v_k^\lambda(\tau, \mathbf{k}) / \partial \tau$  とすると、以下の交換関係を満たす。

$$\begin{aligned} [\hat{v}_k^\lambda, \hat{\pi}_l^{\sigma\dagger}] &= i\delta^{\lambda\sigma}\delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{l}), \\ [\hat{v}_k^\lambda, \hat{v}_k^\sigma] &= [\hat{\pi}_k^{\lambda\dagger}, \hat{\pi}_k^{\sigma\dagger}] = 0. \end{aligned} \quad (3.48)$$

量子力学的な演算子について、次のように表す。

$$\hat{v}_k(\tau, \mathbf{k}) = v_k(\tau, k)\hat{a}_k^\lambda + v_k^*(\tau, k)\hat{a}_{-\mathbf{k}}^{\lambda\dagger}, \quad (3.49)$$

ここで、生成、消滅演算子  $\hat{a}_k^\lambda, \hat{a}_{-\mathbf{k}}^{\lambda\dagger}$  は、以下の交換関係を満たすとする。

$$\begin{aligned} [\hat{a}_k^\lambda, \hat{a}_l^{\sigma\dagger}] &= \delta^{\lambda\sigma}\delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{l}), \\ [\hat{a}_k^\lambda, \hat{a}_k^\sigma] &= [\hat{a}_k^{\lambda\dagger}, \hat{a}_k^{\sigma\dagger}] = 0. \end{aligned} \quad (3.50)$$

これは、ロンスキアン条件、

$$v_k^* \frac{dv_k}{d\tau} - v_k \frac{dv_k^*}{d\tau} = -i, \quad (3.51)$$

を満たす。すると、式 (3.43) を、共形時間 (conformal time) 微分によって置き換えて、

$$\frac{d^2 v_k}{d\tau^2} \left( k^2 - \frac{1}{a} \frac{d^2 a}{d\tau^2} \right) v_k = 0. \quad (3.52)$$

共形時間とインフレーション中の膨張率の関係をを使うと、 $\tau \simeq -1/(aH)$  であり、これは、 $da/d\tau \simeq -a/\tau$  と等しく、二階微分は、 $(d^2 a/d\tau^2)/a \simeq 2/\tau^2$  と書き直せる。短波長極限 ( $k/aH \rightarrow \infty$ ) の時は、 $1/\tau \simeq -aH$  の項は無視することができる。そして、式 (3.51) を用いて漸近的な解を得ることができる。

$$v_k \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\tau}. \quad (3.53)$$

これは、インフレーション中の地平線の十分内側のモードの解であり、重力波の発展を計算するための初期条件として用いることができる。この解を  $h_k^\lambda$  として書くと、次のようになる。

$$|h_k^\lambda|^2 = \frac{16\pi G}{2ka^2} \quad (3.54)$$

## インフレーション後の振幅

インフレーションによって宇宙が指数関数的に膨張すると、重力波の各モードは地平線の外側を横切る ( $k < aH$ )。このとき、量子ゆらぎは古典的になると仮定する。式 (3.46) の第 2 項が第 3 項に比べて支配的になることを利用して、次の式が得られる。

$$\frac{h''_{\lambda,k}}{h'_{\lambda,k}} \approx -\frac{2a'}{a} \quad (3.55)$$

この解は次のようになる。

$$h_{\lambda,k}(\tau) = A + B \int^{\tau} \frac{d\tau'}{a^2(\tau')}, \quad (3.56)$$

ここで、 $A, B$  は積分定数である。崩壊モードである第 2 項を無視すると、地平線の外では  $h_{\lambda,k}$  は一定であることがわかる。そして、次の解を得ることができる。

$$h_k^{\lambda} \propto \text{const.} \quad (3.57)$$

インフレーションが終わった後、地平線内 ( $k > aH$ ) に再び入ってきたモードは振動を始める。 $h_k^{\lambda}$  は、WKB 解によって記述される。式 (3.46) に対して、解の形を次のように仮定する。

$$h_k^{\lambda}(\tau) = A(\tau) \exp[iB(\tau)]. \quad (3.58)$$

そして、振幅の時間変化に対して、振動が非常に早い場合を考えると、これは、 $dA/d\tau$  と  $d^2A/d\tau^2$  が  $dB/d\tau$  よりも十分小さいことを意味する。この解を、式 (3.46) に代入すると、実部と虚部の二つの方程式がそれぞれ出てくる。

$$\begin{aligned} \frac{d^2A}{d\tau^2} - A \left( \frac{dB}{d\tau} \right)^2 + \left[ \frac{2}{a} \frac{da}{d\tau} \right] \frac{dA}{d\tau} + k^2 A &= 0, \\ 2 \frac{dA}{d\tau} \frac{dB}{d\tau} + A \frac{d^2B}{d\tau^2} + \left[ \frac{2}{a} \frac{da}{d\tau} \right] A \frac{dB}{d\tau} &= 0. \end{aligned} \quad (3.59)$$

$d^2A/d\tau^2 \ll dB/d\tau$  と  $d^2A/d\tau^2 \ll dB/d\tau$  と考えているモードが十分に地平線の内部 ( $(da/d\tau)/a \ll k$ ) にあるとすると、 $B$  について、次の解を得る。

$$B(\tau) = \pm k\tau + \text{const.} \quad (3.60)$$

この解を 式 (3.46) に代入すると、 $A$  についての解が得られ、

$$A(\tau) \propto a^{-1} \quad (3.61)$$

したがって、次のような WKB 解を得ることができる。

$$h_k^{\lambda}(\tau) = \frac{C}{a} \exp(\pm ik\tau + \alpha), \quad (3.62)$$

$$\propto a^{-1} e^{\pm ik\tau} \quad (3.63)$$

ここまでの内容をまとめると、重力波の振幅  $h_k^{\lambda}$  は地平線の内外で振る舞いが変わり、以下のようになる。

$$h_k^{\lambda} \propto \text{const.} \quad (k < aH) \quad (3.64)$$

$$h_k^{\lambda} \propto a^{-1} e^{\pm ik\tau} \quad (k > aH) \quad (3.65)$$

### 3.3.3 重力波スペクトル

重力波のエネルギー密度  $\rho_{\text{GW}}$  と宇宙の臨界密度  $\rho_{\text{cr}}$  を用いて、重力波の強さを表す無次元量を定義する。

$$\Omega_{\text{GW}} \equiv \frac{1}{\rho_{\text{cr}}} \frac{d\rho_{\text{GW}}}{d \ln k} \quad (3.66)$$

ここで、臨界密度は、 $\rho_{\text{cr}} = 3H^2/8\pi G$  である。 $\rho_{\text{GW}}$  のフーリエ変換を用いた形は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \rho_{\text{GW}} &= \frac{1}{64\pi G a^2} \langle (\partial_\tau h_{ij})^2 + (\vec{\nabla} h_{ij})^2 \rangle \\ &= \frac{1}{32\pi G} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k^2}{a^2} 2 \sum_\lambda |h_{\mathbf{k}}^\lambda|^2 \end{aligned} \quad (3.67)$$

モードが地平線の内部にあることをここでは仮定しており、式 (3.65) のように振る舞うことから、モードの共形時間微分は、空間平均  $\langle \dots \rangle$  をとるときの空間微分と同じとみなすことができることを意味している。

原始テンソルパワースペクトル  $\mathcal{P}_{\text{T,prim}}(k)$  とテンソル伝達関数  $T_T(k)$  によって、テンソルパワースペクトル  $\mathcal{P}_T(k)$  を次のように定義する。

$$\mathcal{P}_T \equiv \frac{k^2}{\pi^2} \sum_\lambda |h_{\mathbf{k}}^\lambda|^2 = \mathcal{P}_{\text{T,prim}}(k) T_T^2(k). \quad (3.68)$$

よって重力波スペクトルは以下のように書くことができる。

$$\Omega_{\text{GW}} = \frac{1}{12} \left( \frac{k}{aH} \right)^2 \mathcal{P}_{\text{T,prim}}(k) T_T^2(k). \quad (3.69)$$

この式は、スペクトル形状を  $\mathcal{P}_{\text{T,prim}}(k)$  と  $T_T(k)$  の2つの部分に分割することで、スペクトルを評価するのに有用であるため、これまでの研究で用いられてきたものである。スペクトル形状は、インフレーション時にモードが地平線を離れたときと、インフレーション後にモードが地平線に戻ったときの両方で、宇宙膨張率の影響を受ける。 $\mathcal{P}_{\text{T,prim}}(k)$  はインフレーション終了時のスペクトルなので、前者の寄与のみが含まれているのに対し、 $T_T(k)$  はインフレーション終了後の各モードの時間発展を表しており、後者の寄与のみが含まれていることになる。

放射優勢期と物質優勢期の二つの場合についての、重力波スペクトル  $\Omega_{\text{GW}}$  の周波数依存性を見る。今、原始テンソルパワースペクトルの周波数依存性はないと仮定する ( $\mathcal{P}_{\text{T,prim}}(k) \propto k^0$ )。地平線の外側 ( $k < aH$ 、スーパーホライズンスケールとも言う) では、 $h_{\mathbf{k}}^\lambda$  は一定となる。これは、伝達関数は地平線を横切った時の  $h_{\mathbf{k}}^\lambda$  の振幅によって定義されることを意味する。つまり、

$$T_T(k^2) = \frac{|h_{\mathbf{k},0}^\lambda|^2}{|h_{\mathbf{k},\text{hc}}^\lambda|^2} \quad (3.70)$$

とする。ここで、“0” は現在の時間を意味し、“hc” は地平線を横切る (horizon-crossing) 時間を意味する。モードが地平線内部に再び入った後から、スケール因子に反比例して減少する。つまり、

$$|h_{\mathbf{k},0}^\lambda| = |h_{\mathbf{k},\text{hc}}^\lambda| \left( \frac{a_{\text{hc}}}{a_0} \right) \quad (3.71)$$

よって、伝達関数は、

$$T_T^2 = \frac{a_{\text{hc}}^2}{a_0^2} \quad (3.72)$$

となる。したがって、現在の重力波のエネルギースペクトルは、以下ようになる。

$$\Omega_{\text{GW},0} = \frac{k^2}{12a_0^2 H_0^2} \mathcal{P}_{\text{T,prim}} \frac{a_{\text{hc}}^2}{a_0^2}. \quad (3.73)$$

$k = a_{\text{hc}} H_{\text{hc}}$  の関係を使うと、 $\Omega_{\text{GW},0}$  の  $h_{\text{hc}}$  の値は、 $k$  によって書くことができる。宇宙が放射優勢の場合、ハッブルパラメータは、 $H \propto a^{-2}$  のように振る舞い、これは、 $a_{\text{hc}} \propto k^{-1}$  を意味するとになる。よって、 $\Omega_{\text{GW},0}$  は、

$$\Omega_{\text{GW},0} \propto k^0 \quad (3.74)$$

となる。同様に、宇宙が物質優勢の場合は、ハッブルパラメータが  $H \propto a^{-3/2}$  のように振る舞い、 $a_{\text{hc}} \propto k^{-2}$  となり、

$$\Omega_{\text{GW},0} \propto k^{-2} \quad (3.75)$$

となる。また、現在の周波数  $f$  は  $k = 2\pi f a_0$  ( $a_0 = 1$ ) の関係式を満たしており、 $k$  の依存性はそのまま  $f$  の依存性に対応している。

ここで、放射優勢期 (RD era : Radiation dominant era) , 物質優勢期 (MD era : Matter dominant era), 真空エネルギー優勢期 (VD era : Vacuum dominant era) の振る舞いをまとめると以下のようになる。

$$\rho \propto \begin{cases} a^{-4} & \text{RD } (p = \frac{1}{3}\rho) \\ a^{-3} & \text{MD } (p = 0) \\ \text{const.} & \text{VD } (p = -\rho) \end{cases}, \quad H \propto \begin{cases} a^{-2} & \text{(RD)} \\ a^{-\frac{3}{2}} & \text{(MD)} \\ \text{const.} & \text{(VD)} \end{cases} \quad (3.76)$$

$$k = aH \propto \begin{cases} a^{-1} & \text{(RD)} \\ a^{-\frac{1}{2}} & \text{(MD)} \\ a^1 & \text{(VD)} \end{cases} \leftrightarrow a \propto \begin{cases} k^{-1} & \text{(RD)} \\ k^{-2} & \text{(MD)} \\ k^1 & \text{(VD)} \end{cases} \quad (3.77)$$

$$T_T^2 \propto \begin{cases} k^{-2} & \text{(RD)} \\ k^{-4} & \text{(MD)} \\ k^2 & \text{(VD)} \end{cases}, \quad \Omega_{\text{GW}} \propto \begin{cases} k^0 & \text{(RD)} \\ k^{-2} & \text{(MD)} \\ k^4 & \text{(VD)} \end{cases} \quad (3.78)$$

1

---

<sup>1</sup> また、これは状態方程式  $p = w\rho$  を使うとシンプルにも書ける。

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}, \quad H \propto a^{-\frac{3}{2}(1+w)} \quad (3.79)$$

$$k \propto a^{-\frac{1+3w}{2}} \leftrightarrow a \propto k^{-\frac{2}{1+3w}} \quad (3.80)$$

$$T_T^2 \propto k^{-\frac{4}{1+3w}}, \quad \Omega_{\text{GW}}(t_0, k) \propto k^{\frac{2(3w-1)}{3w+1}} \quad (3.81)$$

### 3.4 重力波観測実験

ここでは、重力波観測実験について簡単にレビューする。<sup>2</sup>

重力波を検知するには、単独の自由質点に対する重力波の影響は感知できないため、重力波の波長に比べて微小な距離隔てられた2点間の重力の差(潮汐力)を測定する必要がある。2つの自由質点間の距離は、重力波の振幅と2点間の距離の積に比例して変化する。よって、有限の距離に対して、重力波が与える影響を検出することで重力波を検出する。しかし、重力波振幅は微小であるために、変化量は非常に小さく、極めて高精度な測定を行う必要がある。例えば、2点間の距離が  $1\text{ km} = 10^5\text{ cm}$  だとすると、重力波の振幅が  $10^{-21}$  の場合、その変化量は、 $10^{-16}\text{ cm}$  である。

重力波の効果を調べるためには、空間的な距離の変化よりも光の伝播時間の変化を調べる方が便利である。主に、レーザー干渉計を用いる方法とパルサータイミングアレイを用いる方法がある。

レーザー干渉計とは、反射鏡を用いながら異なる2方向に光を往復させた後に、2方向から戻ってきた光を干渉させる。重力波の影響で光の伝播距離が変化することを利用し、伝播距離が非対称に時間変化すると干渉光の強度が変動するので、この変動を測定することで重力波の検出を行う。実用的な重力波検出器で現在稼働中なものは全て地上レーザー干渉計になる。例えば、図 3.2 で示す LIGO [56] と Virgo [57]、さらに、図 3.3 で示す KAGRA [58] がこれにあたる。



図 3.2: 左から、The LIGO (Livingston Observatory)、LIGO (Hanford Observatory)、Virgo の写真。 <https://www.ligo.org/news/blind-injection.php> より引用。

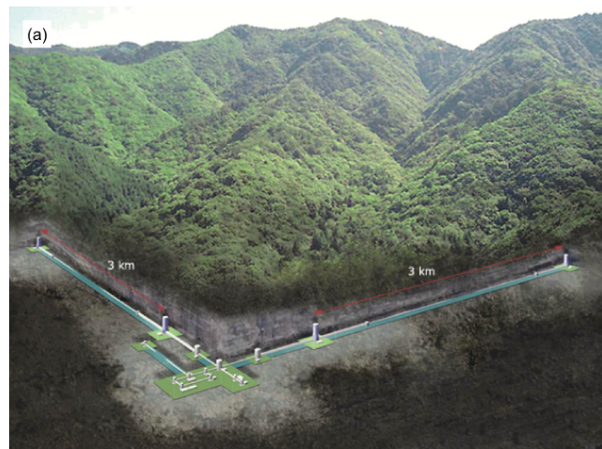


図 3.3: KAGRA : [58] より引用。

<sup>2</sup>詳細を知りたい場合は、Yukawa ライブラリー「重力波の源」柴田大 久徳浩太郎、Michele Maggiore 「Gravitational Waves」などを参照していただきたい。



将来の重力波検出器として、宇宙にレーザー干渉計を打ち上げるレーザー干渉計である、LISA [59]、BBO [60]、DECIGO [61] が計画されている。

パルサータイミングアレイでは、パルサーからの規則正しい時間間隔で到来するはずの電波パルスが、重力波によって乱されることを利用して重力波検出を行う。現在測定を行なっている NANOGrav 実験 [62] や図 3.4 で示すような将来の SKA 実験 [63] がこれにあたる。



図 3.4: SKA は、3 大陸で 2 つの望遠鏡を運用する 1 つの天文台となる（左から時計回りに、オーストラリアの SKA-Low、イギリスの SKA グローバル本部、南アフリカの SKA-Mid の写真）。<https://www.skatelescope.org/towards-ska-observatory/> より引用。

## 第4章 ニュートリノ質量と背景重力波

本章では、本博士論分の主要な結果であるニュートリノ質量を背景重力波によって検証する方法を解説する。最も軽いニュートリノ質量に伴う右巻きニュートリノを考えると、最も軽いニュートリノ質量の値が小さい場合には、 $N_S$  の結合定数は非常に小さくなるため、長寿命になる。このような長寿命粒子が初期宇宙に存在する場合、宇宙のエネルギー密度の大部分を担うことができ、宇宙膨張則に影響を与えるとともに、崩壊によって付加的なエントロピーを生成することがある。重力波スペクトルには、宇宙膨張則の影響が刻まれるために、変更された宇宙膨張の影響がそのまま重力波スペクトルに現れることになる。

まず始めに、エントロピー生成についてとそれに伴う重力波スペクトルについてレビューし、その後、研究結果について解説する。

### 4.1 エントロピー生成

ここでは、主に、[64] を参考に初期宇宙でのエントロピー生成とエントロピー生成を引き起こす長寿命粒子に対するビッグバン元素合成 (Big Bang Nucleosynthesis, BBN) からの制限について、解説する。

長寿命粒子を  $N$  として、以降議論を進めていく。非相対論的な粒子が、脱結合後、崩壊前に十分な量存つまり、 $T \gg Y_{\text{eq}} = n_{\text{eq}}/s$  ( $n_{\text{eq}}$  は平衡下の数密度、 $s$  はエントロピー密度) となる場合、かなりのエントロピーを生成することができる。脱結合し、崩壊前の量を  $Y_N = n_N/s$  と定義する。ここで、 $n_N$  は  $N$  の数密度であり、 $s$  はエントロピー密度である。 $N$  が非相対論的になるとすると、エネルギー密度は  $a^{-3}$  に比例する。放射のエネルギー密度は、 $a^{-4}$  に比例するために、 $N$  が十分長い寿命を持つと、宇宙のエネルギー密度の大きな割合を担ってから崩壊することになる。この場合、十分なエントロピーを生成することができる。

以下、エントロピー生成の簡単な見積もりを行う。崩壊が全て  $t \sim \tau_N$  ( $\tau_N$  は  $N$  の寿命) の時に起きるとする。また、 $N$  のエネルギー密度  $\rho_N$  は、この時に、放射のエネルギー密度  $\rho_R$  に比べて十分大きいとする。

$N$  が、 $t \sim H^{-1} \sim \tau_N$  で崩壊し、その時の宇宙の温度は  $T = T_R$  であり、宇宙全体のエネルギー密度は、 $\rho_{\text{tot}} \sim \rho_N = sY_N M_N$  である。 $N$  の崩壊の直前には、 $T_R$  と  $\tau_N$  は次のように関連している。

$$H^2(T_R) \equiv H^2(T_R) \sim G\rho \sim Y_N T_R^3 M_N / m_P^2 \sim \tau_N^{-2} \quad (4.1)$$

$N$  が (宇宙膨張の時間スケールに比べて) 即時に相対論的粒子に崩壊するとすると、即時に宇宙を再加熱することになる。すると、 $N$  の崩壊後、放射エネルギー密度は、

$$\rho_R \sim g_* T_R^4 \quad (4.2)$$

これは、エネルギー保存則より、崩壊直前のエネルギー密度に等しい必要があるので、 $N$  の崩壊前後

のエントロピーの比は、以下ようになる。

$$\frac{S_{\text{after}}}{S_{\text{before}}} \equiv \frac{g_{*s}(T_R)a^3T_R^3}{g_{*s}(T_D)a^3T_D^3} \sim g_*^{\frac{1}{4}} \frac{Y_i M_N \tau_N^{\frac{1}{2}}}{m_{pl}^{\frac{1}{2}}} \quad (4.3)$$

加えて、宇宙は  $N$  の崩壊によって再加熱される。

$$\frac{T_{\text{after}}}{T_{\text{before}}} = \frac{T_R}{T_D} = \left( \frac{S_{\text{after}}}{S_{\text{before}}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.4)$$

ここから、問題を注意深く取り扱っていく。まず、 $N$  のエネルギー密度について考察する。 $N$  の崩壊により、共動座標内の  $N$  の数 ( $\equiv a^{3n_N}$ ) は通常の指数関数則に従って減少するので、

$$\begin{aligned} \frac{d(a^3 n_N)}{dt} &= -\tau_N^{-1} (a^3 n_N) \\ \dot{n}_N + 3H n_N &= -\tau_N^{-1} n_N. \end{aligned} \quad (4.5)$$

$N$  は非相対論的であり、そのエネルギー密度は  $\rho_N = M_N n_N$  で与えられ、上式はエネルギー密度で置き換えることができる。

$$\dot{\rho}_N + 3H \rho_N = -\tau_N^{-1} \rho_N \quad (4.6)$$

この方程式の解は、以下ようになる。

$$\rho_N(a) = \rho_N(a_i) \left( \frac{a}{a_i} \right)^{-3} \exp\left(-\frac{t}{\tau_N}\right) \quad (4.7)$$

$N$  の崩壊によるエネルギーの解放が宇宙膨張の時間スケールより小さいとすると、そのエネルギーは相対論的な粒子に変換され、宇宙の温度は温められることになる。この場合、宇宙のエネルギー密度は、 $N$  のエネルギー密度と放射のエネルギー密度  $\rho_R$  で構成されることになる。共動体積中の熱力学第二法則より、

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{-d(a^3 \rho_N)}{T} = \frac{a^3 \rho_N}{T} \frac{dt}{\tau_N}, \quad (4.8)$$

ここで、 $S = \frac{2\pi^2}{45} g_{*s} T^3 a^3$  より、

$$S^{\frac{1}{3}} \dot{S} = \left( \frac{2\pi^2}{45} g_{*s} \right)^{\frac{1}{3}} a^4 \frac{\rho_N}{\tau_N} \quad (4.9)$$

この微分方程式の解は、以下ようになる。

$$S^{\frac{4}{3}} = S_i^{\frac{4}{3}} + \frac{4}{3} \rho_N(a_i) a_i^4 \tau_N^{-1} \int_{t_i}^t \left( \frac{2\pi^2}{45} g_{*s} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{a(t')}{a_i} \exp\left(-\frac{t'}{\tau_N}\right) dt' \quad (4.10)$$

$g_*$  が一定の極限では、熱力学第一法則が単純な理解を与え、放射のエネルギー密度の発展方程式として与えられる。

$$\begin{aligned} d(a^3 \rho_R) &= -p_R d(a^3) - d(a^3 \rho_N) = -\frac{\rho_R}{3} d(a^3) + (a^3 \rho_N) \tau_N^{-1} dt \\ \dot{\rho}_R + 4H \rho_R &= \tau_N^{-1} \rho_N \end{aligned} \quad (4.11)$$

この方程式は、式 (4.9) の  $g_*$  が一定の場合と一致する。

フリードマン方程式より、

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{3M_P^2}(\rho_N + \rho_R) \quad (4.12)$$

放射のエネルギー密度は、共動体積あたりのエントロピーと関連づけられ

$$\rho_R = \frac{3}{4} \left( \frac{2\pi^2}{45} g_{*s} \right)^{\frac{1}{3}} S^{\frac{4}{3}} a^{-4}, \quad (4.13)$$

となる。

$N$  の崩壊前のエントロピー  $S_i$  と  $N$  の崩壊後のエントロピー  $S_f$  の比をとることで、どのくらいのエントロピーが生成されたかを表す。これをエントロピー生成比と呼ぶ。解析的にエントロピー生成比を求めると以下ようになる。

$$\begin{aligned} \Delta S \equiv \frac{S_f}{S_i} &= \left[ 1 + \frac{4}{3} \left( \frac{45}{2\pi^2 g_{*s}(T_i)} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{M_N Y_i}{T_i} I \right]^{\frac{3}{4}}, \\ I &= \tau_N^{-1} \int_0^\infty \left( \frac{45}{2\pi^2 g_{*s}(T_i)} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{a(t)}{a_i} \exp\left(-\frac{t}{\tau_N}\right) dt. \end{aligned} \quad (4.14)$$

ここで、 $I$  は以下のように与えられる。

$$I = 1.09 \left( \frac{8\pi\rho_N}{3m_P^2} \right)^{\frac{1}{3}} \tau_N^{\frac{2}{3}} \left( \frac{2\pi^2}{45} \right)^{\frac{1}{3}} \langle g_{*s}^{\frac{1}{3}} \rangle \quad (4.15)$$

ここで、積分を実行すると、 $I$  は、以下のように与えられる。

$$\frac{S_f}{S_i} \simeq 1.83 \langle g_{*s}^{\frac{1}{3}} \rangle^{\frac{3}{4}} \frac{M_N Y_i \tau_N^{\frac{1}{2}}}{m_P^{\frac{1}{2}}} \quad (4.16)$$

式 (4.6)、式 (4.9)、式 (4.12) を解くことで、エントロピー生成比を求めることができ、図 4.1 のように与えられる。ここで、エントロピー生成を引き起こす長寿命粒子のエネルギー密度は  $\rho_X$  として、この時の質量は  $M = 10^6 \text{ GeV}$ 、崩壊幅は、 $\Gamma = 10^{-15} \text{ GeV}$  とした。初期残存量は熱平衡の値をとり、宇宙の温度が  $T = M$  の時からの発展を追った。放射（相対論的な粒子）のエネルギー密度  $\rho_R$  のスケール因子に対する依存性は  $\rho_R \propto a^{-4}$  であり、長寿命粒子は非相対論的な粒子として振る舞うので、 $\rho_X \propto a^{-3}$  となる。そのため、十分に長い寿命を持つ場合、 $\rho_X$  は宇宙のエネルギー密度の大部分を担うことになる。その後、粒子は標準模型粒子に崩壊し、エントロピーが生成される。

$N$  が長寿命すぎる場合、ビックバン元素合成 (BBN) に影響を与え、現在の宇宙を構成するための軽元素比と矛盾してしまうために、 $N$  の寿命に対して制限が与えられる。この制限は、以下の関係式を満たす温度  $T_R$  でよく与えられ、この温度は再加熱温度と呼ばれる。

$$\Gamma_N = 3H(T_R), \quad (4.17)$$

ここで、 $\Gamma_N$  は  $N$  の崩壊幅であり、 $H(T_R) = \sqrt{\frac{\pi^2}{3M_P^2} g_*(T_R) T_R^4}$  は宇宙の温度が  $T_R$  の時のハッブルパラメータである。BBN がうまくいくためには、おおよそ、 $T_R \gtrsim 1 \text{ MeV}$  である必要があり、最新の解析結果 [65] では、長寿命粒子が 100 パーセント、ハドロンに崩壊する場合に、

$$T_R > 4 - 5 \text{ MeV} \quad (4.18)$$

という制限を与えている。

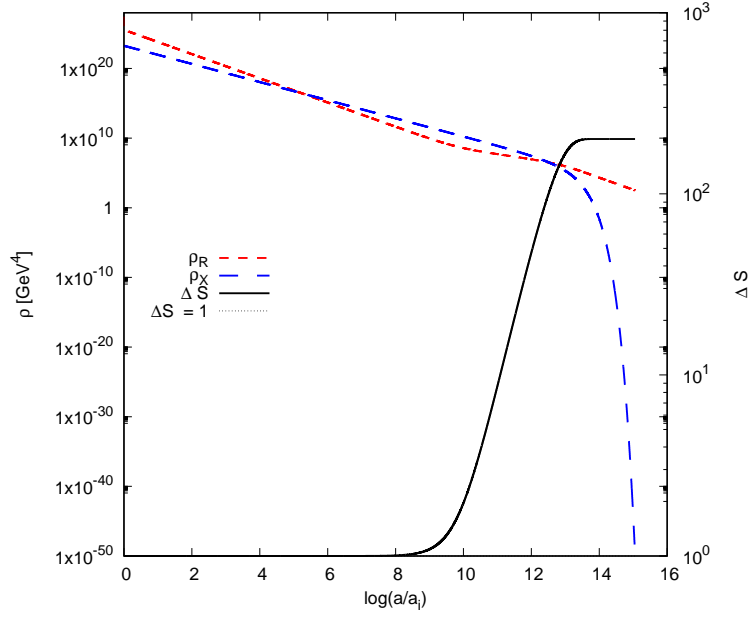


図 4.1: 左縦軸はエネルギー密度の発展、右縦軸はエントロピー生成比  $\Delta S$  を表す。横軸はスケール因子  $\log(a/a_i)$  を表す。

## 4.2 重力波スペクトル

エントロピー生成が与えるインフレーション起源重力波への影響はこれまで研究されてきており [66–77]、ここでは、主に、[73] で示されるフィッティング関数を使って、 $N_S$  によるエントロピー生成が起きた場合での重力波スペクトルを求める。

現在の重力波スペクトルは以下で表される。

$$\Omega_{\text{GW}}(k) = \frac{1}{12} \left( \frac{k}{a_0 H_0} \right)^2 T_T^2(k) \mathcal{P}_T^{\text{prim}}(k), \quad (4.19)$$

$a_0 = 1$  は現在のスケール因子、 $H_0 = 100 h \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  ( $h = 0.674$  [21]) は現在のハッブルパラメータ、 $k = 2\pi f a_0$  は波数、 $f$  は現在の周波数、 $T_T^2(k)$  は伝達関数 (Transfer Function)、 $\mathcal{P}_T^{\text{prim}}(k)$  は原始テンソルパワースペクトルである。 $\mathcal{P}_T^{\text{prim}}(k)$  は以下のように与えられるものとする。

$$\mathcal{P}_T^{\text{prim}}(k) = r \mathcal{P}_S^{\text{prim}}(k_*) \left( \frac{k}{k_*} \right)^{n_T} \quad (4.20)$$

ここで、 $k_*$  は基準スケール、 $\mathcal{P}_S^{\text{prim}}(k_*)$  は原始スカラーパワースペクトル、 $r$  はテンソル-スカラー比であり、以下のように与えられる ( $r$  については、制限が与えられている) [78]。

$$k_* = 0.05 \text{ Mpc}^{-1} \quad (4.21)$$

$$\mathcal{P}_S^{\text{prim}}(k_*) = 2.0989 \times 10^{-9} \quad (4.22)$$

$$r < 0.063 \quad (4.23)$$

以下、伝達関数  $T_T^2(k)$  は参考文献 [73] で示される結果を用いることにする。まず、右巻きニュートリノ  $N_S$  の崩壊によるエントロピー生成を伴わない場合の伝達関数は以下のように与えられる。

$$T_T^2(k) = \Omega_m^2 \left( \frac{g_*(T_{\text{in}})}{g_{*0}} \right) \left( \frac{g_{*s0}}{g_{*s}(T_{\text{in}})} \right)^{\frac{4}{3}} \left( \frac{3j_1(k\tau_0)}{k\tau_0} \right)^2 T_1^2(x_{\text{eq}}) T_2^2(x_{RI}) \quad (4.24)$$

$\Omega_m = 0.315$  は物質パラメータ、 $j_1(x)$  は球ベッセル関数である<sup>1</sup>。  $T_1^2(x_{\text{eq}})$ 、 $T_2^2(x_R)$  は、以下のように与えられる。

$$T_1^2 = 1 + 1.57x + 3.42x^2, \quad (4.25)$$

$$T_2^2 = (1 - 0.22x^{1.5} + 0.65x^2)^{-1}. \quad (4.26)$$

$x$  については  $x_A \equiv k/k_A$  のように基準となる波数に規格化された波数として定義され、物質放射時に対応する波数  $k_{\text{eq}}$  とインフレーション後の再加熱時に対応する波数  $k_{RI}$  はそれぞれ以下のように与えられる。

$$k_{\text{eq}} = 7.1 \times 10^{-2} \Omega_m h^2 \text{ Mpc}^{-1}, \quad (4.27)$$

$$k_{RI} = 1.7 \times 10^{14} \left( \frac{g_{*s}(T_{RI})}{106.75} \right)^{\frac{1}{6}} \left( \frac{T_{RI}}{10^7 \text{ GeV}} \right) \text{ Mpc}^{-1} \quad (4.28)$$

ここで、 $T_{RI}$  はインフレーション後の再加熱温度を表す。また、有効自由度についても [73] で与えられているフィッティング関数を用いることにする。

$$g_*(T_{\text{in}}(k)) = g_{*0} \left\{ \frac{A + \tanh \left[ -2.5 \log_{10} \left( \frac{k/2\pi}{2.5 \times 10^{-12} \text{ Hz}} \right) \right]}{A + 1} \right\} \left\{ \frac{B + \tanh \left[ -2.0 \log_{10} \left( \frac{k/2\pi}{6.0 \times 10^{-9} \text{ Hz}} \right) \right]}{B + 1} \right\} \quad (4.29)$$

ここに現れる係数  $A$  と  $B$  は、

$$A = \frac{-1 - \frac{10.75}{g_{*0}}}{-1 + \frac{10.75}{g_{*0}}}, \quad (4.30)$$

$$B = \frac{-1 - \frac{g_{\text{max}}}{10.75}}{-1 + \frac{g_{\text{max}}}{10.75}}, \quad (4.31)$$

であり、 $g$  は素粒子標準模型を仮定して  $g_{\text{max}} = 106.75$  とする。 $g_{*s}(T_{\text{in}})$  に置き換える場合には、 $g_{*0} = 3.36$  を  $g_{*s0} = 3.91$  に置き換えれば良い。

これらを用いて、インフレーション後のエントロピー生成のみを考慮した標準宇宙論の場合の重力波スペクトルが得られる。例えば、 $n_T = 0$ ,  $k_* = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ ,  $r = 0.06$  とした場合には、図 4.2 のように与えられる。

エントロピー生成を伴う場合の伝達関数は以下のように修正される。

$$T_T^2(k) = \Omega_m^2 \left( \frac{g_*(T_{\text{in}})}{g_{*0}} \right) \left( \frac{g_{*s0}}{g_{*s}(T_{\text{in}})} \right)^{\frac{4}{3}} \left( \frac{3j_1(k\tau_0)}{k\tau_0} \right)^2 T_1^2(x_{\text{eq}}) T_2^2(x_R) T_3^2(x'_R) T_2^2(x''_R) \quad (4.32)$$

伝達関数  $T_3^2$  は以下のように与えられる。

$$T_3^2 = 1 + 0.59x + 0.65x^2 \quad (4.33)$$

また、基準となる波数はそれぞれ以下のように与えられる。

$$k_R = 1.7 \times 10^{14} \left( \frac{g_{*s}(T_R)}{106.75} \right)^{\frac{1}{6}} \left( \frac{T_R}{10^7 \text{ GeV}} \right) \quad (4.34)$$

$$k'_R = k_R \Delta S^{\frac{2}{3}} \quad (4.35)$$

$$k''_R = k_R \Delta S^{-\frac{1}{3}} \quad (4.36)$$

例えば、 $T_R = 10 \text{ MeV}$ ,  $\Delta S = 100$  のエントロピー生成が起きる場合には、図 4.3 のようなスペクトルが予言される。

<sup>1</sup>  $k\tau_0 \rightarrow 0$  の極限で、 $j_1(k\tau_0) = 1/(\sqrt{2}k\tau_0)$  で与えられる。

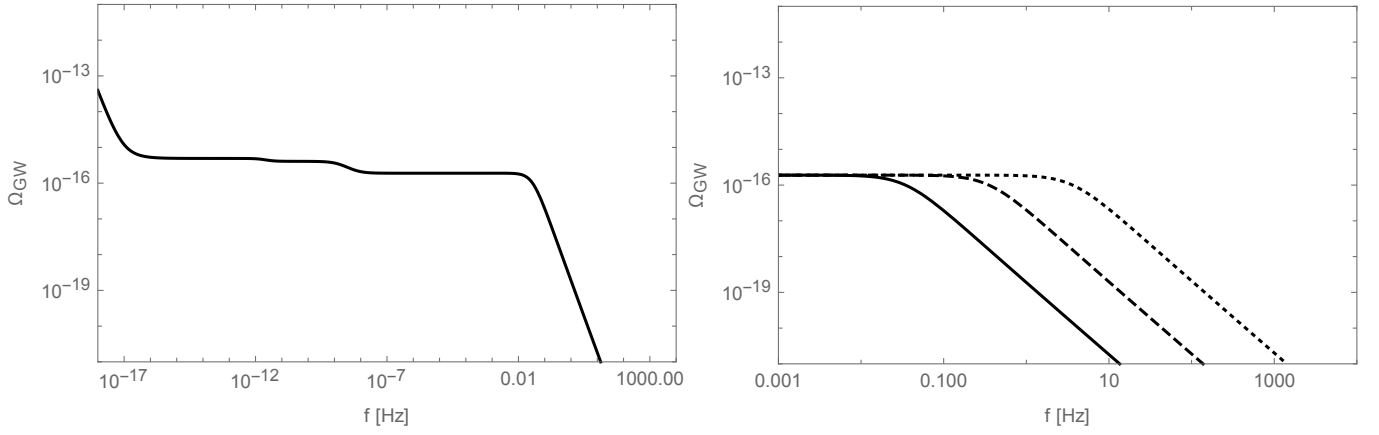


図 4.2: 重力波スペクトルの例。  $n_T = 0$ ,  $k_* = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ ,  $r = 0.06$  とした。左図は、 $T_{RI} = 10^6 \text{ GeV}$  の時のスペクトルを表す。右図は、 $T_{RI} = 10^6 \text{ GeV}$  (黒の実線)、 $T_{RI} = 10^7 \text{ GeV}$  (黒の破線)、 $T_{RI} = 10^8 \text{ GeV}$  (黒の点線) を表す。

### 4.3 シーソー機構とエントロピー生成

素粒子標準模型に3つの右巻きニュートリノ  $\nu_{RI}$  ( $I = 1, 2, 3$ ) を加えたモデルを考える。ラグランジアンは以下のように与えられる。

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{SM}} + i\bar{\nu}_{RI}\gamma^\mu\partial_\mu\nu_{RI} - \left( F_{\alpha I}\bar{L}_\alpha H\nu_{RI} + \frac{M_I}{2}\bar{\nu}_{RI}^c\nu_{RI} + h.c. \right), \quad (4.37)$$

ここで、ヒッグス場と左巻きレプトン場の二重項をそれぞれ  $H$  and  $L_\alpha$  ( $\alpha = e, \mu, \tau$ ) のように表す。また、 $F$  は湯川結合行列であり、 $M_I$  は右巻きニュートリノの質量行列である。湯川結合行列は、カサス-イバラ パラメタリゼーション (Cassas-Ibarra parameterization) を用いて、以下のように表される [79]。

$$F = \frac{i}{\langle H \rangle} U D_\nu^{1/2} \Omega D_N^{1/2}, \quad (4.38)$$

ここで、 $U$  は PMNS 行列、 $D_\nu = \text{diag}(m_1, m_2, m_3)$  は対角化された左巻きニュートリノ質量行列、 $D_N = \text{diag}(M_1, M_2, M_3)$  は右巻きニュートリノ質量行列、そして、 $\Omega$  は  $3 \times 3$  複素直行行列である ( $\Omega\Omega^T = 1$ )。

この解析において、最も軽い右巻きニュートリノを  $m_0$  と表し、他の質量よりも十分軽いとする。

$$m_3 > m_2 \gg m_1 = m_0 \quad \text{順階層の場合}, \quad (4.39)$$

$$m_2 > m_1 \gg m_3 = m_0 \quad \text{逆階層の場合}. \quad (4.40)$$

加えて、右巻きニュートリノの一つを  $N_S$  ( $I = S$ ) とし、 $N_S$  は非常に抑制された湯川結合を持つとする。 $N_S$  の質量は  $M_S$  と表す。さらに、複素直行行列  $\Omega$  について、 $\Omega_{1S} \simeq 1$  and  $\Omega_{iS} \simeq 0$  ( $i = 2, 3$ ) (順階層の場合)、 $\Omega_{3S} \simeq 1$  and  $\Omega_{iS} \simeq 0$  ( $i = 1, 2$ ) (逆階層の場合) とする。この場合、湯川結合定数を以下のように得ることができる。

$$F_S^2 \equiv (F^\dagger F)_{SS} \simeq \frac{M_S m_0}{\langle H \rangle^2}, \quad (4.41)$$

つまり、 $N_S$  の湯川相互作用は非常に小さい  $m_0$  の値と共に、抑制される事になる。



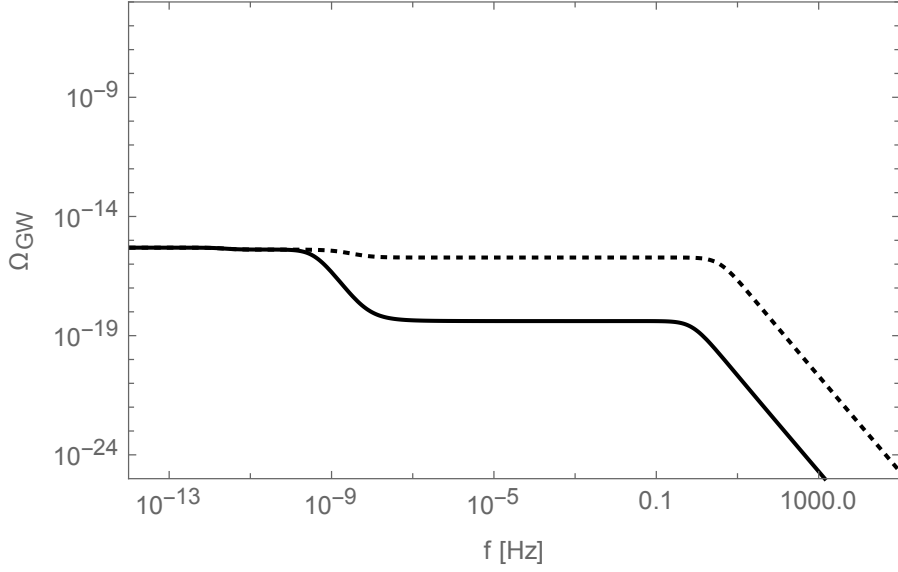


図 4.3: 重力波スペクトルの例。  $n_T = 0$ 、 $k_* = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ 、 $r = 0.06$ 、 $T_{RI} = 10^8 \text{ GeV}$  とした。黒の破線は標準宇宙論の場合のスペクトルである。黒の実線は、 $T_R = 10 \text{ MeV}$ 、 $\Delta S = 100$  の場合のスペクトルを表す。

$N_S$  の質量  $M_S$  がヒッグスボソン質量よりも十分大きい場合、 $N_S$  は主にヒッグスとレプトンのペアに二体崩壊し、寿命は以下のように見積もることができる。

$$\tau_{N_S} = \frac{8\pi}{F_S^2 M_S} \simeq \frac{8\pi \langle H \rangle^2}{m_0 M_S^2} \quad (4.42)$$

$$\simeq 5.0 \times 10^{-7} \text{ sec} \left( \frac{10^{-9} \text{ eV}}{m_0} \right) \left( \frac{1 \text{ TeV}}{M_S} \right)^2. \quad (4.43)$$

$N_S$  の質量と湯川結合定数が小さい場合、寿命は非常に長くなる。このような場合、宇宙のエネルギー密度の大部分を担うことがあり、その時に、 $N_S$  の崩壊により付加的なエントロピーが生成される。

長寿命粒子の崩壊によりエントロピー生成が起きるためには、その長寿命粒子が脱結合し非相対論的に振る舞うことで、宇宙のエネルギー密度の割合を十分に占める必要がある。脱結合の条件は粒子の反応率  $\Gamma$  とハッブルパラメータ  $H$  の関係により求められ、 $\Gamma/H < 1$  となる場合、この反応は脱結合する。右巻きニュートリノの反応率は  $\Gamma \sim F^2 T$  であり、ハッブルパラメータを  $H \sim T^2/M_P$  とすると、脱結合の条件より、

$$F_S^2 \lesssim \frac{M_S}{M_P}, \quad (4.44)$$

となる。ここで、この時の温度を右巻きニュートリノの質量とした ( $T \sim M_S$ )。ここで、 $M_P$  はプランク質量 (reduced Planck mass) である。この条件式は、極めて小さい  $m_0$  に対応する ( $m_0 < \mathcal{O}(10^{-5}) \text{ eV}$ )。

$N_S$  の崩壊による再加熱温度は、 $N_S$  の崩壊幅  $\Gamma_{N_S}$  ( $\Gamma_{N_S} = 1/\tau_{N_S}$ ) を用いて、以下のように得られる。<sup>2</sup>

<sup>2</sup>

$$\Gamma = 3H(T_R), \quad H(T_R) = \sqrt{\frac{\pi^2}{90M_P^2} g_*(T_R) T_R^4} \quad (4.45)$$



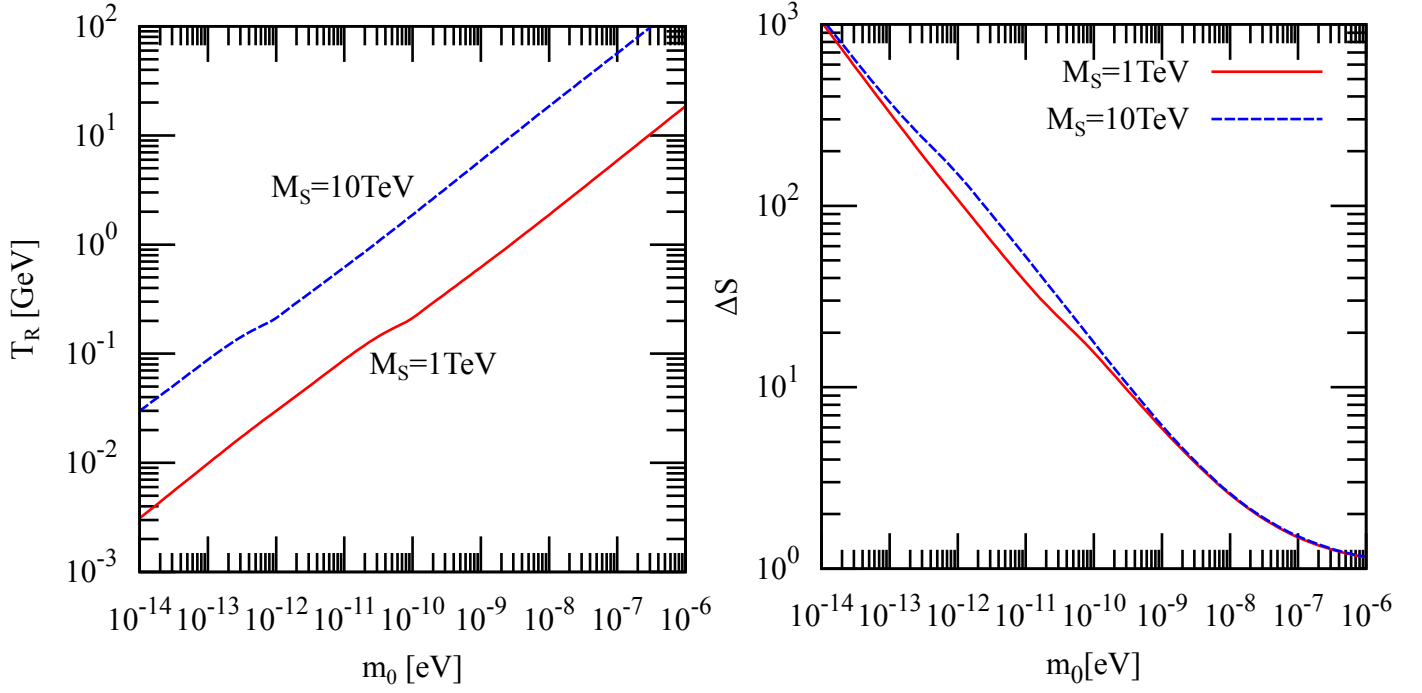


図 4.4: 右巻きニュートリノ  $N_S$  の崩壊による再加熱温度  $T_R$  (左図) とエントロピー生成比  $\Delta S$  (右図)。横軸は最も軽い左巻きニュートリノの質量  $m_0$  [eV]。

$$T_R = \left( \frac{10}{\pi^2 g_*(T_R)} \right)^{\frac{1}{4}} (M_P \Gamma_{N_S})^{\frac{1}{2}} \quad (4.46)$$

$$\sim 1 \text{ GeV} \left( \frac{m_0}{10^{-10} \text{ eV}} \right)^{1/2} \left( \frac{M_S}{1 \text{ TeV}} \right). \quad (4.47)$$

再加熱温度は、ビッグバン元素合成により制限されており、現在観測されている軽元素量を実現するためには、 $T_R \gtrsim \mathcal{O}(1) \text{ MeV}$  である必要がある。最近の解析結果 [65] によると、 $T_R \geq 4 - 5 \text{ MeV}$  という結果が与えられている。

エントロピー生成比  $\Delta S$  は、インフレーション後の粒子生成が終わった直後のエントロピー  $S(T_{RI})$  と  $N_S$  の崩壊が終了した後のエントロピー  $S(T_R)$  の比として定義する。標準模型の場合はエントロピーは保存するため、 $\Delta S = 1$  となる。同様に、右巻きニュートリノ  $N_S$  によるエントロピー生成が起きない場合も  $\Delta S = 1$  となる。

$$\Delta S \equiv \frac{S(T_R)}{S(T_{RI})} = \frac{s(T_R) a^3(T_R)}{s(T_{RI}) a^3(T_{RI})} \quad (4.48)$$

$$\sim 10 \left( \frac{10^{-10} \text{ eV}}{m_0} \right)^{1/2}, \quad (4.49)$$

図 4.4 が右巻きニュートリノ  $N_S$  の質量  $M_S$  が 1 TeV と 10 TeV の場合の、再加熱温度  $T_R$  とエントロピー生成比  $\Delta S$  の結果である。ここで、右巻きニュートリノ  $N_S$  の初期残存量は熱平衡の値をとり、宇宙の温度が  $T = M_S$  であることを初期条件とした。以降の解析は全て同様の初期条件を取った。 $T_R$  は、式 (4.46) より数値的に求め、 $\Delta S$  は以下の微分方程式を数値的に解くことにより求めた (導出

は、前小章を参照。 )。

$$\frac{\rho_{N_S}}{dt} = -3H\rho_{N_S} - \Gamma_{N_S}\rho_{N_S} \quad (4.50)$$

$$S^{\frac{1}{3}} \frac{dS}{dt} = \left( \frac{2\pi^2}{45} g_{*s} \right)^{\frac{1}{3}} a^4 \rho_{N_S} \Gamma_{N_S} \quad (4.51)$$

ここで、 $t$  は時間、 $a$  はスケール因子、 $H = \sqrt{\frac{1}{3M_P^2}(\rho_R + \rho_{N_S})}$  はハッブルパラメータ、 $\rho_R$  は標準模型の相対論的粒子のエネルギー密度、そして、 $\rho_{N_S}$  は右巻きニュートリノ  $N_S$  のエネルギー密度である。この見積もりにおいて、 $N_S$  は、インフレーション後の粒子生成によりできたとするが、 $N_S$  の生成機構については特定しない。 $N_S$  が脱結合した直後の残存量に関しては、熱平衡を仮定した。

図. 4.4 に示されているように、最も軽い左巻きニュートリノ質量  $m_0$  の値が、 $m_0 \lesssim \mathcal{O}(10^{-7})$  eV の場合に  $\Delta S \gtrsim 1$  となり、 $N_S$  の崩壊によって付加的なエントロピーが生成されていることがわかる。

#### 4.4 ニュートリノ質量と背景重力波

以下、 $N_S$  の崩壊によるエントロピー生成が、重力波スペクトルにどのように現れるかを示す。

まず初めに、どの周波数域にエントロピー生成の影響が現れるかを示す。付加的なエントロピー生成が起きる場合、新たな物質優位の時代が初期宇宙に現れることにより、標準宇宙論で予言される重力波スペクトルに比べてスペクトルが減衰することになる。重力波はホライズンに入ってから宇宙膨張の影響を受けるため、長寿命粒子の崩壊が終了する以前にホライズン内に入ったモードの重力波のみが、新たな減衰の影響を受けることになる。つまり、長寿命粒子の崩壊が終了した時に対応する臨界周波数を  $f_R$  とすると、 $f > f_R$  の場合にエントロピー生成による減衰が現れる。ここで、 $N_S$  はインフラトン崩壊等により生成され熱平衡になった後に、 $T = M_S$  以下の温度で非相対論的になるとし、 $M_S < T_{RI}$  であることを要請して、生成機構については言及しないことにする。初期条件となる  $T = M_S$  での  $N_S$  の残存量については、熱平衡の値を用いる。

臨界周波数  $f_R$  は、再加熱温度から求めることができる。再加熱温度時にちょうどホライズン内に入るモードを求めると、ホライズンの大きさ  $a(T_R)H(T_R)$  と重力波モード  $k_R$  の関係より、 $k_R = a(T_R)H(T_R)$  であり、 $k_R = 2\pi a(T_R)f_R a_0$  なので、

$$f_R = \frac{a(T_R)}{a_0} \frac{H(T_R)}{2\pi}, \quad (4.52)$$

となる。ここで、 $a_0 = 1$  は現在のスケール因子であり、再加熱時のハッブルパラメータは  $H(T_R) = \sqrt{\frac{\pi^2}{90M_P^2} g_*(T_R) T_R^4}$  と表される。エントロピー生成後の宇宙について、現在まで宇宙全体のエントロピーが保存しているとする、スケール因子の比について、

$$\begin{aligned} S &= sa^3 = \text{const.}, \\ \therefore s(T_R)a(T_R)^3 &= s(T_0)a_0^3, \\ \therefore \frac{a(T_R)}{a_0} &= \left( \frac{g_{*s}(T_R)}{g_{*s0}} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{T_0}{T_R}, \end{aligned} \quad (4.53)$$

と求めることができる。ここで、エントロピー密度  $s(T)$  について、 $s(T) = \frac{2\pi^2}{45} g_{*s}(T) T^3$  を用いた。また、 $T_0 = 2.7255$  K は現在の宇宙温度である。よって、臨界周波数  $f_R$  は、再加熱温度  $T_R$  を用いて、以下のように表される。

$$f_R = \frac{1}{6M_P} \left( \frac{g_{*s}(T_R)}{g_{*s0}} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{g_*(T_R)}{10} \right)^{\frac{1}{2}} T_0 T_R \quad (4.54)$$

$$\sim 10^{-11} \text{ Hz} \left( \frac{T_R}{10 \text{ MeV}} \right) \quad (4.55)$$

次に、 $N_S$  によるエントロピー生成が起きる場合、標準宇宙論におけるスペクトルに比べて、どのくらい減衰するかを示す。 $N_S$  によるエントロピー生成が起きる場合のスペクトル  $\Omega_{\text{GW}}|_{\text{wEP}}$  とエントロピー生成が起きない場合のスペクトル  $\Omega_{\text{GW}}|_{\text{woEP}}$  を用いて、以下のように減衰量を表すことにする。

$$\Delta\Omega_{\text{GW}} = \frac{\Omega_{\text{GW}}|_{\text{wEP}}}{\Omega_{\text{GW}}|_{\text{woEP}}}. \quad (4.56)$$

[66] で示されたように、 $f \gg f_R$  において、この減衰因子はエントロピー生成比を用いて、

$$\Delta\Omega_{\text{GW}} \simeq \frac{1}{\Delta S^{4/3}}, \quad (4.57)$$

$$\sim \left\{ 10 \left( \frac{10^{-10} \text{ eV}}{m_0} \right)^{1/2} \right\}^{-\frac{4}{3}} \quad (4.58)$$

と求めることができる。

エントロピー生成による重力波スペクトルの減衰は、 $f_R$  と  $\Delta\Omega_{\text{GW}}$  の特徴的な二つのパラメータで表されることになる。これらは、それぞれ、 $T_R$  と  $\Delta S$  に関係している。 $f_R$  は  $m_0$  と  $M_S$  の二つのパラメータに依存していて、 $\Delta\Omega_{\text{GW}}$  は、ほぼ、 $m_0$  のみに依存している。この対応関係を表 4.1 にまとめる。将来の重力波観測実験によって背景重力波が観測された場合、スペクトルの  $\Delta\Omega_{\text{GW}}$  と  $f_R$  を読み取ることで、 $m_0$  と  $M_S$  の情報を再構成することが可能となる。

表 4.1:  $N_S$  の崩壊によるエントロピー生成と重力波スペクトルの減衰の対応とパラメータ依存性

パラメータの依存性	エントロピー生成		重力波スペクトル
$m_0$ と $M_S$ に依存	$T_R$	$\leftrightarrow$	$f_R$
$m_0$ に依存	$\Delta S$	$\leftrightarrow$	$\Delta\Omega_{\text{GW}}$

以下、 $m_0$  と  $M_S$  の値を決めた場合に、どのような重力波スペクトルが予言されるかを示す。まずは、 $M_S$  の値を固定して幾つかの  $m_0$  の値を取った場合のスペクトルを示す。その後、 $m_0$  の値を固定して、幾つかの  $M_S$  の値を取った場合のスペクトルを示す。

図 4.5 は、 $M_S = 10 \text{ TeV}$ 、 $m_0 = 10^{-14}$ 、 $10^{-12}$ 、 $10^{-10} \text{ eV}$  の時の重力波スペクトルである。この時、テンソル-スカラー比は  $r = 0.06$  とし、インフレーションによる再加熱温度  $T_{RI}$  は  $T_{RI} = 10^5 \text{ TeV}$  とした。また、 $n_T = 0$  と  $0.5$  の二つの場合について、スペクトルを示した。 $\Delta\Omega_{\text{GW}}$  は DECIGO など、将来の宇宙レーザー干渉計で検証可能となる。さらに、 $n_T$  が比較的大きい値をとる場合、 $f_R$  がパルサータイミングアレイ実験によって検証可能となる。

図 4.6 は、 $m_0 = 10^{-12} \text{ eV}$  で、 $M_S = 10^3$ 、 $10^6$ 、 $10^9 \text{ TeV}$  の場合の重力波スペクトルである。 $f_R$  は、 $M_S > \mathcal{O}(10^6) \text{ TeV}$  の場合に、将来の宇宙レーザー干渉計の観測周波数域に現れる。 $n_T$  が比較的に大きい場合に、将来の重力波実験で検証可能となる。

図 4.7 は、臨界周波数  $f_R$  と重力波スペクトルの減衰率  $\Delta\Omega_{\text{GW}}$  を示す。

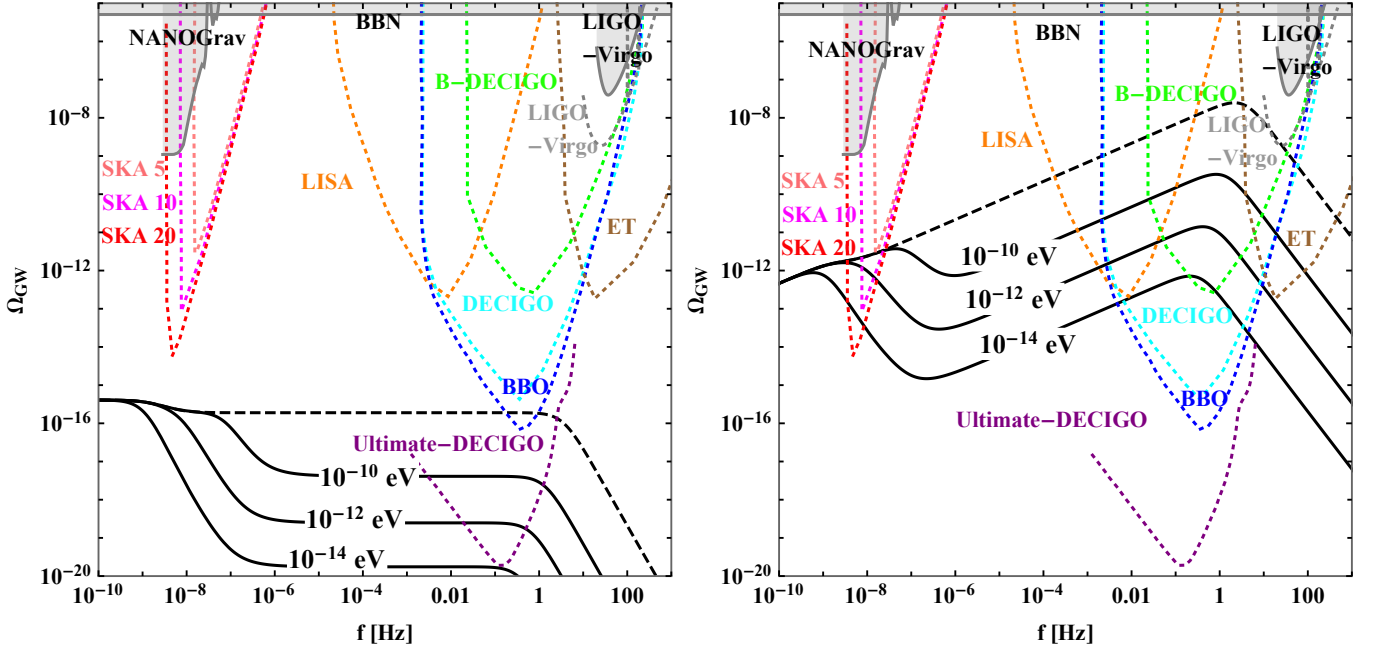


図 4.5: 重力波スペクトル: 黒の実線は、 $M_S = 10$  TeV、 $m_0 = 10^{-14}$ 、 $10^{-12}$ 、 $10^{-10}$  eV の時の重力波スペクトル  $\Omega_{\text{GW}}$  である。黒の波線は、 $N_S$  によるエントロピー生成がない場合のスペクトルを表す。 $r = 0.06$ 、 $T_{RI} = 10^5$  TeV とした。また、左図は  $n_T = 0$  であり、右図は  $n_T = 0.5$  の場合である。灰色で塗られた領域は既に排除された領域であり、それぞれ、BBN [80]、LIGO-Virgo [81]、NANOGrav [62] による結果である。色がついた破線はそれぞれ、将来の重力波観測実験の SKA [63]、LISA [82]、ET [83]、BBO [60]、(B-)DECIGO [84, 85]、Ultimate-DECIGO [86] の感度である。

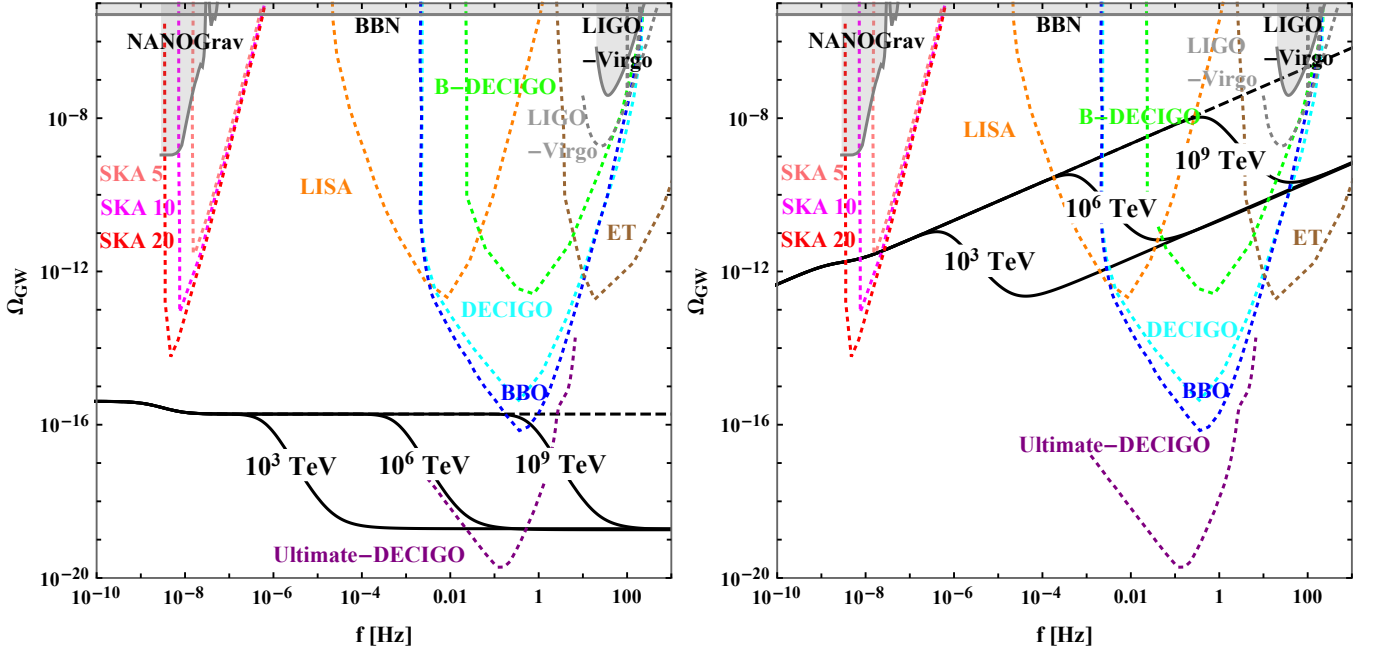


図 4.6: 重力波スペクトル: 黒の実線は、 $m_0 = 10^{-12}$  eV で、 $M_S = 10^3, 10^6, 10^9$  TeV の場合の重力波スペクトル。黒の破線は、 $N_S$  の崩壊によるエントロピー生成がない場合のスペクトル。 $r = 0.06$ ,  $T_{RI} = 10^{12}$  TeV とした。また、左図は  $n_T = 0$  であり、右図は  $n_T = 0.5$  の場合である。灰色で塗られた領域は既に排除された領域であり、それぞれ、BBN [80]、LIGO-Virgo [81]、NANOGrav [62] による結果である。色がついた破線はそれぞれ、将来の重力波観測実験の SKA [63]、LISA [82]、ET [83]、BBO [60]、(B-)DECIGO [84, 85]、Ultimate-DECIGO [86] の感度である。

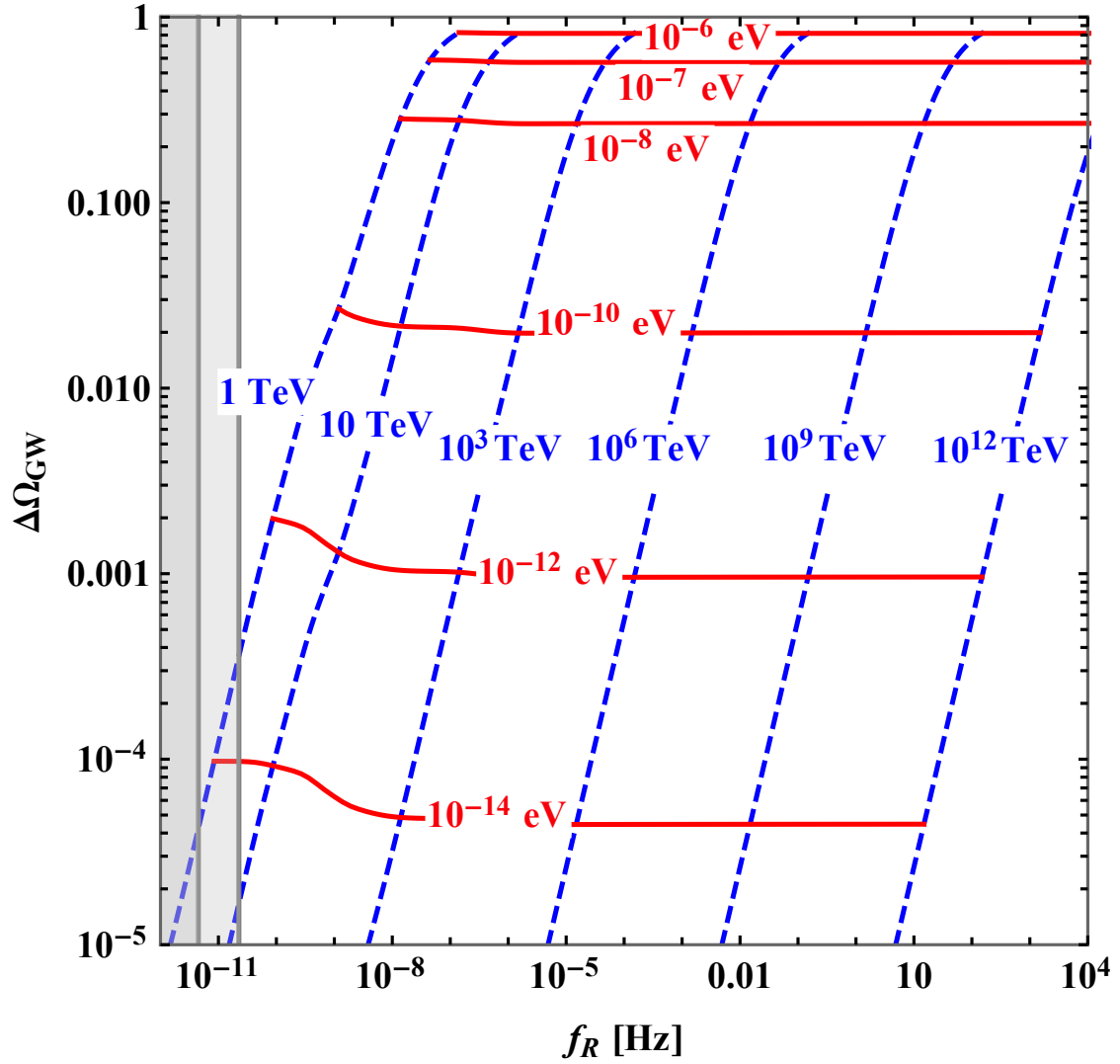


図 4.7: 臨界周波数  $f_R$  とスペクトルの減衰率  $\Delta\Omega_{\text{GW}}$  赤の実線は、最も軽いニュートリノの質量  $m_0$  を示したもので、青の破線は、右巻きニュートリノ  $N_S$  の質量  $M_S$  を示したものである。灰で塗られた領域は、BBN の制限である、 $T_R = 1, 5 \text{ MeV}$  に対応している。

## 第5章 結論

ニュートリノ振動現象の発見によって、ニュートリノに質量が存在することが確定した。素粒子標準模型にはニュートリノ質量は存在しないため、ニュートリノ質量を説明する新理論が必要になる。

ニュートリノ質量値について着目すると、まず、ニュートリノ振動実験によって二つの質量二乗差が観測されている。ニュートリノの状態はフレーバー固有状態と質量固有状態がそれぞれ3つずつだと考えられており、振動実験による二つの質量二乗差の観測から、最も軽いニュートリノ質量値が観測されれば、全てのニュートリノの質量値が観測されることになる。本研究ではこの最も軽いニュートリノ質量 ( $m_0$  とした) を観測する方法について考察した。特に、この値が非常に小さくなる場合について、エントロピー生成の影響による背景重力波スペクトルの歪みを見る方法について研究した。

ベータ崩壊や宇宙論的な観測によって、ニュートリノ質量には上限がつけられている。ベータ崩壊とニュートリノを伴わない二重ベータ崩壊についても、最も軽いニュートリノ質量に上限を与えることができており、KamLAND-zen 実験では、 $m_0 < (180 - 480) \text{ meV}$  と与えられている。振動実験の結果と現在最も厳しい Planck2018 の結果を合わせて、最も軽いニュートリノ質量の現段階で最も厳しい上限は、順階層の場合は  $m_0 < 0.030 \text{ eV}$ 、逆階層の場合は  $m_0 < 0.016 \text{ eV}$  と与えられる。今後も実験の感度向上を期待することができ、さらなる探索が期待されるが、これらのような実験・観測は、最も軽いニュートリノ質量が比較的大きい場合に観測が可能となる。本論文では、これまでの実験方法では到達不可能な  $m_0$  が極めて小さくなる場合での新たな探索方法を提案した。

本論文では観測されている小さなニュートリノ質量を実現する3つの右巻きニュートリノを持つモデルを考えた。ここで、最も軽いニュートリノ質量が有限となるために、3つの右巻きニュートリノを導入した。これらの右巻きニュートリノのうち、最も軽いニュートリノと直接関係する1つの右巻きニュートリノに着目し、これを  $N_S$  とした。 $N_S$  は  $m_0$  の値によって湯川結合  $F_S$  を非常に抑制し、長寿命になることができる。すると、宇宙のエネルギー密度の大部分を担うことができ。この場合には、 $N_S$  の崩壊によって、付加的なエントロピーが生成される。すると、同時に宇宙の膨張率を修正することになるので、原始背景重力波のスペクトルを大きく変化させることができる。本研究では、特に、最軽量のニュートリノ質量  $m_0$  が  $\mathcal{O}(10^{-7}) \text{ eV}$  よりも小さくなる場合に、大きなエントロピー生成を引き起こすことができ、同時に標準宇宙論が预言するインフレーション起源の重力波スペクトルからの変化も大きくなることを見出した。

エントロピー生成による変更を受けた背景重力波スペクトルは、周波数  $f > f_R$  では、 $\Delta\Omega_{GW}$  の係数によって抑制される。本論文では、 $f_R$  と  $\Delta\Omega_{GW}$  の観測データが、最も軽いニュートリノ質量  $m_0$  と  $N_S$  の質量  $M_S$  の両方を決定し、それが湯川結合  $f_S$  の決定につながることを示した。よって、地上ニュートリノ実験では検証が極めて困難な非常に小さい  $m_0 < \mathcal{O}(10^{-7}) \text{ eV}$  の値は、今後の重力波観測実験により、スペクトルの形状を調べることで、検証できる可能性がある。

# 謝辞

本論文作成にあたり、学部4年時より約6年間、私を全面的にご指導して下さった浅賀岳彦教授に心から感謝致します。多くの時間を浅賀教授と過ごし、研究をできたことは私の人生の宝です。熱いご指導のもと、本当に多くの経験をする事ができました。

新潟大学素粒子論研究室の谷本盛光氏、中野博章准教授、江尻信司准教授にも数々のご指導やアドバイスを頂くことができ、深く感謝致します。さらに、研究室OBである石田裕之氏、永島伸多郎氏、露木孝尚氏、金田佑哉氏にも感謝したいと思います。先輩研究者として道を示していただいただけではなく、相談や議論にも乗っていただきました。特に、石田裕之氏には多くの面でお世話になりました。感謝しています。また、研究室での楽しい時間を共に過ごさせていただいた、同期の吉田君や後輩達にも感謝します。

ここまでに、佐々木環境技術振興財団と日本科学協会 笹川科学研究助成からの御支援を頂戴しました。大変感謝しております。

また、ここまで長年に渡って支援してくれた家族に感謝したいと思います。研究に専念できたのは家族の支えがあったからです。父と母から特に多くの支援をしていただきました。また、2021年2月1日に永眠した祖母にも感謝します。共働きだった中、幼少期より祖父母に育てていただきました。私の価値観形成は祖母の影響が大きかったと思います。

最後に、私がお世話になった皆様々に深く感謝致します。 本当にありがとうございました。



## 関連図書

- [1] Takehiko Asaka and Hisashi Okui. Neutrino masses and gravitational wave background. *Phys. Lett. B*, Vol. 814, p. 136074, 2021.
- [2] Y. Fukuda, et al. Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 81, pp. 1562–1567, 1998.
- [3] S. L. Glashow. Partial Symmetries of Weak Interactions. *Nucl. Phys.*, Vol. 22, pp. 579–588, 1961.
- [4] Steven Weinberg. A Model of Leptons. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 19, pp. 1264–1266, 1967.
- [5] Abdus Salam. Weak and Electromagnetic Interactions. *Conf. Proc. C*, Vol. 680519, pp. 367–377, 1968.
- [6] Peter Minkowski.  $\mu \rightarrow e\gamma$  at a Rate of One Out of  $10^9$  Muon Decays? *Phys. Lett. B*, Vol. 67, pp. 421–428, 1977.
- [7] Tsutomu Yanagida. Horizontal gauge symmetry and masses of neutrinos. *Conf. Proc. C*, Vol. 7902131, pp. 95–99, 1979.
- [8] Tsutomu Yanagida. Horizontal Symmetry and Masses of Neutrinos. *Prog. Theor. Phys.*, Vol. 64, p. 1103, 1980.
- [9] Pierre Ramond. The Family Group in Grand Unified Theories. In *International Symposium on Fundamentals of Quantum Theory and Quantum Field Theory*, pp. 265–280, 2 1979.
- [10] Murray Gell-Mann, Pierre Ramond, and Richard Slansky. Complex Spinors and Unified Theories. *Conf. Proc. C*, Vol. 790927, pp. 315–321, 1979.
- [11] S. L. Glashow. in *Proc. of the Cargèse Summer Institute on Quarks and Leptons*, Cargèse, July 9-29, 1979, eds. M. Lévy et. al. , (Plenum, 1980, New York), p707. 1979.
- [12] Rabindra N. Mohapatra and Goran Senjanovic. Neutrino Mass and Spontaneous Parity Non-conservation. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 44, p. 912, 1980.
- [13] M. Aker, et al. Improved Upper Limit on the Neutrino Mass from a Direct Kinematic Method by KATRIN. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 123, No. 22, p. 221802, 2019.
- [14] Max Aker, et al. First operation of the KATRIN experiment with tritium. *Eur. Phys. J. C*, Vol. 80, No. 3, p. 264, 2020.
- [15] B. P. Abbott, et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 116, No. 6, p. 061102, 2016.
- [16] P. A. Zyla, et al. Review of Particle Physics. *PTEP*, Vol. 2020, No. 8, p. 083C01, 2020.

- [17] Takehiko Asaka, Hisashi Okui, Minoru Tanaka, and Motohiko Yoshimura. Tomography by neutrino pair beam. *Phys. Lett. B*, Vol. 785, pp. 536–542, 2018.
- [18] S. Schael, et al. Precision electroweak measurements on the  $Z$  resonance. *Phys. Rept.*, Vol. 427, pp. 257–454, 2006.
- [19] Ivan Esteban, M. C. Gonzalez-Garcia, Michele Maltoni, Thomas Schwetz, and Albert Zhou. The fate of hints: updated global analysis of three-flavor neutrino oscillations. *JHEP*, Vol. 09, p. 178, 2020.
- [20] A. Gando, et al. Search for Majorana Neutrinos near the Inverted Mass Hierarchy Region with KamLAND-Zen. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 117, No. 8, p. 082503, 2016. [Addendum: *Phys. Rev. Lett.* 117, 109903 (2016)].
- [21] N. Aghanim, et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, Vol. 641, p. A6, 2020.
- [22] Sachiko Kuroyanagi, Takeshi Chiba, and Tomo Takahashi. Probing the Universe through the Stochastic Gravitational Wave Background. *JCAP*, Vol. 11, p. 038, 2018.
- [23] Alexei A. Starobinsky. Spectrum of relict gravitational radiation and the early state of the universe. *JETP Lett.*, Vol. 30, pp. 682–685, 1979.
- [24] V. A. Rubakov, M. V. Sazhin, and A. V. Veryaskin. Graviton Creation in the Inflationary Universe and the Grand Unification Scale. *Phys. Lett. B*, Vol. 115, pp. 189–192, 1982.
- [25] Arthur Kosowsky, Michael S. Turner, and Richard Watkins. Gravitational radiation from colliding vacuum bubbles. *Phys. Rev. D*, Vol. 45, pp. 4514–4535, 1992.
- [26] Arthur Kosowsky, Michael S. Turner, and Richard Watkins. Gravitational waves from first order cosmological phase transitions. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 69, pp. 2026–2029, 1992.
- [27] Arthur Kosowsky and Michael S. Turner. Gravitational radiation from colliding vacuum bubbles: envelope approximation to many bubble collisions. *Phys. Rev. D*, Vol. 47, pp. 4372–4391, 1993.
- [28] Marc Kamionkowski, Arthur Kosowsky, and Michael S. Turner. Gravitational radiation from first order phase transitions. *Phys. Rev. D*, Vol. 49, pp. 2837–2851, 1994.
- [29] Mark Hindmarsh, Stephan J. Huber, Kari Rummukainen, and David J. Weir. Gravitational waves from the sound of a first order phase transition. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 112, p. 041301, 2014.
- [30] S. Y. Khlebnikov and I. I. Tkachev. Relic gravitational waves produced after preheating. *Phys. Rev. D*, Vol. 56, pp. 653–660, 1997.
- [31] A. Vilenkin. Gravitational Field of Vacuum Domain Walls and Strings. *Phys. Rev. D*, Vol. 23, pp. 852–857, 1981.
- [32] Tanmay Vachaspati and Alexander Vilenkin. Gravitational Radiation from Cosmic Strings. *Phys. Rev. D*, Vol. 31, p. 3052, 1985.

- [33] Thibault Damour and Alexander Vilenkin. Gravitational wave bursts from cosmic strings. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 85, pp. 3761–3764, 2000.
- [34] Lawrence M. Krauss. Gravitational waves from global phase transitions. *Phys. Lett. B*, Vol. 284, pp. 229–233, 1992.
- [35] Elisa Fenu, Daniel G. Figueroa, Ruth Durrer, and Juan Garcia-Bellido. Gravitational waves from self-ordering scalar fields. *JCAP*, Vol. 10, p. 005, 2009.
- [36] Duncan Meacher, Michael Coughlin, Sean Morris, Tania Regimbau, Nelson Christensen, Shivaraj Kandhasamy, Vuk Mandic, Joseph D. Romano, and Eric Thrane. Mock data and science challenge for detecting an astrophysical stochastic gravitational-wave background with Advanced LIGO and Advanced Virgo. *Phys. Rev. D*, Vol. 92, No. 6, p. 063002, 2015.
- [37] Alison J. Farmer and E. Sterl Phinney. The gravitational wave background from cosmological compact binaries. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, Vol. 346, p. 1197, 2003.
- [38] Alessandra Buonanno, Gunter Sigl, Georg G. Raffelt, Hans-Thomas Janka, and Ewald Muller. Stochastic gravitational wave background from cosmological supernovae. *Phys. Rev. D*, Vol. 72, p. 084001, 2005.
- [39] Kyle Crocker, Tanner Prestegard, Vuk Mandic, Tania Regimbau, Keith Olive, and Elisabeth Vangioni. Systematic study of the stochastic gravitational-wave background due to stellar core collapse. *Phys. Rev. D*, Vol. 95, No. 6, p. 063015, 2017.
- [40] Valeria Ferrari, Sabino Matarrese, and Raffaella Schneider. Stochastic background of gravitational waves generated by a cosmological population of young, rapidly rotating neutron stars. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, Vol. 303, p. 258, 1999.
- [41] Tania Regimbau and Jose Antonio de Freitas Pacheco. Gravitational wave background from magnetars. *Astron. Astrophys.*, Vol. 447, p. 1, 2006.
- [42] Arthur Kosowsky and Michael S. Turner. CBR anisotropy and the running of the scalar spectral index. *Phys. Rev. D*, Vol. 52, pp. 1739–1743, 1995.
- [43] James E. Lidsey, Andrew R. Liddle, Edward W. Kolb, Edmund J. Copeland, Tiago Barreiro, and Mark Abney. Reconstructing the inflation potential : An overview. *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 69, pp. 373–410, 1997.
- [44] A. D. Dolgov and Andrei D. Linde. Baryon Asymmetry in Inflationary Universe. *Phys. Lett. B*, Vol. 116, p. 329, 1982.
- [45] L. F. Abbott, Edward Farhi, and Mark B. Wise. Particle Production in the New Inflationary Cosmology. *Phys. Lett. B*, Vol. 117, p. 29, 1982.
- [46] Lev Kofman, Andrei D. Linde, and Alexei A. Starobinsky. Towards the theory of reheating after inflation. *Phys. Rev. D*, Vol. 56, pp. 3258–3295, 1997.
- [47] Jennie H. Traschen and Robert H. Brandenberger. Particle Production During Out-of-equilibrium Phase Transitions. *Phys. Rev. D*, Vol. 42, pp. 2491–2504, 1990.
- [48] Lev Kofman, Andrei D. Linde, and Alexei A. Starobinsky. Nonthermal phase transitions after inflation. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 76, pp. 1011–1014, 1996.

- [49] Richard Easther, John T. Giblin, Jr., and Eugene A. Lim. Gravitational Wave Production At The End Of Inflation. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 99, p. 221301, 2007.
- [50] Juan Garcia-Bellido and Daniel G. Figueroa. A stochastic background of gravitational waves from hybrid preheating. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 98, p. 061302, 2007.
- [51] Juan Garcia-Bellido, Daniel G. Figueroa, and Alfonso Sastre. A Gravitational Wave Background from Reheating after Hybrid Inflation. *Phys. Rev. D*, Vol. 77, p. 043517, 2008.
- [52] Jean Francois Dufaux, Amanda Bergman, Gary N. Felder, Lev Kofman, and Jean-Philippe Uzan. Theory and Numerics of Gravitational Waves from Preheating after Inflation. *Phys. Rev. D*, Vol. 76, p. 123517, 2007.
- [53] Yuki Watanabe and Eiichiro Komatsu. Improved Calculation of the Primordial Gravitational Wave Spectrum in the Standard Model. *Phys. Rev. D*, Vol. 73, p. 123515, 2006.
- [54] Sachiko Kuroyanagi, Takeshi Chiba, and Naoshi Sugiyama. Precision calculations of the gravitational wave background spectrum from inflation. *Phys. Rev. D*, Vol. 79, p. 103501, 2009.
- [55] Latham A. Boyle and Paul J. Steinhardt. Probing the early universe with inflationary gravitational waves. *Phys. Rev. D*, Vol. 77, p. 063504, 2008.
- [56] J. Aasi, et al. Advanced LIGO. *Class. Quant. Grav.*, Vol. 32, p. 074001, 2015.
- [57] F. Acernese, et al. Advanced Virgo: a second-generation interferometric gravitational wave detector. *Class. Quant. Grav.*, Vol. 32, No. 2, p. 024001, 2015.
- [58] T. Akutsu, et al. KAGRA: 2.5 Generation Interferometric Gravitational Wave Detector. *Nature Astron.*, Vol. 3, No. 1, pp. 35–40, 2019.
- [59] U. A. Johann, M. Ayre, P. F. Gath, W. Holota, P. Marenaci, H. R. Schulte, P. Weimer, and D. Weise. The European Space Agency’s LISA mission study: Status and present results. *J. Phys. Conf. Ser.*, Vol. 122, p. 012005, 2008.
- [60] Jeff Crowder and Neil J. Cornish. Beyond LISA: Exploring future gravitational wave missions. *Phys. Rev. D*, Vol. 72, p. 083005, 2005.
- [61] Seiji Kawamura, et al. The Japanese space gravitational wave antenna - DECIGO. *J. Phys. Conf. Ser.*, Vol. 122, p. 012006, 2008.
- [62] Z. Arzoumanian, et al. The NANOGrav 11-year Data Set: Pulsar-timing Constraints On The Stochastic Gravitational-wave Background. *Astrophys. J.*, Vol. 859, No. 1, p. 47, 2018.
- [63] Gemma Janssen, et al. Gravitational wave astronomy with the SKA. *PoS*, Vol. AASKA14, p. 037, 2015.
- [64] Edward W. Kolb and Michael S. Turner. *The Early Universe*, Vol. 69. 1990.
- [65] Takuya Hasegawa, Nagisa Hiroshima, Kazunori Kohri, Rasmus S. L. Hansen, Thomas Tram, and Steen Hannestad. MeV-scale reheating temperature and thermalization of oscillating neutrinos by radiative and hadronic decays of massive particles. *JCAP*, Vol. 12, p. 012, 2019.

- [66] Naoki Seto and Jun'ichi Yokoyama. Probing the equation of state of the early universe with a space laser interferometer. *J. Phys. Soc. Jap.*, Vol. 72, pp. 3082–3086, 2003.
- [67] Kazunori Nakayama, Shun Saito, Yudai Suwa, and Jun'ichi Yokoyama. Space laser interferometers can determine the thermal history of the early Universe. *Phys. Rev. D*, Vol. 77, p. 124001, 2008.
- [68] Kazunori Nakayama, Shun Saito, Yudai Suwa, and Jun'ichi Yokoyama. Probing reheating temperature of the universe with gravitational wave background. *JCAP*, Vol. 06, p. 020, 2008.
- [69] Sachiko Kuroyanagi, Kazunori Nakayama, and Shun Saito. Prospects for determination of thermal history after inflation with future gravitational wave detectors. *Phys. Rev. D*, Vol. 84, p. 123513, 2011.
- [70] Wilfried Buchmüller, Valerie Domcke, Kohei Kamada, and Kai Schmitz. The Gravitational Wave Spectrum from Cosmological  $B - L$  Breaking. *JCAP*, Vol. 10, p. 003, 2013.
- [71] Ryusuke Jinno, Takeo Moroi, and Kazunori Nakayama. Inflationary Gravitational Waves and the Evolution of the Early Universe. *JCAP*, Vol. 01, p. 040, 2014.
- [72] Ryusuke Jinno, Takeo Moroi, and Tomo Takahashi. Studying Inflation with Future Space-Based Gravitational Wave Detectors. *JCAP*, Vol. 12, p. 006, 2014.
- [73] Sachiko Kuroyanagi, Tomo Takahashi, and Shuichiro Yokoyama. Blue-tilted Tensor Spectrum and Thermal History of the Universe. *JCAP*, Vol. 02, p. 003, 2015.
- [74] Sachiko Kuroyanagi, Kazunori Nakayama, and Jun'ichi Yokoyama. Prospects of determination of reheating temperature after inflation by DECIGO. *PTEP*, Vol. 2015, No. 1, p. 013E02, 2015.
- [75] Francesco D'Eramo and Kai Schmitz. Imprint of a scalar era on the primordial spectrum of gravitational waves. *Phys. Rev. Research.*, Vol. 1, p. 013010, 2019.
- [76] Simone Blasi, Vedran Brdar, and Kai Schmitz. Fingerprint of low-scale leptogenesis in the primordial gravitational-wave spectrum. *Phys. Rev. Res.*, Vol. 2, No. 4, p. 043321, 2020.
- [77] Sachiko Kuroyanagi, Tomo Takahashi, and Shuichiro Yokoyama. Blue-tilted inflationary tensor spectrum and reheating in the light of NANOGrav results. *JCAP*, Vol. 01, p. 071, 2021.
- [78] Y. Akrami, et al. Planck 2018 results. X. Constraints on inflation. *Astron. Astrophys.*, Vol. 641, p. A10, 2020.
- [79] J. A. Casas and A. Ibarra. Oscillating neutrinos and  $\mu \rightarrow e, \gamma$ . *Nucl. Phys. B*, Vol. 618, pp. 171–204, 2001.
- [80] Gianluca Calcagni and Sachiko Kuroyanagi. Stochastic gravitational-wave background in quantum gravity. 11 2020.
- [81] B. P. Abbott, et al. Search for the isotropic stochastic background using data from Advanced LIGO's second observing run. *Phys. Rev. D*, Vol. 100, No. 6, p. 061101, 2019.
- [82] Pau Amaro-Seoane, et al. Laser Interferometer Space Antenna. 2 2017.

- [83] B. Sathyaprakash, et al. Scientific Objectives of Einstein Telescope. *Class. Quant. Grav.*, Vol. 29, p. 124013, 2012. [Erratum: *Class.Quant.Grav.* 30, 079501 (2013)].
- [84] Naoki Seto, Seiji Kawamura, and Takashi Nakamura. Possibility of direct measurement of the acceleration of the universe using 0.1-Hz band laser interferometer gravitational wave antenna in space. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 87, p. 221103, 2001.
- [85] Shuichi Sato, et al. The status of DECIGO. *J. Phys. Conf. Ser.*, Vol. 840, No. 1, p. 012010, 2017.
- [86] Hideaki Kudoh, Atsushi Taruya, Takashi Hiramatsu, and Yoshiaki Himemoto. Detecting a gravitational-wave background with next-generation space interferometers. *Phys. Rev. D*, Vol. 73, p. 064006, 2006.