

2020年度 博士論文

有限温度SU(3)格子ゲージ理論における  
一次相転移の熱力学

白銀 瑞樹

F17J007D

新潟大学大学院自然科学研究科 博士後期課程  
数理物質科学専攻 物理学コース

素粒子論研究室



# 目次

第1章 導入	3
第2章 格子 QCD	5
2.1 連続理論の QCD 作用	5
2.1.1 非局所量のゲージ不変性	6
2.2 格子上の変数とゲージ不変量	8
2.2.1 格子空間	8
2.2.2 リンク変数	8
2.3 格子上の QCD 作用	10
2.3.1 格子ゲージ場の作用	10
2.4 ウィルソンループ	11
2.5 有限温度場の理論	14
2.5.1 松原形式	14
2.5.2 格子上の物理量の計算	15
2.5.3 格子上の温度	15
2.6 ポリヤコフループ	17
第3章 微分法	18
3.1 微分法	18
3.1.1 潜熱と圧力ギャップ	18
3.1.2 非等方係数	19
3.1.3 非等方係数の計算法	20
3.1.4 相転移線の傾き	22
3.1.5 圧力ギャップ消失の条件	23
3.1.6 多点再重み付け法	23
3.2 微分法の結果	26
3.2.1 シミュレーション点	26
3.2.2 相転移線と非等方係数	27
3.2.3 一次相転移点近傍での相の分離方法	32
3.2.4 潜熱と圧力差	35
3.3 微分法の結論	37

<b>第 4 章 SFtX 法</b>	<b>38</b>
4.1 SFtX 法の原理	38
4.1.1 Gradient flow	38
4.1.2 エネルギー運動量テンソルへの応用	39
4.1.3 NNLO でのエネルギー運動量テンソル	41
4.1.4 NLO でのエネルギー運動量テンソル	42
4.1.5 潜熱と圧力差	43
4.1.6 くりこみスケール	43
4.1.7 連続極限と、フロウタイムゼロ極限の外挿	44
4.2 SFtX 法の結果	45
4.2.1 シミュレーション点	45
4.2.2 潜熱と圧力差	46
4.2.3 NLO の結果	46
4.2.4 NNLO の結果	47
4.2.5 空間体積依存性	50
4.2.6 方法 1 の結果	51
4.2.7 方法 2 の結果	53
4.2.8 ブラケットオペレーターを用いた計算結果との比較	56
4.2.9 SFtX 法を用いた潜熱の結果	57
4.2.10 微分法との比較	58
4.2.11 相転移点近傍での潜熱のヒステリシス曲線	60
4.3 SFtX 法の結論	60
<b>第 5 章 結論</b>	<b>62</b>
<b>付 録 A 誤差評価</b>	<b>64</b>
A.1 基本的な誤差	64
A.2 ジャック・ナイフ法	64

# 第1章 導入

宇宙誕生から現在に至る進化の歴史を調べることは、物理学の最重要テーマの一つである。宇宙誕生から 0.00001 秒後 (温度が数兆度くらい) の世界では、「強い相互作用」で結合した粒子 (ハドロン) が融解してプラズマ状態になるといわれている。そのような状態をクォーク・グルーオン・プラズマ状態という。温度が下がると相転移が起き、クォーク、グルーオンは陽子や中性子などのハドロンを形作り、閉じ込められる。これをクォークの閉じ込めという。強い相互作用は、量子色力学 (QCD) によって記述される。その相転移が起こる高温の世界の研究ができるのは、格子 QCD の大規模数値シミュレーションだけである。「閉じ込め相」と「非閉じ込め相」に移り変わる相転移の性質を理解することは、宇宙の進化の歴史を知る上で非常に重要な要素である。

本研究では、Small flow time expansion Method (SFtX 法) [1, 2] という新しい方法に注目する。SFtX 法は、グラディエントフロー (gradient flow) [3, 4, 5, 6, 7] という方法で、ゲージ場を粗視化する。粗視化により場を一定の長さまでぼやかすことで、量子揺らぎを抑え、元の格子間隔の情報を見えにくくする。そのため、粗視化した場で物理量を計算すれば、統計誤差が小さくなるし、格子間隔依存性が小さくなり、連続極限への外挿がしやすくなることが予想される。さらに、gradient flow でぼやかした長さを有限の長さに固定して連続極限をとれば、格子間隔ゼロの極限をとっても紫外発散は生じない。そのため、gradient flow は、粗視化により正則化した新しい繰りこみ処方であるといわれている。SFtX 法では、その粗視化した場で物理量を計算し、それを元の場の結果に引き戻す。gradient flow の仮想のフロー時間  $t$  が小さい場合は、物理量の  $t$  変化が摂動論によって計算できる。それを逆算すれば元の物理量が計算できる。ただし、実際にそのような計算手続きが可能であるかという点や、摂動論、 $t$  が小さいという近似を使っているため、その近似が最終結果に影響しないかという点は自明ではない。SFtX 法を試行し妥当な結果が出るかどうかを確認することが重要である。SFtX 法は、動的クォークがない SU(3) ゲージ理論 (ヤンミルズ理論、Quenched QCD) [8, 9, 10, 11] や、動的クォークの 2+1 フレーバーを使用した QCD [29, 30, 31, 32] の熱力学量の計算で試行されている。また、この方法は、エネルギー運動量テンソルに関連する様々な観測量を研究するためにも試みられている [12, 13, 14, 15, 16]。

特に、本研究では、動的クォークが含まれない SU(3) 格子ゲージ理論の数値シミュレーションを行い、相転移点近傍での熱力学量の計算方法について議論する。SU(3) ゲージ理論の有限温度相転移は、一次相転移であることが知られている。誕生直後の宇宙程度の低密度では、QCD の相転移はクロスオーバーといわれている。しかし、高密度での QCD の有限温度相転移や、少し現実とは離れるがクォークのフレーバー数を変えた系でも一次相転移になると予想されている。一次相転移点付近での熱力学量を正しく計算する方法は、まだあまり研究されていない。そのため、一次相転移があり、計算が比較的簡単な、動的クォークの含まれない格子 QCD の計算を行うことは、QCD の動的クォークを含まない近似という意味だけでなく、一次相転移がある系で熱力学量

の計算をどのように行うか議論をする上で重要な意味を持つ。

一次相転移点で共存する高温相と低温相の間のエネルギーの差と圧力の差に注目する。前者は潜熱と呼ばれ、一次相転移を特徴づける最も重要な量である。後者、二相間の圧力差はゼロになるべき量である。一次相転移点では二相が共存しているが、もし、高温相と低温相の圧力が違えば、圧力が大きい方の領域が広がっていき、二相は共存できない。圧力差がゼロであることは、格子 QCD の数値計算により熱力学量が正しく計算できているかどうかを確認する指標となる。

SFtX 法に加え、微分法という従来からある方法でもエネルギー密度と圧力を計算する [28]。熱力学の処方箋にしたがって、分配関数を温度や体積で微分することで熱力学量を求める方法である。格子間隔を微小に変えることで格子全体の長さを変化させ、体積や温度の微分を実現する。有限温度格子 QCD では空間方向の格子全体の大きさが体積を表していて、時間方向の格子全体の長さが温度の逆数を表している。そのため、熱力学量の計算で偏微分を実行するためには、空間方向と時間方向の格子の長さを独立に変化させる。SFtX 法と微分法の結果を比較し、SFtX 法の計算の妥当性を確認する [40]。

微分法の計算は、計算コストがかかり、あまり格子間隔を小さくできないが、SFtX 法がうまく機能し、低コストで誤差の少ない計算が可能になれば、相転移点近傍での熱力学量の計算方法について大きな進展となる。SFtX 法では、その粗視化の長さが、格子間隔に代わって、理論のスケールを与える。粗視化したあとの場で連続極限をとり、それがすでに連続理論とみなすことができれば、時空間を格子化した格子場の理論特有の困難をなくすことができ、いろいろな研究の可能性が開ける。

本論文では、まず第 2 章で QCD と格子 QCD の基本的な定式化を説明し、第 3 章では実際に微分法を用いて熱力学量を計算する。微分法による計算の過程で、非等方係数と言われる量が重要となるが、それについても説明する。一次相転移点で二相間の圧力差がゼロであることを示し、体積依存性や、格子間隔依存性なども評価しながら、潜熱を計算する。第 4 章では、SFtX 法について説明し、SFtX 法を用いて潜熱と圧力差を計算する。いろいろな格子間隔、空間体積で計算し、体積依存性を見積もり、連続極限を計算する。その 2 つの方法による計算結果を比較し、計算方法の妥当性を評価する。第 5 章には得られた結論をまとめる。

## 第2章 格子QCD

この章では QCD 作用の導入と、QCD の基本的な性質について見る。

### 2.1 連続理論の QCD 作用

クォーク間の相互作用を記述する基本法則は現在、量子色力学 (Quantum Chromo Dynamics 略して QCD) と呼ばれる非可換ゲージ理論で記述されている。クォークはカラー電荷をもっているが、ハドロンはカラー電荷が中性に見えるようにクォークが結合している。そのためハドロンの世界から見るとカラー電荷は無色であり、3色を指定するカラー座標系の3軸を任意に回転してもハドロンに関する観測値はすべて不変である。つまり、カラー自由度については完全な対称性がなりたっている。もっとも完全な対称性は、空間の各点でそれぞれ独立なカラー回転 (ゲージ変換) を行っても不変な形式につくられている理論、つまりゲージ理論に見られる。この場合ゲージ場に付随する量子はグルーオンである。カラー自由度は3であり、それを  $N_c$  として  $SU(N_c)$  カラーゲージ理論を展開する。

量子電磁力学 (Quantum Electrodynamics) の光子場に対応して、 $(N_c^2 - 1)$  個の成分を持つグルーオン場  $A_\mu^a(x)$  ( $a = 1, 2, \dots, (N_c^2 - 1)$ ) を導入する。これを  $N_c \times N_c$  行列の形に書いて

$$A_\mu(x) = \sum_{a=1}^{N_c^2-1} A_\mu^a T^a \quad (2.1)$$

を定義する。エルミート行列  $T^a$  は  $SUN_c$  群の随伴表現で以下の性質を満たす。

$$\begin{aligned} \text{tr} T^a &= 0 \\ (T^a)^\dagger &= T^a \\ \text{tr} T^a T^b &= \frac{1}{2} \\ [T^a, T^b] &= i f^{abc} T^c \end{aligned}$$

ここで、 $f^{abc}$  は群の構造定数である。 $N_c = 3$  では Gell-Mann 行列  $\lambda^a$  ( $a = 1, 2, \dots, 8$ ) を用いて  $T^a = \lambda^a/2$  と書ける。スピン  $1/2$  をもつクォーク場に対応するフェルミオン場を  $\psi(x)$ 、ゲージ場の強さを  $F_{\mu\nu}(x)$ 、共変微分を  $D_\mu$  とすると QCD のラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{QCD}(x) = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) - \frac{1}{2}\text{tr}[F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x)] \quad (2.2)$$

であり、 $D_\mu, F_{\mu\nu}$  はそれぞれ

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu(x) \quad (2.3)$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{ig}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu] \quad (2.4)$$

である。カラー  $SU(N_c)$  ゲージ変換は

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \omega(x)\psi(x) \quad (2.5)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)\omega^\dagger(x)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = \frac{1}{ig}\omega(x)(\partial_\mu\omega^\dagger(x)) + \omega(x)A_\mu(x)\omega^\dagger(x) \quad (2.6)$$

で定義される。ここで、 $\omega(x)$  はゲージ変換関数であり、変換のパラメータを  $\theta^a(x)$  とすると

$$\omega(x) = \exp \left[ ig \sum_{a=1}^{N_c^2-1} T^a \theta^a(x) \right] \in SU(N_c) \quad (2.7)$$

で与えられる。この変換により QCD ラグランジアン (2.2) は不変であり、カラー  $SU(N_c)$  対称性を持っていることがわかる。 $F_{\mu\nu}$  はそれ単体ではゲージ不変ではないが、トレースをとることによって、ラグランジアンはゲージ不変になっている。

### 2.1.1 非局所量のゲージ不変性

格子理論に移る前に非局所量のゲージ変換性を見る。例えば、 $\bar{\psi}(x)\psi(x + \Delta x)$  という量を考える。 $\Delta x$  が十分に小さい場合なら

$$1 + ig\Delta x^\mu A_\mu(x) \quad (2.8)$$

という量を挟んでおけばよい。

実際にゲージ変換してみると、ゲージ変換関数の微小なずれに関しては  $\omega(x + \Delta x) \simeq \omega(x) + \Delta x^\mu \partial_\mu \omega(x)$  と書けるので、

$$\begin{aligned} 1 + ig\Delta x^\mu A_\mu(x) &= 1 + \Delta x^\mu \omega(\partial_\mu \omega^\dagger(x)) + ig\Delta x^\mu \omega A_\mu \omega^\dagger(x) \\ &= \omega(x)[1 + igA_\mu \Delta x^\mu] \omega^\dagger(x + \Delta x) + O((\Delta x)^2) \end{aligned}$$

以上のようになる。 $O((\Delta x)^2)$  を無視すると確かにゲージ不変な量になる。 $O((\Delta x)^2)$  を無視できないほど有限に離れた 2 点  $x, y$  の場合は、

$$\bar{\psi}(x)U(x, y)\psi(y) \quad (2.9)$$

$$U(x, y) = \mathcal{P} \exp \left[ ig \int_x^y A_\mu(z) dz^\mu \right] \quad (2.10)$$



とする必要がある。ここで  $\mathcal{P}$  とは経路順序積と呼ばれており、今の場合以下の用に定義される。

$$\mathcal{P} \exp \left[ ig \int_x^y A_\mu(z) dz^\mu \right] \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^{N-1} [1 + ig A_\mu(x + n\Delta x) \Delta x_\mu] \quad (2.11)$$

$|\Delta x| = |y - x|/N$  であり、これは区間  $[x, y]$  を無限小ずつに分割していき、式 (2.6) を順序変えずに次々と掛けていったものなので、始点と終点で定義されたゲージ変換関数により共変的な変換をする。

$$U'(x, y) = \omega(x) U(x, y) \omega^\dagger(y) \quad (2.12)$$

さて最後に、格子 QCD では 4 次元ユークリッド空間を考えるのでここでその表式を与えておく。ミンコフスキ空間からユークリッド空間への移行は以下の置き換えによってなされる。

$$\begin{aligned} x_0 &\rightarrow -ix_4 \\ \gamma_i &\rightarrow i\gamma_i^E \quad (i = 1, 2, 3) \\ A_0 &\rightarrow -iA_4 \end{aligned} \quad (2.13)$$

さらにユークリッド空間上における QCD の作用を、以下のように定義する。

$$S_{\text{QCD}}^E = S_G^E + S_F^E \quad (2.14)$$

$$S_G^E = \int d^4x \sum_{\mu=1}^4 \sum_{\nu=1}^4 \frac{1}{2} \text{tr} F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) \quad (2.15)$$

$$S_F^E = \int d^4x \sum_{\mu=1}^4 \sum_{\nu=1}^4 \frac{1}{2} \text{tr} F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) \quad (2.16)$$

ガンマ行列  $\gamma_\mu$  の定義は

$$\gamma_\mu^E, \gamma_\nu^E = 2\delta_{\mu\nu} \quad (2.17)$$

である。すると (2.13) の置き換えにより、

$$S_{\text{QCD}} \rightarrow iS_{\text{QCD}}^E \quad (2.18)$$

$$e^{iS_{\text{QCD}}} \rightarrow e^{-S_{\text{QCD}}^E} \quad (2.19)$$

と置き換えられ、ユークリッド空間上で定義された QCD を記述することができる。以下ではミンコフスキ空間は考えないので、添字の  $E$  は省略することにする。

## 2.2 格子上的変数とゲージ不変量

### 2.2.1 格子空間

格子 QCD では四次元ユークリッド空間を考え、これを間隔  $a$  ごとの格子へ離散化し、さらに格子点数を有限にとる。空間方向  $i = x, y, z$  のそれぞれの格子数を  $N_s$ 、時間方向  $t$  については  $N_t$  とすると、格子体積は  $a^4 N_s^3 \times N_t$  となる。のちに述べるように有限温度系を考える場合は時間方向の格子長さ  $N_t a$  は温度を  $T$  とすると  $1/T$  に対応する。このように有限温度系を考えることにより、計算機によるシミュレーションを可能にする。格子空間の各格子点をサイト  $n = (n_1, n_2, n_3, n_4)$  と呼び、クォーク場は  $\psi_n = \psi(na)$  としてここに定義される。さらにサイト間を結ぶ最小線分をリンクと呼び、格子 QCD においてゲージ場は次に見るようにリンク変数  $U_{n,\mu}$  としてここに定義される。

### 2.2.2 リンク変数

(2.10) で定義した量  $U(x, y)$  を格子と格子をつなぐリンク上に定義する。サイト  $n, n + \hat{\mu}$  ( $\mu = 1, 2, 3, 4$ ) 間をつなぐリンク  $(n, n + \hat{\mu})$  上に  $n$  から  $\hat{\mu}$  方向に格子 1 つ分進むとして

$$U_{n,\mu} \equiv U(n, n + \hat{\mu}a) = e^{igaA_\mu((n+\hat{\mu}/2)a)} \in SU(N_c) \quad (2.20)$$

と定義し、これを「リンク変数」という。ただし、格子間隔は有限だが充分小さいとして

$$\int_x^{x+\hat{\mu}a} \sum_\nu A_\nu(y) dy_\nu \simeq \sum_\nu a(e_\mu)_\nu A_\nu((n+\hat{\mu}/2)a) = aA_\mu((n+\hat{\mu}/2)a) \quad (2.21)$$

と近似できることを用いた。格子 QCD においてゲージ場の主役は次に見るような、リンク変数により構成された閉じたループなどのゲージ不変量である。共変的な変換をしない  $A_\mu(x)$  は、連続理論との対応を見せるとき以外は理論中に変数として直接現れない。よって、格子 QCD における基本的変数は、このリンク変数  $U_{n,\mu}$  である。この意味で「ゲージ場はリンク変数としてリンク上に置く」という。式 (2.20) は、連続理論の対応を見るとき以外では必要ない。逆方向に進むリンク変数は、定義 (2.10) より、

$$U_{n,\mu}^\dagger = U_{n+\hat{\mu},-\mu} \quad (2.22)$$

と書けるのは明らかである。リンク変数のゲージ変換性は既に見たように

$$U_{n,\mu} \rightarrow \omega_n U_{n,\mu} \omega_{n+\hat{\mu}}^\dagger \quad (2.23)$$

$$U_{n-\hat{\mu},\mu}^\dagger \rightarrow \omega_n U_{n-\hat{\mu},\mu}^\dagger \omega_{n-\hat{\mu}} \quad (2.24)$$

であり、サイトごとに定義されたゲージ変換関数  $\omega_n$  による共変的な変換を受ける。サイト  $n$  から  $m$  まで任意の経路を進むリンク変数の数は

$$\prod_{n \rightarrow m} U \equiv U_{n,\mu_1} U_{n+\hat{\mu}_1,\mu_2} U_{n+\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2,\mu_3} \cdots U_{m-\hat{\mu}_k,\mu_k} \rightarrow \omega_n \left[ \prod_{n \rightarrow m} U \right] \omega_m^\dagger \quad (2.25)$$

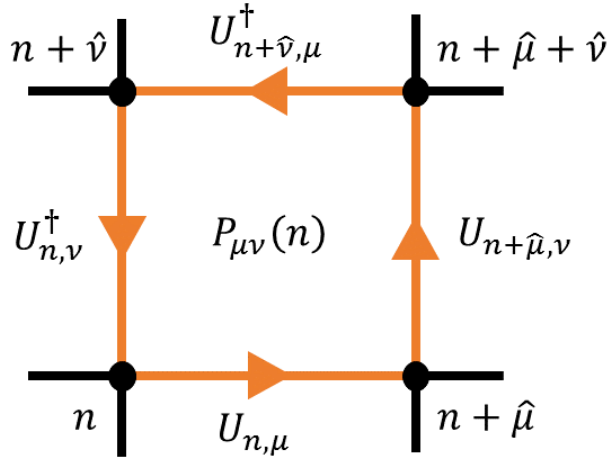


図 2.1: プラケット

と変換するので、次のような点  $n$  で閉じたループ  $C_n$  上のリンク変数のトレース、

$$\text{tr} \left[ \prod_{C_n} U \right] \quad (2.26)$$

はゲージ不変な量になる。ループを成すリンク変数の積で最も単純なものとして「プラケット」があり、サイト  $n$  から、 $\hat{\mu}, \hat{\nu}$  方向に進んで出来る単位正方形のループであり (2.1) で以下の様に定義する。

$$P_{\mu\nu}(n) \equiv U_{n,\mu} U_{n+\hat{\mu},\nu} U_{n+\hat{\nu},\mu}^\dagger U_{n,\nu}^\dagger \quad (2.27)$$

逆まわりのプラケットは単にエルミート共役をとることで表せる。

$$P_{\nu\mu}(n) = P_{\mu\nu}^\dagger(n) \quad (2.28)$$

よって、反時計まわりのプラケットと時計回りのプラケットの和は、虚数部分を打ち消し合うので

$$P_{\mu\nu}(n) + P_{\nu\mu}(n) = 2\text{Re}P_{\mu\nu}(n) \quad (2.29)$$

$$\sum_{\mu \neq \nu} P_{\mu\nu}(n) = \sum_{\mu < \nu} [P_{\mu\nu}(n) + P_{\mu\nu}^\dagger(n)] = \sum_{\mu < \nu} 2\text{Re}P_{\mu\nu}(n) \quad (2.30)$$

がいえる。

## 2.3 格子上の QCD 作用

以下の指導原理にしたがい、ゲージ場とフェルミオンであるクォーク場の作用を定式化する。

1.  $a = 0$  の連続極限で格子作用は、連続作用に一致せよ。

$$\lim_{a \rightarrow 0} S^{\text{lattice}} = S^{\text{cont}} \quad (2.31)$$

2. カラー対称性を厳密に保たせよ。

3. 連続理論の作用  $S^{\text{cont}}$  が持っている対称性は「できるだけ」保たせよ。

ここでの、「できるだけ」という意味は、連続理論で現れる対称性を必ずしも保てるわけでは無いためである。例えば、連続な回転対称性や並進対称性は格子上で保つことは出来ないが、90 度回転や、格子間隔  $a$  の並進なら対称性を保つことができる。また、この指導原理からは当然格子作用は一つには決まらない。そのため、研究目的に応じてさまざまな格子作用が使われている。今回は「ウィルソンが提唱したプラケット作用」と。

### 2.3.1 格子ゲージ場の作用

格子上にゲージ場の作用を定義する。厳密なカラーゲージ対称性を持たせるには、ゲージ不変量である「閉じたループのトレース」によってゲージ作用は構成されるべきである。ここではまず、最も単純なループのプラケット  $P_{\mu\nu}$  を採用し、連続極限で連続理論の作用  $S_G^{\text{cont}}$  と一致することを確認する。この作用をプラケット作用という。まず、格子上の作用は次の様になる

$$S_G = -\beta \sum_n \sum_{\mu \neq \nu} \frac{1}{2N_c} \text{tr} P_{\mu\nu}(n) \quad (2.32)$$

$$= -\beta \sum_n \sum_{\mu < \nu} \frac{1}{N_c} \text{Re tr} P_{\mu\nu}(n) \quad (2.33)$$

$\beta$  は連続極限で  $S_G^{\text{cont}}$  で一致するための規格化定数である。初めに  $1/(2N_c)$  がかけてあるのは定義の問題で、かけていない定義も良く用いられる。かけているときとかけていないときの差は  $\beta$  の定義に吸収されるため、本質的な差は無い。まずプラケットの連続極限を考える (2.20) より、

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu}(na) &= U_{n,\mu} U_{n+\hat{\mu},\nu} U_{n+\hat{\nu},\mu}^\dagger U_{n,\nu}^\dagger \\ &= \exp \{iga A_\mu((n + \hat{\mu}/2)a)\} \exp \{iga A_\nu((n + \hat{\mu} + \hat{\nu}/2)a)\} \\ &\quad \exp \{-iga A_\mu((n + \hat{\nu} + \hat{\mu}/2)a)\} \exp \{-iga A_\nu((n + \hat{\nu}/2)a)\} \end{aligned} \quad (2.34)$$

ここで、ハウスドルフの公式

$$\exp A \cdot \exp B = \left( A + A + \frac{[A, B]}{2} + \dots \right) \quad (2.35)$$

を用い、さらにテイラー展開をしていくと、 $n_c = n + \hat{\mu}/2 + \hat{\nu}/2$  として結局

$$P_{\mu\nu}(na) = \exp \left\{ iga^2 (\partial_\mu A_\nu(n_c a) - \partial_\nu A_\mu(n_c a) - ig[A_\mu(n_c a), A_\nu(n_c a)]) + \text{高次項} \right\} \quad (2.36)$$

$$= \exp \left\{ iga^2 F_{\mu\nu}(n_c a) + \text{高次項} \right\} \quad (2.37)$$

を得る。よって

$$\begin{aligned} \text{tr} P_{\mu\nu} &\simeq \text{tr} \left[ 1 + iga^2 F_{\mu\nu} - \frac{g^2 a^4}{2} F_{\mu\nu}^2 + \text{高次項} \right] \\ &= N_c - \frac{g^2 a^4}{2} \text{tr} F_{\mu\nu}^2 + \text{高次項} \end{aligned} \quad (2.38)$$

となり、高次項は  $a \rightarrow 0$  と連続極限をとることで無視することが出来る。ただし、

$$\text{tr} 1 = N_c \quad (2.39)$$

$$\text{tr} F_{\mu\nu} = \text{tr} \left( \sum_a F_{\mu\nu}^a \frac{\lambda^a}{2} \right) = 0 \quad (2.40)$$

を用いた。以上より (2.32) は

$$S_G \simeq -\beta \sum_n \sum_{\mu \neq \nu} \left[ \frac{1}{2N_c} \left( N_c - \frac{g^2 a^4}{2} \text{tr} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \right] \quad (2.41)$$

$$= \left( \beta \times \frac{g^2}{2N_c} \right) \sum_n a^4 \sum_{\mu \neq \nu} \frac{1}{2} \text{tr} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \text{定数} \quad (2.42)$$

となる、ここで、 $\beta = \frac{2N_c}{g^2}$  と選び、物理には寄与しない定数項を無視すると

$$S_G \xrightarrow{a \rightarrow 0} \int dx^4 \sum_{\mu \neq \nu} \frac{1}{2} \text{tr} F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) \quad (2.43)$$

となり、結合定数などの係数を含めて  $S_G^{\text{cont}}$  と一致する。この作用は、格子ごとの並進対称性、90度回転対称性と、既に述べたように厳密なカラー  $SU(N_c)$  ゲージ対称性を持っている。

## 2.4 ウィルソンループ

プラケットとは、リンク変数で成す閉じたループのうち、単位正方形の形を持つもののことであつたが、単位正方形でなくても (例えば  $\mu$  方向に長さ  $Xa$ 、 $\nu$  方向に長さ  $Ya$  のながさを持つ長方形など) 閉じたループのことをウィルソンループという。今、ゲージ場の外部カレント  $j_\mu(x)$  が図 2.2 の様に系に加えられたとする横軸を空間方向、縦軸を時間方向とし、 $l_0 \times t_0$  の閉じた長方形の反時計回りにカレントを流し、その経路を  $C$  としている。外部カレントは以下の様に定義される。

$$j_\mu(x) = \begin{cases} 1 & (x = \text{経路 } C \text{ 上}) \\ 0 & (x = \text{それ以外}) \end{cases} \quad (2.44)$$

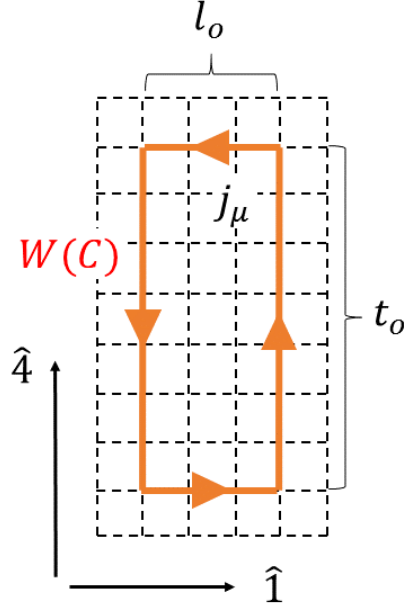


図 2.2: 系に導入したカレントと対応するウィルソンループ

グルーオンと相互作用するような外部カレントは、クォークに対応し、クォークはカレントの順方向、反クォークは逆方向に進むとみなせる。このような外場を挿入するのは物理的には、クォークと反クォークがある時間に対生成し、距離  $l_0$  まで引き離され、それ以降は空間に固定され、時間  $t_0$  だけ過ぎたところでつい消滅するような過程を考えることに対応している。このような外部カレントがある場合、局所的なゲージ対称性を保つために経路  $C$  に沿ってゲージ場の線積分  $W^C$  は

$$W^C = \mathcal{P} \exp \left[ ig \text{tr} \int d^4x \sum_{\mu} J_{\mu} A_{\mu} \right] = \mathcal{P} \exp \left[ ig \text{tr} \mathcal{P} \oint \sum_{\mu} dx_{\mu} A_{\mu} \right] = \text{tr} \prod_{i \in C} U_i \quad (2.45)$$

となる。この  $W^C$  をウィルソンループと呼ぶ。

今、リンク場を用いてウィルソンループの期待値を計算すると、

$$\langle W^C \rangle = \frac{1}{N_c Z} \int \prod_{n, \mu} dU_{n, \mu} \left( \text{tr} \prod_{i \in C} U_i \right) e^{-S_G} \quad (2.46)$$

となる、連続極限でウィルソンループ  $W^C$  が 1 になるように  $N_c$  で規格化した。簡単のため、このウィルソンループの振る舞いを  $U(1)$  ゲージ理論 ( $N_c = 1$ ) において評価してみる。(2.44) をリンク場ではなくゲージ場で表現すると、

$$\begin{aligned} \langle W^C \rangle &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}A_{\mu} \left( \mathcal{P} \exp \left[ ig \int d^4x \sum_{\mu} J_{\mu} A_{\mu} \right] \right) e^{-S_G} \\ &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}A_{\mu} \mathcal{P} e^{-S_G + ig \int d^4x \sum_{\mu} J_{\mu} A_{\mu}} = \frac{Z(J)}{Z} \end{aligned} \quad (2.47)$$

となる。この式はウィルソンループ  $W^C$  の期待値が経路  $C$  に沿って流したソースを系に挿入した

時の分配関数とそのソースの無い分配関数の比で表せるということを意味している。したがって、ウィルソンループは外場を挿入したラグランジアンから得られるハミルトニアン  $\hat{H}(J)$ 、外場を入れていないものを  $\hat{H}$  とする。系の始状態を  $|i\rangle$ 、系の終状態を  $|f\rangle$ 、系の最低エネルギーを  $E_0$  とし、一般に量子力学的な分配関数を計算すると、

$$\lim_{t_0 \rightarrow \infty} Z = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \langle f | e^{-\hat{H}t_0} | i \rangle = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \sum_n e^{-E_n t_0} \langle f | n \rangle \langle n | i \rangle \simeq e^{-E_0 t_0} \quad (2.48)$$

となる。相関時間を引き伸ばすほど、規底状態のエネルギー  $E_0$  で指数関数的に減衰していく。この分配関数  $Z$  の振る舞いは虚時間  $t_0$  を逆温度  $\beta$  に対応をつければ分かりやすい。時間  $t_0$  を引き伸ばすことは、系の温度を小さくすることに対応していることから、系の温度を低くすればするほど量子状態は基底状態に集約されることを熱力学で知っているので、系の確率は基底状態に支配される事がわかる。(2.48) をみるとそのように振る舞っている事が分かる。

さて、もう一度ウィルソンループの期待値に戻ってみると、

$$\lim_{t_0 \rightarrow \infty} \langle W^C \rangle = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{Z[J]}{Z[0]} \simeq e^{-(V(l_0) - E_0)t_0} \quad (2.49)$$

外場のある系で外場は最低エネルギー状態を  $V(l_0)$  とし、外場の無い系では最低エネルギーを  $E_0$  とした。今の場合、空間に固定されたフェルミオンと反フェルミオン間の静的ポテンシャルであると解釈でき、静的ポテンシャルはフェルミオン間の距離  $l_0$  に依存する。この量を用いて、元の状態からの変化量を測ることができる。

低エネルギー領域におけるウィルソンループの計算は、数値的に求める方法以外でも強結合展開という方法で求めることも出来る。その結果から静的ポテンシャルの振る舞いを調べることができる。もし、ウィルソンループの期待値が次の様に振る舞うとき、

$$\lim_{t_0 \rightarrow \infty} \langle W^C \rangle \propto \exp[-\sigma(l_0 \times t_0)] \quad (2.50)$$

$\sigma$  は紐の強さと呼ばれている量であり、ウィルソンループは「面積則」にしたがうと言う。面積足にしたがうとき、フェルミオンの閉じ込めが起きていることを意味している。なぜならこの時静的ポテンシャルは

$$V(l_0) = \sigma l_0 \quad (2.51)$$

となる。フェルミオン間にひも状のゲージ場が生じて、エネルギーが紐の長さ  $l_0$  に応じて増大していく。

フェルミオンはこの紐によって拘束されてしまい、閉じ込めが起こる。一方、もしウィルソンループの期待値が次の様に振る舞うとき、

$$\lim_{t_0 \rightarrow \infty} \langle W^C \rangle \propto \exp[-c(l_0 + t_0)] \quad (2.52)$$

ウィルソンループは「周辺則」にしたがうといい、これはフェルミオンの閉じ込めが起きていな

いことを示す。なぜなら、この時静的ポテンシャルは、

$$\lim_{t_0 \rightarrow \infty} V(l_0) = c \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{l_0}{t_0}\right) \simeq c \quad (2.53)$$

となり、有限な値を持つ。これは  $l_0 \rightarrow \infty$  でも有限な有限な値をとるため、フェルミオン同士を無限に引き離すことが可能である。以上より、ウィルソンループの期待値は閉じ込め・非閉じ込めを区別する指標である。

## 2.5 有限温度場の理論

### 2.5.1 松原形式

格子 QCD で、物理的な温度  $T$  は格子全体の大きさに関係している。

それを確認するために、統計力学的分配関数  $Z$  を考える。

$$Z = \sum_n e^{-E_n/T} = \sum_n \langle n | e^{-\hat{H}/T} | n \rangle = \text{tr} e^{-\hat{H}/T} \quad (2.54)$$

ここで、 $\sum_n$  はすべての状態について和をとるという意味であり、 $E_n$  は  $\hat{H}$  の固有値であり、 $|n\rangle$  は固有ベクトルである。

(2.54) は遷移振幅の計算に非常に似た形をしている。

$$\langle \beta | e^{-\hat{H}/T} | \alpha \rangle = \prod_{x,\mu} \int dA_\mu(x) \int d\psi(x) \int d\bar{\psi}(x) \exp(iS_{\text{QCD}[A,\psi,\bar{\psi}]}) \quad (2.55)$$

(2.55) の左辺から右辺を求める計算は省略することにして、左辺の始状態と終状態を同一の状態にとり、 $t = -i/T$  と読み替える (Minkowski から Euclid に読み替えることに対応している) と、(2.54) と関連が見出すことが出来、

$$Z = \sum_n \langle n | e^{-\hat{H}/T} | n \rangle = \prod_{x,\mu} \int dA_\mu(x) \int d\psi(x) \int d\bar{\psi}(x) \exp(iS_{\text{QCD}[A,\psi,\bar{\psi}]}) \quad (2.56)$$

$$S_{\text{QCD}}^E \equiv \int d^4x \mathcal{L}_{\text{QCD}}^E \quad (2.57)$$

を満たす。したがって、時間方向に (反) 周期定期境界条件が導入されることが分かる。

$$A_\mu \left( x_4 = \frac{1}{T}, \vec{x} \right) = A_\mu (x_4 = 0, \vec{x}) \quad (2.58)$$

$$\psi_\mu \left( x_4 = \frac{1}{T}, \vec{x} \right) = -\psi_\mu (x_4 = 0, \vec{x}) \quad (2.59)$$

$$\bar{\psi}_\mu \left( x_4 = \frac{1}{T}, \vec{x} \right) = -\bar{\psi}_\mu (x_4 = 0, \vec{x}) \quad (2.60)$$



## 2.5.2 格子上の物理量の計算

例えば、力学変数を  $\phi(x)$  としたとき、エネルギーを求めるには、

$$\langle E \rangle = \frac{1}{Z} \sum_n \langle n | \hat{H} | n \rangle = \frac{1}{Z} \prod_x \int d\phi(x) H e^{-S} \quad (2.61)$$

$$Z = \frac{1}{Z} \prod_x \int d\phi(x) e^{-S} \quad (2.62)$$

という式をとけばよい。

数値計算では、モンテカルロ法というものをを用いて、 $\exp -S(\phi(x))$  の重みで配位  $\{\phi(1), \phi(2), \dots\}$  を生成する。数値計算を用いた格子 QCD ではその配位を使って単純に統計平均をとることによって、(2.61) を再現することができる。

$$\langle E \rangle \rightarrow \langle E \rangle \simeq \frac{1}{N_{\text{conf}}} \sum_{n=1}^{N_{\text{conf}}} N\{\phi(n)\} \quad (2.63)$$

## 2.5.3 格子上の温度

周期境界条件から、温度  $T$  と格子全体の大きさは関係づけられており、

$$\frac{1}{T} = N_t a_t \quad (2.64)$$

となる。ここで  $N_t$  は時間方向の格子数、 $a_t$  は時間方向の格子間隔である。

さらに、格子間隔  $a$  は格子上の結合定数と関係している。

ここで、格子間隔  $a$  と格子上の結合定数  $g_{\text{lat}}$  との関係を見ていき、 $\beta = 2N_c/g_{\text{lat}}^2$  をシミュレーションパラメータとして使うことを述べる。連続理論の結合定数  $g$  と区別するために、格子 QCD のラグランジアンに現れる裸の結合定数を  $g_{\text{lat}}$  と書くことにする。

QCD において結合定数は見ているエネルギースケール  $\mu$  に依存する。つまり連続理論での裸の結合定数  $g_0$  は繰り込みという操作によって補正を受け、繰り込まれた結合定数として  $g(\mu)$  と書かれる (running coupling constant)。以下の様に高エネルギーでは相互作用が小さく低エネルギーでは大きいことに対応している。

$$g(\mu) = \begin{cases} 0 & (\mu \rightarrow \infty) \\ \infty & (\mu \rightarrow 0) \end{cases} \quad (2.65)$$

このエネルギー依存性は次のベータ関数によって記述される。

$$\beta(g(\mu)) = \mu \frac{dg(\mu)}{d\mu} = -b_0 g(\mu)^3 - b_1 g(\mu)^5 + \dots \quad (2.66)$$

$b_0, b_1, \dots$  は摂動論より

$$b_0 = \frac{11}{16\pi^2} \quad (2.67)$$

$$b_1 = \frac{102}{16\pi^2} \quad (2.68)$$

と求められる。格子上の裸の結合定数  $g_{\text{lat}}$  は、エネルギースケールが格子上のカットオフエネルギーである  $1/a$  のときにおける繰り込まれた結合定数によって定義される。つまり、

$$g^2(1/a) = g_{\text{lat}} \quad (2.69)$$

である。この  $g_{\text{lat}}$  と格子間隔  $a$  の関係を議論するために、微分方程式 (2.66) をエネルギースケール  $1/a$  から  $\Lambda_L$  まで積分する事を考える。

$$\int_{1/a}^{\Lambda_L} \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{1}{2b_0} \int_{g_{\text{lat}}^2}^{\infty} \frac{dg^2}{g^4(a + \frac{b_1}{b_0}g^2)} \quad (2.70)$$

ただし、 $\Lambda_L$  は結合定数が発散するエネルギースケールで  $g(\Lambda_L) = \infty$  である。積分を実行して

$$-\frac{1}{2b_0g_{\text{lat}}^2} - \frac{b_1}{2b_0^2} \ln(b_0g_{\text{lat}}^2) + \mathcal{O} = \ln(\Lambda_L a) \quad (2.71)$$

となるので、

$$\Lambda_L a = (b_0g_{\text{lat}}^2)^{-\frac{1}{2b_0g_{\text{lat}}^2}} \times \exp\left(-\frac{1}{2b_0g_{\text{lat}}^2}\right) \quad (2.72)$$

である。したがって、

$$a \rightarrow 0 \quad \iff \quad g_{\text{lat}}^2 \rightarrow 0 \quad (2.73)$$

という関係が成り立つ。以上よりシミュレーションパラメータとしての  $\beta = 2N_c/g_{\text{lat}}^2$  のふるまいは、

$$\begin{aligned} \beta \text{を大きくする} &\iff \text{格子結合定数 } g_{\text{lat}} \text{を小さくする} \\ &\iff \text{格子間隔 } a \text{を小さくする} \\ &\iff \text{エネルギースケール } \frac{1}{a} \text{をあげていく} \end{aligned}$$

となる。有限温度のシミュレーションでは

$$\begin{aligned} \beta \text{を大きくする} &\iff \text{格子間隔 } a \text{を小さくする} \\ &\iff \text{時間方向の格子長さ } N_t a \text{が短くなる} \\ &\iff N_t a = \frac{1}{T} \text{より } T \text{を大きくしていく} \\ &\iff \text{温度をあげていく} \end{aligned}$$

であり、 $\beta$  を変えることは、系のエネルギースケールや温度を変えることに対応する。

本論文の解析では、 $\beta$  を相転移点直上に合わせてあるので、これ以降の温度は特別な表記が無い限り相転移温度  $T_c$  を表している。

また、SU(3) ゲージ理論の相転移は 1 次相転移であり、高温相と低温相の二相共存状態となっている。相転移は、慣例に従い、秩序変数であるポリャコフループの感受率が最大になる点を相転移点と定義する。

## 2.6 ポリャコフループ

他にも閉じ込め、非閉じ込めを区別する秩序変数の一つにポリャコフループがある。いま、有限温度 QCD を考えるため、時間方向に周期境界条件を課して、次の節で述べるように時間方向の格子の長さ  $N_t a = 1/T$  とみなす。ポリャコフループとは、空間のある点から時間方向の直線経路に沿ってリンク変数を掛け合わせ、トレースをとったもので以下の様に定義されるゲージ不変量である。

$$\Omega(\vec{n}, t) \equiv \frac{1}{N_t} \text{tr} \left[ U_{\vec{n},4} U_{\vec{n}+\hat{4},4} U_{\vec{n}+2\cdot\hat{4},4} \cdots U_{\vec{n}+(N_t-1)\cdot\hat{4},4} \right] \quad (2.74)$$

ウィルソンループの場合とまったく同様に、外部カレントをリンク変数の経路に沿って導入したとする。ポリャコフループの場合は、空間の一点に単独の重いクォークが静止していると言う物理的過程に対応している。外場を導入した系の分配関数と、真空における分配関数をそれぞれ  $Z[J]$ 、 $Z[0]$  とし、その時の自由エネルギーを  $F[J]$ 、 $F[0]$  とすると、統計力学と熱力学の関係

$$F = -T \ln Z \quad (2.75)$$

より、分配関数の比は

$$\frac{Z[J]}{Z[0]} = \frac{\exp(-F[J]/T)}{\exp(-F[0]/T)} = e^{-(F[J]-F[0])/T} \quad (2.76)$$

と計算できる。つまりこの比を見ることによって、真空中に静的なクォークを 1 つ生成するのに必要な自由エネルギーを計算することが出来る。さらにウィルソンループの場合と同様に

$$\frac{Z[J]}{Z[0]} = \frac{\int \mathcal{D}U \Omega(\vec{n}, t) e^{-S_G}}{\int \mathcal{D}U e^{-S_G}} \quad (2.77)$$

より、(2.76) の計算は、外場の無い系においてポリャコフループの期待値  $\langle \Omega \rangle$  を計算することに等しい。 $F_{\text{static}} \equiv F[J] - F[0]$  とすると、もし  $\langle \Omega \rangle = 0$  ならば  $F_{\text{static}} = \infty$  を意味し、クォークが単独で存在することはありえない。よって系は閉じ込め相にあるといえる。一方、 $\langle \Omega \rangle \neq 0$  なら、 $F_{\text{static}} \neq \infty$  と、有限のエネルギーでクォークを生成できるので非閉じ込め相となる。

$$\text{if. } \langle \Omega \rangle \begin{cases} = 0 \rightarrow \text{閉じ込め相} \\ \neq 0 \rightarrow \text{非閉じ込め相} \end{cases}$$

## 第3章 微分法

この章では、微分法 [26] を用いて格子 QCD の理論の上で熱力学量を求める。[28]

### 3.1 微分法

#### 3.1.1 潜熱と圧力ギャップ

熱力学では、エネルギー密度  $\epsilon$  と圧力  $p$  は分配関数  $Z$  を温度  $T$  と体積  $V$  で微分することによって定義される。

$$\begin{aligned}\epsilon &= -\frac{1}{V} \frac{\partial \ln Z}{\partial T^{-1}} \Big|_V \\ p &= T \frac{\partial \ln Z}{\partial V} \Big|_T\end{aligned}\quad (3.1)$$

全勝でも述べたように、格子全体の大きさが  $N_s^3 \times N_t$  であるとき、体積  $V$  と温度  $T$  は格子数  $N_{s/t}$  と格子間隔  $a_{s/t}$  との間に次のような関係を持つ。

$$V = (N_s a_s)^3 \quad (3.2)$$

$$T = \frac{1}{N_t a_t} \quad (3.3)$$

式 (3.1) の中で、格子数  $N_{s/t}$  は離散的な量であるため、分配関数の微分を実行するときには、格子間隔  $a_{s/t}$  を連続的かつ微小に変化させる必要がある。また、 $\epsilon(p)$  を求めるときには  $V(T)$  を固定して微分を実行する必要があるため、空間方向の格子間隔  $a_s$  と時間方向の格子間隔  $a_t$  が非等方な長さを持つ格子 (非等方格子) を扱う必要もある。格子上での非等方性は、空間方向と時間方向で違う結合定数を導入することで実現できる。よって、 $SU(N_c)$  ゲージ理論でのプラケット作用は次の様に書かれる

$$S = -\frac{\beta_s}{N_c} \sum_{i < j \neq 4} \sum_x \text{Re tr} P_{ij}(x) - \frac{\beta_t}{N_c} \sum_{i \neq 4} \sum_x \text{Re tr} P_{i4}(x) \quad (3.4)$$

この式を用いて、 $\epsilon, p$  を計算すると

$$\epsilon = -\frac{3N_t^4 T^4}{\xi^3} \left\{ \left( a_t \frac{\partial \beta_s}{\partial a_t} - \xi \frac{\partial \beta_s}{\partial \xi} \right) (\langle P_s \rangle - \langle P \rangle_0) + \left( a_t \frac{\partial \beta_t}{\partial a_t} - \xi \frac{\partial \beta_t}{\partial \xi} \right) (\langle P_t \rangle - \langle P \rangle_0) \right\} \quad (3.5)$$

$$p = \frac{N_t^4 T^4}{\xi^3} \left\{ \xi \frac{\partial \beta_s}{\partial \xi} (\langle P_s \rangle - \langle P \rangle_0) + \xi \frac{\partial \beta_t}{\partial \xi} (\langle P_t \rangle - \langle P \rangle_0) \right\} \quad (3.6)$$

このとき、 $\langle P_{s(t)} \rangle$  は空間 (時間) 方向のブラケットの期待値を意味していて、

$$P_s = \frac{1}{3N_c N_{\text{site}}} \sum_{i < j \neq 4} \sum_x \text{Retr} P_{ij}(x) \quad (3.7)$$

$$P_t = \frac{1}{3N_c N_{\text{site}}} \sum_{i \neq 4} \sum_x \text{Retr} P_{i4}(x) \quad (3.8)$$

$\langle P \rangle_0$  はゼロ温度の格子でのブラケットの期待値である。これらの期待値は、 $SU(N_c)$  のゲージ理論上で計算機を使って非摂動的に数値計算できる。この論文では細かく書かないが、この論文の配位生成は擬熱浴法を用いた。また、ここでは、 $a_t$  と  $\xi \equiv a_s/a_t$  というように独立変数を選んだ。

(3.5),(3.6) の中にあるゲージ結合定数の微分で表されている次の4つの係数を非等方係数 (カーシュ係数) と呼ぶ [26]。

$$a_t \frac{\partial \beta_s}{\partial a_t}, \quad a_t \frac{\partial \beta_t}{\partial a_t}, \quad \frac{\partial \beta_s}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \beta_t}{\partial \xi} \quad (3.9)$$

これらの係数は、結合定数の繰り込みによって吸収できるという要請により物理的観測量の非等方性によって計算される。繰り込みが温度に依存しないため、非等方係数は温度に依存しない。等方格子での潜熱と圧力ギャップを計算するために、 $\xi = 1$  での非等方係数を計算する必要がある。

相転移点でのシミュレーションを  $\xi = 1$  の条件の下で行い、高温相と低温相の差をとることで潜熱  $\Delta\epsilon$  と圧力ギャップ  $\Delta p$  を計算することができる。

$$\frac{\Delta\epsilon}{T^4} = -3N_t^4 \left\{ \left( a_t \frac{\partial \beta_s}{\partial a_t} - \frac{\partial \beta_s}{\partial \xi} \right) (\langle P_s \rangle_{\text{hot}} - \langle P_s \rangle_{\text{cold}}) + \left( a_t \frac{\partial \beta_t}{\partial a_t} - \frac{\partial \beta_t}{\partial \xi} \right) (\langle P_t \rangle_{\text{hot}} - \langle P_t \rangle_{\text{cold}}) \right\} \quad (3.10)$$

$$\frac{\Delta p}{T^4} = N_t^4 \left\{ \frac{\partial \beta_s}{\partial \xi} (\langle P_s \rangle_{\text{hot}} - \langle P_s \rangle_{\text{cold}}) + \frac{\partial \beta_t}{\partial \xi} (\langle P_t \rangle_{\text{hot}} - \langle P_t \rangle_{\text{cold}}) \right\} \quad (3.11)$$

ここで、 $\langle \dots \rangle_{\text{hot,cold}}$  は高温相での期待値、低温相での期待値を意味している。配位を高温相と低温相に分離する方法については後述する。上の2つの式を見ると、潜熱  $\Delta\epsilon$  圧力ギャップ  $\Delta p$  の計算には0温度の配位の期待値を引き算する必要がないことが分かる。次に、どのような方法で非等方係数を計算するかを議論する。

### 3.1.2 非等方係数

非等方係数は文献 [27] にしたがって、転移線の傾き  $r_t$  を導入することにより計算する。相転移線は、 $(\beta_s, \beta_t)$  平面上において温度が一定になる点をつないで線にしたもののうち、その温度が相転移温度  $T_c$  である線として定義される。相転移線の決定については後述する。非等方係数を非摂動的に決定する方法にマッチング法と言うものがある。[17, 18, 19, 20, 21] この方法は、非等方格子上で、空間方向と時間方向のウィルソンループを一致させる様な  $\xi$  をまず最初に決めて ( $\xi$  は  $\beta_s, \beta_t$  の関数)、それから  $\xi = 1$  の条件の下で数値的に  $\partial\gamma/\partial\xi$  を決定するという方法である ( $\gamma = \sqrt{\beta_t/\beta_s}$ )。

### 3.1.3 非等方係数の計算法

等方格子を考える。等方格子では以下の条件が満たされている。

$$a_s = a_t = a \quad (3.12)$$

$$\xi = 1 \quad (3.13)$$

$$\beta_s = \beta_t = \beta \quad (3.14)$$

これらの条件から次の式が得られる

$$\left( a_t \frac{\partial \beta_s}{\partial a_t} \right)_{\xi=1} = \left( a_t \frac{\partial \beta_t}{\partial a_t} \right)_{\xi=1} = a \frac{d\beta}{da} = 2N_c a \frac{dg^{-2}}{da} \quad (3.15)$$

ただし、 $\beta = 2N_c g^{-2}$  である。 $a \frac{dg^{-2}}{da}$  は  $\xi = 1$  でのベータ関数と呼ばれ、非摂動論的な量であり、 $SU(3)$  ゲージ理論の数値計算による研究が十分に行われている。さらに、残り二つの非等方係数は2つの和の組み合わせがどのような式になるかが知られている。

$$\left( \frac{\partial \beta_s}{\partial \xi} + \frac{\partial \beta_t}{\partial \xi} \right)_{a_t: \text{fixed}, \xi=1} = \frac{3}{2} a \frac{d\beta}{da} \quad (3.16)$$

この方程式の求め方は以下のとおり。紐の強さ  $\sigma$  を次の様に定義する。

$$\sigma a_s a_t = - \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{A} \ln \langle W_t \rangle \quad (3.17)$$

$$\sigma a_s^2 = - \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{A} \ln \langle W_s \rangle \quad (3.18)$$

$$(3.19)$$

紐の強さ  $\sigma$  は  $\xi = a_s/A_t$  に依存している。ここで、 $\langle W_{s/t} \rangle$  は空間方向と時間方向のウィルソンループの期待値を表している。 $A$  はウィルソンループの中に敷き詰める事のできるプラケットの数を表している。そして、次の式を得る。

$$\frac{\partial(\sigma a_t^2)}{\partial \xi} = - \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{A} \frac{\partial(\xi^{-1} \ln \langle W_t \rangle)}{\partial \xi} = - \frac{\partial \beta_s}{\partial \xi} C_{ts} - \frac{\partial \beta_t}{\partial \xi} C_{tt} - \frac{\sigma a_t^2}{\xi} = 0 \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial(\sigma a_t^2)}{\partial \xi} = - \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{A} \frac{\partial(\xi^{-2} \ln \langle W_s \rangle)}{\partial \xi} = - \frac{1}{\xi} \frac{\partial \beta_s}{\partial \xi} C_{ss} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial \beta_t}{\partial \xi} C_{st} - 2 \frac{\sigma a_t^2}{\xi} = 0 \quad (3.21)$$

今、独立変数は  $a_t, \xi$  に選んでいる。 $C_{xy}((x, y) = \{s \text{ or } t\})$  は次の式で  $y$  方向のプラケットの和をとることで定義される。

$$C_{x,y} = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{A \xi \langle W_x \rangle} \sum (\langle W_x P_y \rangle - \langle W_x \rangle \langle P_y \rangle) \quad (3.22)$$

今、 $\xi = 1, C_{ss} = C_{tt}$  かつ  $C_{st} = C_{ts}$  が成り立っている。よって、(3.20) と (3.21) より、次の式が求まる。

$$(C_{ss} + C_{st}) \left( \frac{\partial \beta_s}{\partial \xi} + \frac{\partial \beta_t}{\partial \xi} \right)_{a_t: \text{fixed}, \xi=1} = -3\sigma a^2 \quad (3.23)$$

また、(3.16) を  $\xi = 1$  の条件の下でとくことにより、次の式が導ける。

$$\frac{d(\sigma a^2)}{d\beta} = 2\sigma a \frac{da}{d\beta} = -C_{ss} - C_{st} \quad (3.24)$$

(3.24) と (3.23) より、(3.16) が得られる。

さらに、相転移線の傾き  $r_t$  を導入することによって、二つの和の組み合わせで決定している非等方係数を分離することが出来る。

相転移温度  $T_c = 1/[N_t a_t(\beta_s, \beta_t)]$  は格子の非等方性に依存しない。したがって、 $N_t$  を固定して相転移線に沿って結合定数を変えても  $(\beta_s, \beta_t) \rightarrow (\beta_s + \Delta\beta_s, \beta_t + \Delta\beta_t)$ 、時間方向の格子間隔  $a_t$  は変化しない。

$$da_t = \frac{\partial a_t}{\partial \beta_s} d\beta_s + \frac{\partial a_t}{\partial \beta_t} d\beta_t = 0 \quad (3.25)$$

$\xi = 1$  で相転移線の傾き  $r_t$  を次の様に定義する。

$$r_t = \frac{d\beta_s}{d\beta_t} = - \left( \frac{\partial a_t}{\partial \beta_t} \right)_{\xi=1} / \left( \frac{\partial a_t}{\partial \beta_s} \right)_{\xi=1} = \frac{d\beta_s}{d\beta_t} = - \left( \frac{\partial \beta_s}{\partial \xi} \right)_{\xi=1} / \left( \frac{\partial \beta_t}{\partial \xi} \right)_{\xi=1} \quad (3.26)$$

このとき、以下の関係を使った

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \beta_s}{\partial a_t} & \frac{\partial \beta_t}{\partial a_t} \\ \frac{\partial \beta_s}{\partial \xi} & \frac{\partial \beta_t}{\partial \xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_t}{\partial \beta_s} & \frac{\partial \xi}{\partial \beta_s} \\ \frac{\partial a_t}{\partial \beta_t} & \frac{\partial \xi}{\partial \beta_t} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \beta_t} & -\frac{\partial \xi}{\partial \beta_s} \\ -\frac{\partial a_t}{\partial \beta_t} & \frac{\partial a_t}{\partial \beta_s} \end{pmatrix}^{-1} \quad (3.27)$$

ただし、 $D = \frac{\partial \xi}{\partial \beta_t} \frac{\partial a_t}{\partial \beta_s} - \frac{\partial \xi}{\partial \beta_s} \frac{\partial a_t}{\partial \beta_t}$  である。(3.16) と (3.26) を使うことで以下の式を得る。

$$\left( \frac{\partial \beta_s}{\partial \xi} \right)_{a_t: \text{fixed}, \xi=1} = \frac{3r_t}{2(1+r_t)} a \frac{d\beta}{da} \quad (3.28)$$

$$\left( \frac{\partial \beta_t}{\partial \xi} \right)_{a_t: \text{fixed}, \xi=1} = \frac{3}{2(1+r_t)} a \frac{d\beta}{da} \quad (3.29)$$

また、相転移線の傾き  $r_t$  とベータ関数をつかって、慣習的な組み合わせである  $\epsilon - 3p$  と  $\epsilon + p$  が得られる [27]。

$$\frac{\epsilon - 3p}{T^4} = -3N_t^4 a \frac{d\beta}{da} \{ \langle P_s \rangle + \langle P_t \rangle - 2\langle P \rangle_0 \} \quad (3.30)$$

$$\frac{\epsilon + p}{T^4} = 3N_t^4 a \frac{d\beta}{da} \frac{r_t - 1}{r_t + 1} \{ \langle P_s \rangle - \langle P_t \rangle \} \quad (3.31)$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{\beta_t}{\beta_s}} \quad (3.32)$$

$$\left( \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} \right)_{a_t: \text{fixed}, \xi=1} = \left( \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} \right)_{a_s: \text{fixed}, \xi=1} = \frac{3}{4\beta} \frac{1-r_t}{1+r_t} a \frac{d\beta}{da} \quad (3.33)$$

最後に、文献 [26] で用いられた非等方係数 (カーシュ係数) の形を紹介する。

$$c_s = \left( \frac{\partial g_s^{-2}}{\partial \xi} \right)_{a_s: \text{fixed}, \xi=1} = \frac{1}{2N_c} \left\{ \beta + \frac{r_t - 2}{2(1 + r_t)} a \frac{d\beta}{da} \right\} \quad (3.34)$$

$$c_t = \left( \frac{\partial g_t^{-2}}{\partial \xi} \right)_{a_s: \text{fixed}, \xi=1} = \frac{1}{2N_c} \left\{ -\beta + \frac{1 - 2r_t}{2(1 + r_t)} a \frac{d\beta}{da} \right\} \quad (3.35)$$

ここで、非等方格子での  $\beta_s, \beta_t$  と裸のゲージ結合定数  $g_s, g_t$  の関係は

$$\beta_s = \frac{2N_c}{g_s^2} \frac{1}{\xi}, \quad \beta_t = \frac{2N_c}{g_t^2} \xi \quad (3.36)$$

である。

このように、非等方にベータ関数が決定できれば、 $(\beta_s, \beta_t)$  平面で有限温度相転移線  $r_t$  を測定し、非等方係数を決定できる。

### 3.1.4 相転移線の傾き

相転移線の傾き  $r_t$  を決定するために、相転移の秩序変数である、ポリャコフループを  $(\beta_s, \beta_t)$  の関数として計算する。

$$\Omega = z \frac{1}{N_s^3} \sum_{\vec{x}} \frac{1}{N_c} \text{tr} \prod_{t=1}^{N_t} U_4(\vec{x}, t) \quad (3.37)$$

この時の  $z$  は  $Z(N_x)$  位相因子である。したがって、ポリャコフループ  $\Omega$  は複素数である。ここで、相転移点をポリャコフループの感受率が極値になる点であると定義する。

$$\chi_\Omega = N_s^3 (\langle \Omega^2 \rangle - \langle \Omega \rangle^2) \quad (3.38)$$

ポリャコフループを使って相転移点の検索には多点再重み付け法 [37, 38] を用いた、多点再重み付けの方法は後述する。この再重み付け法を用いれば、 $\xi = 1$  の格子 (等方格子) で配位を生成するシミュレーションを行うことによって直接非等方係数を計算することが出来る。したがって、新しく特殊な配位を生成する必要が無いので、以前の研究で生成した高統計のデータを利用することも出来る。潜熱の計算には、非常に高統計のシミュレーションを行う必要があるので、これは非常に有利な点でもある。さらに、相転移線の傾きの計算にも、非等方係数の計算にもこの性質は役に立つ。

次の章で、ポリャコフループの感受率  $\chi_\Omega$  が  $(\beta_s, \beta_t)$  平面上で尾根のような形になっていることを見る。等方格子の計算では  $\gamma = 1$  の格子で計算するので、その拡張である非等方格子の計算でも  $\gamma$  を独立変数とするのが自然である。そのため  $\gamma = \sqrt{\beta_t/\beta_s}$  と  $\bar{\beta} = \sqrt{\beta_s\beta_t}$  を独立変数に選ぶ。この様に独立変数を選び、 $\gamma$  を固定して計算すると、相転移の尾根と概ね直行する向きで計算が行えるので非常に都合がよい。 $(\beta_s, \beta_t)$  平面での傾きは次の様になる。

$$\frac{d\beta_s}{d\beta_t} = \frac{d(\bar{\beta}/\gamma)}{d(\bar{\beta}\gamma)} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\gamma(d\bar{\beta}/d\gamma) - \bar{\beta}}{\gamma(d\bar{\beta}/d\gamma) + \bar{\beta}} \quad (3.39)$$



$d\bar{\beta}/d\gamma$  は  $\gamma$  と  $\bar{\beta}$  を独立変数に選んだときの相転移線の傾きである。(3.39) は  $\gamma$  に依存した量である相転移点  $\bar{\beta}_c(\gamma)$  が  $\gamma$  の多項式によって近似できることを意味している、

$$\bar{\beta}_c(\gamma) = \sum_{n=0}^{n_{\max}} f_n(\gamma - 1)^n \quad (3.40)$$

このとき、 $f_n$  フィッティングパラメータである。相転移線の傾き  $r_t$  は  $\xi = 1$  ( $\gamma = 1$ ) の時次の様に与えられる。

$$r_t = \frac{f_1 - \beta_c}{f_1 + \beta_c} \quad (3.41)$$

$n_{\max}$  や、 $\gamma$  のフィットレンジによる不定性についても本論文は確認した。

### 3.1.5 圧力ギャップ消失の条件

式 (3.11) より、圧力差  $\Delta p$  が無いとき、次の条件を満たす。

$$\frac{\partial \beta_s}{\partial \xi} \bigg/ \frac{\partial \beta_s}{\partial \xi} = -\frac{\langle P_t \rangle_{\text{hot}} - \langle P_t \rangle_{\text{cold}}}{\langle P_s \rangle_{\text{hot}}} - \langle P_s \rangle_{\text{hot}} \quad (3.42)$$

左辺は (3.26) の関係を使って変形できて、

$$\frac{\langle P_t \rangle_{\text{hot}} - \langle P_t \rangle_{\text{cold}}}{\langle P_s \rangle_{\text{hot}} - \langle P_s \rangle_{\text{cold}}} = -r_t \quad (3.43)$$

この関係を満たすとき  $\Delta p = 0$  が満たされたと言える。これも、次の章で確認する。

### 3.1.6 多点再重み付け法

$(\beta_s, \beta_t)$  平面上で相転移線を見つけるために、秩序変数の期待値と感受率を  $(\beta_s, \beta_t)$  の連続的な関数として計算する必要がある。しかし、格子シミュレーションでは、再重み付け法の使用が結合定数を連続的に変化させるのに役立つ。一次相転移点のまわりでは、高温相と低温相の間でフリップフロップが起きてしまうため、再重み付け因子が大きくなってしまい、非常に狭い範囲でしか、再重み付けの処方を実施することが出来ない。ここで、参考文献の [22, 23] によると、相転移点のまわりで、 $\beta_s, \beta_t$  を動かす時、相転移線に沿って  $\beta_s, \beta_t$  を動かすなら、フリップフロップによる揺らぎが最小化されると書かれている。これは、相転移線を決定する時に再重み付け法が有効であることを示している。

さらに、再重み付け法が結合定数の空間で適用できる範囲を拡大するために、多点再重み付け法を採用した。ここで、観測量  $X = (X_1, X_2, \dots)$  のヒストグラムを次の様に定義する。

$$w(X; \beta) = \int \mathcal{D}U \prod_i \delta(X_i - \hat{X}_i) e^{-S} \quad (3.44)$$

ここで  $\hat{X} = (\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots)$  は  $X$  の演算子である。ここでは単純に、 $(\beta_s, \beta_t)$  はベクトル  $\vec{\beta}$  の成分を表し、 $(\vec{\beta} \cdot \vec{P}) = \beta_s P_s + \beta_t P_t$  という記法を使う。ここで、(3.44) の中の作用は  $S = -3N_{\text{site}}(\vec{\beta} \cdot \vec{P})$

である。\$w(X; \vec{\beta})\$ の分配関数は、\$dX = \prod\_i dX\_i\$ を使って、\$Z(\vec{\beta}) = \int w(X; \vec{\beta}) dX\$ 似よって与えられ、\$X\$ の分布関数は \$Z^{-1}w(X; \vec{\beta})\$ と与えられる。観測可能量 \$\mathcal{O}[\hat{X}]\$ の期待値は次の式から計算できる。

$$\langle \mathcal{O}[\hat{X}] \rangle_{\vec{\beta}} = \frac{1}{Z(\vec{\beta})} \int \mathcal{O}[\hat{X}] w(X; \vec{\beta}) dX \quad (3.45)$$

ここで、広い範囲の \$X\$ で信頼性のある \$w(X; \vec{\beta})\$ を得るために、複数の \$\beta\$ でシミュレーションした配位を組み合わせた再重み付け法の式を作る必要がある。つまり、\$N\_{\text{sp}}\$ 個のシミュレーション点 \$\vec{\beta}\_i = (\beta\_{si}, \beta\_{ti})\$ 箇所、配位数 \$N\_i (i = 1, 2, \dots, N\_{\text{sp}})\$ 個の配位を組み合わせるということである。ここで、\$X\$ の観測可能量として \$P\_s\$ と \$P\_t\$ を選び、その二つの組み合わせである \$\vec{P} = (P\_s, P\_t)\$ を \$X\$ として定義しなおす。(3.44) より、\$\vec{\beta}\_i\$ の確率分布関数は次の様に与えられる。

$$Z^{-1}(\vec{\beta}_i) w(\vec{P}, X; \vec{\beta}_i) = Z^{-1}(\vec{\beta}_i) e^{3N_{\text{site}}(\vec{\beta}_i \cdot \vec{P})} w(\vec{P}, X; \vec{\beta}_i) \quad (3.46)$$

これらの確率分布関数を \$N\_i\$ の重みで足しあげる、

$$\sum_{i=1}^{N_{\text{sp}}} N_i Z^{-1}(\vec{\beta}_i) w(\vec{P}, X; \vec{\beta}_i) = e^{-3N_{\text{site}}(\vec{\beta} \cdot \vec{P})} \sum_{i=1}^{N_{\text{sp}}} N_i Z^{-1}(\vec{\beta}_i) e^{3N_{\text{site}}(\vec{\beta}_i \cdot \vec{P})} w(\vec{P}, X; \vec{\beta}_i) \quad (3.47)$$

そして次の式を得る

$$w(\vec{P}, X; \vec{\beta}_i) = w(\vec{P}, X; \vec{B}) \sum_{i=1}^{N_{\text{sp}}} N_i Z^{-1}(\vec{\beta}_i) w(\vec{P}, X; \vec{\beta}_i) \quad (3.48)$$

ここで \$\vec{B} = (\vec{\beta}\_1, \dots, \vec{\beta}\_{N\_{\text{sp}}})\$ であり、

$$G(\vec{P}; \vec{\beta}, \vec{B}) = \frac{e^{3N_{\text{site}}(\vec{\beta} \cdot \vec{P})}}{\sum_{i=1}^{N_{\text{sp}}} N_i e^{3N_{\text{site}}(\vec{\beta}_i \cdot \vec{P})} Z^{-1}(\vec{\beta}_i)} \quad (3.49)$$

(3.47) の左辺は、シミュレーションパラメーターの差を無視して、すべての配位で描いた素朴なヒストグラムを与える。そして、\$\vec{\beta}\$ でのヒストグラムである \$w(\vec{P}, X; \vec{\beta})\$ は、素朴なヒストグラムに \$G(\vec{P}; \vec{\beta}, \vec{B})\$ することで得られる。

多点再重み付け法での分配関数は、

$$Z(\vec{\beta}) = \sum_{i=1}^{N_{\text{sp}}} N_i \int G(\vec{P}; \vec{\beta}, \vec{B}) Z^{-1}(\vec{\beta}_i) w(\vec{P}, X; \vec{\beta}_i) dP dX = \sum_{i=1}^{N_{\text{sp}}} N_i \langle G(\vec{P}; \vec{\beta}, \vec{B}) \rangle_{(\vec{\beta}_i)} \quad (3.50)$$

と与えられる。右辺はちょうど、\$G(\vec{P}; \vec{\beta}, \vec{B})\$ の素朴な和になっている。\$\vec{\beta}\_i\$ の分配関数は以下の様にして決める、まず (3.50) の \$\vec{\beta}\$ をシミュレーション点のいずれかにする、

$$Z(\vec{\beta}_i) = \sum_{k=1}^{N_{\text{sp}}} N_k \langle G(\vec{P}; \vec{\beta}_i, \vec{B}) \rangle_{(\vec{\beta}_k)} = \sum_{k=1}^{N_{\text{sp}}} N_k \left\langle \frac{e^{3N_{\text{site}}(\vec{\beta}_i \cdot \vec{P})}}{\sum_{j=1}^{N_{\text{sp}}} N_j e^{3N_{\text{site}}(\vec{\beta}_j \cdot \vec{P})} Z^{-1}(\vec{\beta}_j)} \right\rangle_{(\vec{\beta}_k)} \quad (3.51)$$

ここで、 $i = 1, 2, \dots, N_{\text{sp}}$  である。 $f_i = \ln Z(\vec{\beta}_i)$  とするとさらに上の式は書き直せて、

$$1 = \sum_{k=1}^{N_{\text{sp}}} N_k \left\langle \frac{1}{\sum_{j=1}^{N_{\text{sp}}} N_j \exp[3N_{\text{site}}((\hat{\beta}_j - \hat{\beta}_i) \cdot \vec{P}) - f_i - f_j]} \right\rangle_{(\vec{\beta}_k)} \quad (i = 1, 2, \dots, N_{\text{sp}}) \quad (3.52)$$

となる。この式を満たすような  $f_i$  を決めるために、適切な初期値から数値的反復法を使って真の値に近づけていく。気をつけなければいけないのは、 $f_i$  を計算する際に、どれか一つは固定していなければいけないことである。なぜなら、 $f_i$  は常に2つの引き算の組として現れるので、相対的に決まっていれば良いからである。

したがって、 $\mathcal{O}[\vec{P}, \hat{X}]$  の期待値は次の様に書かれる。

$$\mathcal{O}[\vec{P}, \hat{X}]_{(\beta)} = \frac{1}{Z(\vec{\beta})} \sum_{i=1}^{N_{\text{sp}}} N_i \left\langle \mathcal{O}[\vec{P}, \hat{X}] G(\vec{P}; \vec{\beta}, \vec{B}) \right\rangle_{(\hat{\beta}_i)} \quad (3.53)$$

## 3.2 微分法の結果

### 3.2.1 シミュレーション点

表 3.1: 配位生成を行ったときの格子サイズ  $N_s^3 \times N_t$  と生成した配位数  $N_{\text{conf.}}$ .

$N_s$	$N_t$	$\beta$	$N_{\text{conf.}}$
48	6	5.89379	201200
64	6	5.893	30000
64	6	5.89379	150000
64	6	5.894	215000
64	6	5.895	47000
48	8	6.056	200000
48	8	6.058	200000
48	8	6.06	200000
48	8	6.062	200000
48	8	6.065	220000
48	8	6.067	200000
64	8	6.0585	95000
64	8	6.061	2060000
64	8	6.063	300000
64	8	6.065	510000
64	8	6.068	1620000
64	12	6.3335	324000
64	12	6.335	290000
64	12	6.3375	10000
96	12	6.332	45000
96	12	6.334	474000
96	12	6.335	534000
96	12	6.336	336000
96	12	6.338	169000

本研究では、等方格子上 ( $\beta_s = \beta_t = \beta, \xi = a_s/a_t = 1$ ) での SU(3) ゲージ理論のシミュレーションを行った。相転移点の周りのいくつかの点でシミュレーションを行い多点再重み付け法を使うことでより精密に相転移点での結果を確認できるようにした。連続極限をとるために時間方向の格子の大きさが違う格子 ( $N_t = 6, 8, 12$ ) で計算を行い、連続極限への外挿を試みた。さらに、時間方向の格子の大きさが同じで異なる 2 つの体積の格子での配位生成を行い、それらの体積依存性を調べ、体積無限大極限をとった。配位生成には擬熱浴法を用いて、ポリヤコフープとブラケットの空間平均を繰り返し出力した。

一次相転移点近傍でシミュレーションを行うと、計算結果が高温相の結果と低温相の結果の間を行ったり来たりする、これをフリップフロップと言う。論理回路など、他の分野でもフリップフロップという言葉があるが、格子計算でも同じイメージで、シーソーのように高温相と低温相が交互に出てくることを意味している。相転移点近傍でのシミュレーションでは、そのフリップ

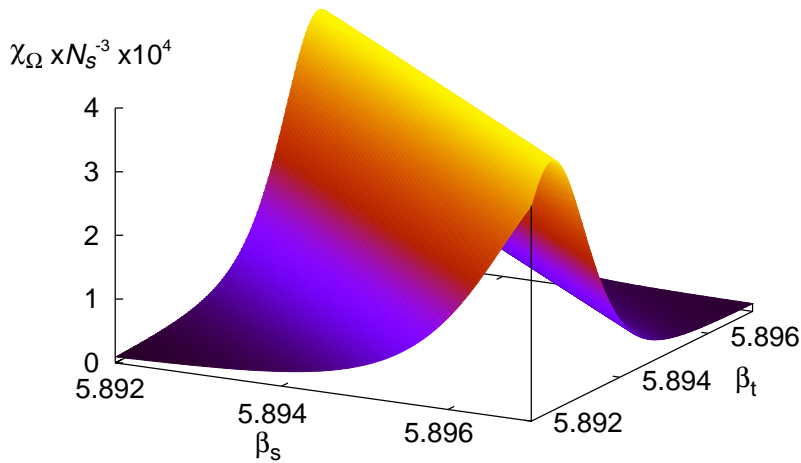


図 3.1: 格子サイズ  $64^3 \times 6$  でのポリヤコフープ感受率  $\chi_\Omega$  を  $(\beta_s, \beta_t)$  の関数としてプロットした図

ロップが起きるため、フリップフロップの回数が少ないうちに、配位生成を打ちきってしまうと、統計的に信頼できるデータとは言えなくなってしまう。そのため、フリップフロップが起きるような相転移点近傍のシミュレーションを行うときは、統計的に信頼できる回数フリップフロップが起きるまで、配位をためる必要がある。今回の計算では、一番フリップフロップが少ないシミュレーション点 ( $96^3 \times 12, \beta = 6.335$ ) では 16 回、一番多いシミュレーション点 ( $64^3 \times 8, \beta = 6.061$ ) では 116 回起きるまで配位を貯めた。フリップフロップはアスペクト比 ( $N_x/N_t$ ) が小さいほど、より頻繁に起きる傾向にある。今回貯めた配位は十分な回数フリップフロップを起こしていると言える。今回の誤差評価はジャックナイフ法を用いて行った。ビンサイズは 1000 を採用した、この数は、フリップフロップが起きるまでの統計数よりもはるかに小さい数である。

今回、体責無限大極限をとるために QCDPAX コラボレーションが生成した  $36^2 \times 48 \times 6$  の配位を用いる。[25]

### 3.2.2 相転移線と非等方係数

図 3.1 は、 $(\beta_s, \beta_t)$  の関数として描いたポリヤコフープの感受率  $\chi_\Omega$  である。SU(3) ゲージ理論の一次相転移なので  $\chi_\Omega$  のピークがとても綺麗に見える。図 3.2 は等高線で  $\chi_\Omega$  を描いたものである。明るい色の部分は  $\chi_\Omega$  が高いことを意味している。相転移点  $\bar{\beta}_c(\gamma)$  は  $\chi_\Omega$  が極値を持つ点と定義した。結果は、図 3.2 に実線で描いている部分で、破線は相転移線の誤差を表している。

前の章で議論した方法で、相転移線  $r_t$  を決定する。今回多項式フィットを行った、本研究で選んだ範囲でフィットを行うと、統計誤差は十分に小さく、相転移線は直線であるとみなせた。フィット範囲は表 3.2 にかいてある。フィット範囲の選び方で結果に違いがある場合があるので、フィット範囲依存性を調べて、それが小さいことを確かめた。また、多項式フィットだと、何次多項式で

フィットするかの依存性も調べた。フィットの最高次数を  $n_{\max} = 1 - 7$  まで変化させて結果を比較した。 $n_{\max} \geq 3$  の時、フィットがうまく働いていることを確認した。 $n_{\max} = 3$  と 4 の間では、 $r_t$  の結果が 0.5% のずれしかなかった、これは統計誤差と比べて非常に小さいずれである。したがって、 $n_{\max} = 3$  を採用した。表 3.2 には相転移点  $\beta_c$  と相転移線  $r_t$  の結果もかいてある。表を見ると、 $r_t$  の空間体積依存性は、はっきりとは見えないことが分かる。

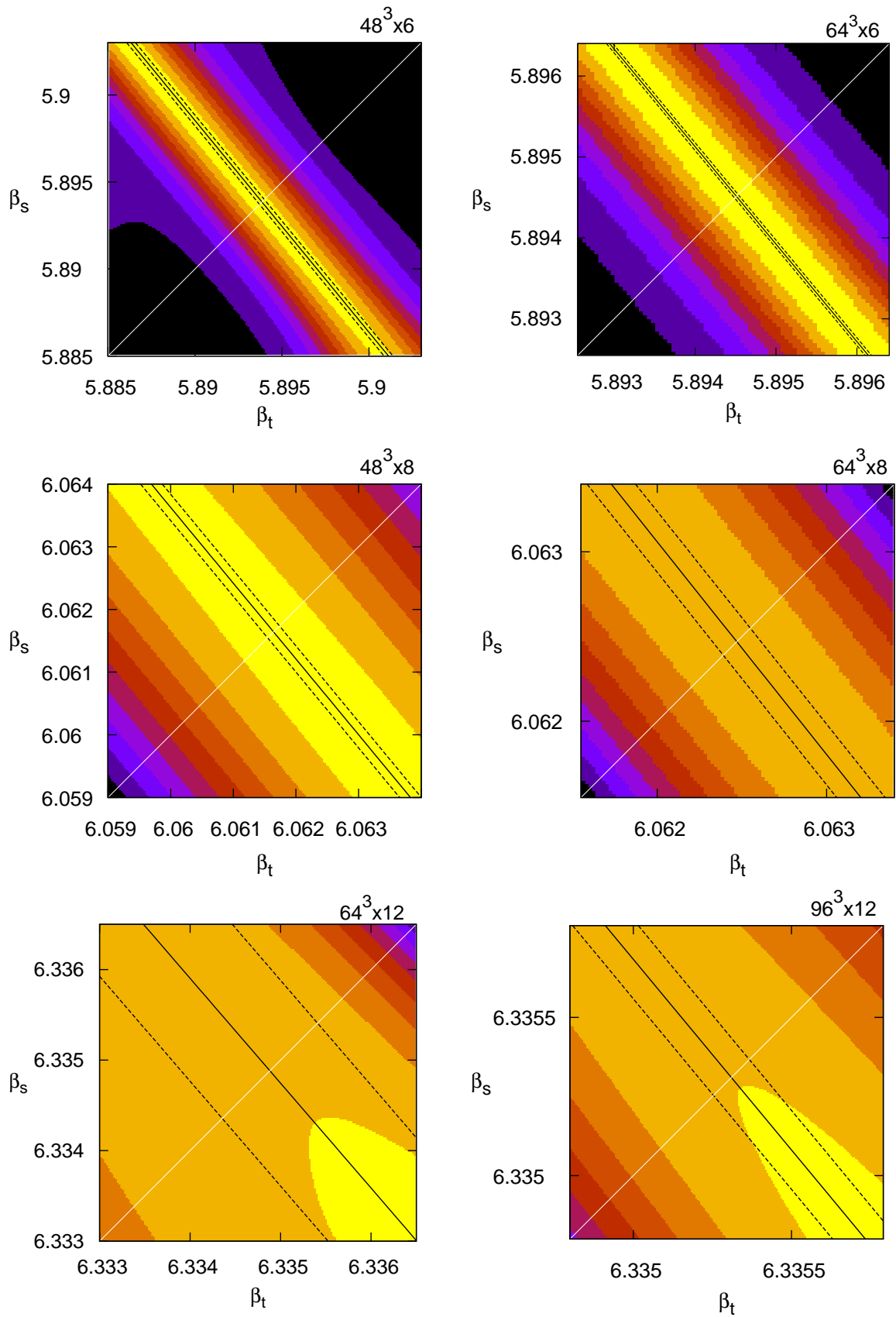


図 3.2: ポリヤコフループの感受率を  $(\beta_s, \beta_t)$  の関数として等高線であらわした図。格子サイズは  $48^3 \times 6$  (左上),  $64^3 \times 6$  (右上),  $48^3 \times 8$  (中段左),  $64^3 \times 8$  (中段右),  $64^3 \times 12$  (下段左),  $96^3 \times 12$  (下段右) である。黒の実線が相転移線で、破線はその誤差である。

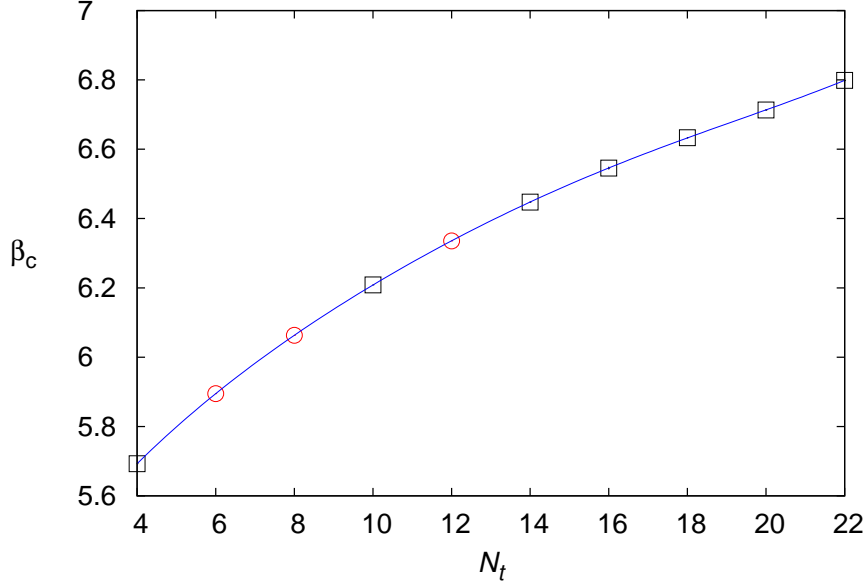


図 3.3: 相転移点  $\beta_c$  を  $N_t$  の関数としてプロットした図。青の実線がフィッティング関数である。 $N_t = 4, 10$  と  $14 - 22$  の点は [24] の結果を使わせていただいた。

$r_t$  の場合とは違って、 $\beta_c$  は有限体積理論にしたがって、空間体積に応じて変化することを期待している。実際、表 3.2 を見ると  $\beta_c$  は空間体積に応じて変化している。そのため、ベータ関数を求める際には、体積無限大極限をとってから、ベータ関数を求めた。今回  $N_t = 6, 8, 12$  の臨界ベータを次の様に採用した  $\beta_c(N_t, \infty) = 5.98425(40), 6.06307(28), 6.33552(47)$ 。

臨界ベータの  $N_t$  依存性は図 3.3 に示してある。赤い点で示した  $\beta_c$  は我々が求めた  $\beta_c$  である。青の点で示してある  $N_t = 4, 10, 14 - 22$  のデータは先行研究のデータを使わせていただいた。この図から、 $a = 1/(N_t T_c)$  の関係を使って非摂動的なベータ関数を計算する。図 3.3 のフィットに使った関数は

$$\beta_c(N_t, \infty) = \sum_{n=0}^{n_{\max}} b_n N_t^n \quad (3.54)$$

表 3.2: 臨界点  $\beta_c$  での  $r_t$  at  $\xi = 1$  とブラケットの比  $(\langle P_t \rangle_{\text{hot}} - \langle P_t \rangle_{\text{cold}}) / (\langle P_s \rangle_{\text{hot}} - \langle P_s \rangle_{\text{cold}})$  の表。“ $\gamma$ -range” は傾き  $r_t$  を決めるときにフィットを実行した  $\gamma$  の幅である。 $r_t$  と  $(\langle P_t \rangle_{\text{hot}} - \langle P_t \rangle_{\text{cold}}) / (\langle P_s \rangle_{\text{hot}} - \langle P_s \rangle_{\text{cold}})$  を比較すると圧力差が 0 になっていることが分かる。

lattice	$\beta_c(N_t, V)$	$\gamma$ -range	$r_t$	$\frac{\langle P_t \rangle_{\text{hot}} - \langle P_t \rangle_{\text{cold}}}{\langle P_s \rangle_{\text{hot}} - \langle P_s \rangle_{\text{cold}}}$
$48^3 \times 6$	5.89383(24)	0.999–1.001	-1.2020(39)	1.216(50)
$64^3 \times 6$	5.894512(40)	0.999–1.001	-1.2022(52)	1.2053(38)
$48^3 \times 8$	6.06160(18)	0.9998–1.0002	-1.209(33)	1.204(14)
$64^3 \times 8$	6.06247(14)	0.9998–1.0002	-1.255(37)	1.2344(66)
$64^3 \times 12$	6.3349(11)	0.9998–1.0002	-1.16(61)	1.327(84)
$96^3 \times 12$	6.33533(11)	0.9999–1.0001	-1.204(53)	1.283(53)



表 3.3: 相転移近傍における  $\xi = 1$  でのベータ関数と非等方係数の結果の表。

lattice	$\beta_c(N_t, V)$	$a(d\beta/da)$	$\partial\gamma/\partial\xi$	$c_s$	$c_t$
$36^2 \times 48 \times 6$	5.89379(34)	-0.5483(8)	0.704(10)	0.375(10)	-0.268(10)
$48^3 \times 6$	5.89383(24)	-0.5484(8)	0.761(15)	0.303(28)	-0.257(28)
$64^3 \times 6$	5.894512(40)	-0.5486(8)	0.760(20)	0.258(17)	-0.213(17)
$48^3 \times 8$	6.06160(18)	-0.6210(8)	0.813(127)	0.215(117)	-0.163(117)
$64^3 \times 8$	6.06247(14)	-0.6214(8)	0.681(99)	0.349(88)	-0.297(88)
$64^3 \times 12$	6.3349(11)	-0.7164(12)	1.16(450)	-0.16(414)	0.22(414)
$96^3 \times 12$	6.33532(11)	-0.7165(12)	0.915(239)	0.119(228)	-0.060(228)

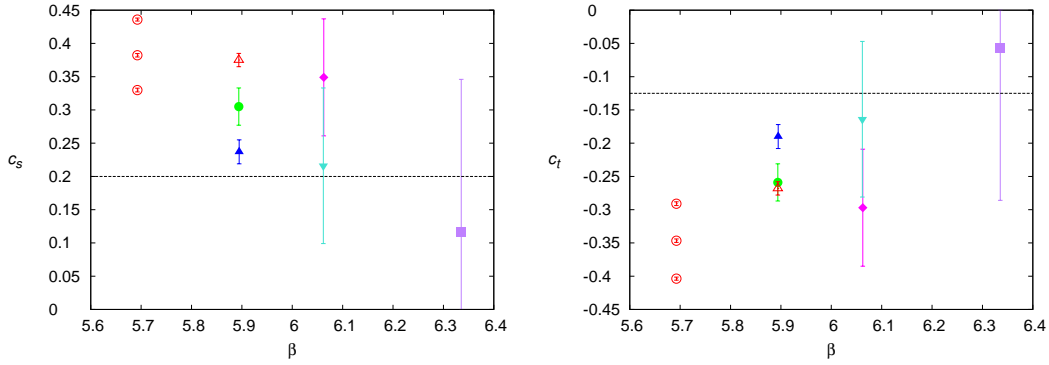


図 3.4: カーシュ係数の計算結果  $c_s$  (左)  $c_t$  (右) 点線は摂動論の値

$b_n$  はフィット係数である。フィットの結果は図 3.3 に青い実線で示してある。本論文で採用した  $n_{\max}$  は 5 である、この時  $\chi^2/\text{dof} = 1.3$  である。フィットに使う最高次数の依存性が最終結果に比べて小さいことも確認した。 $a(d\beta/da)$  の値は  $n_{\max} = 6$  にしたとき、5 の時との差は、 $N_t = 6, 8$  の時 0.2% で  $N_t = 12$  のとき 0.6% であった。このずれは、 $r_t$  の統計誤差よりもはるかに小さい。

ベータ関数と相転移線の傾き  $r_t$  を式 (3.34)、(3.35) にいれて、非等方係数を計算した結果を表 3.3 に書いてある。表には、先行研究で計算された格子である  $24^2 \times 36 \times 4$  のベータ関数と非等方係数の結果も載せてある。

カーシュ係数  $c_s$ 、 $c_t$  の結果を図 3.4 にプロットした。シンボルのうち、白抜きになっているのは先行研究 [27] のデータであり、それ以外は我々が求めた結果である。 $\beta_c = 5.69425$  に点が 3 点あるのは、ベータ関数の求め方によって値が変わってしまい、それらすべてが書いてある。 $\beta_c$  が大きくなると、格子間隔が短くなるのでベータ関数の求め方による不定性は抑えられる。破線で示してあるのは、摂動論から求めたカーシュ係数である。大まかな傾向として、 $\beta_c$  が増加するにしたがって各点は摂動論の値に近づいていっている。

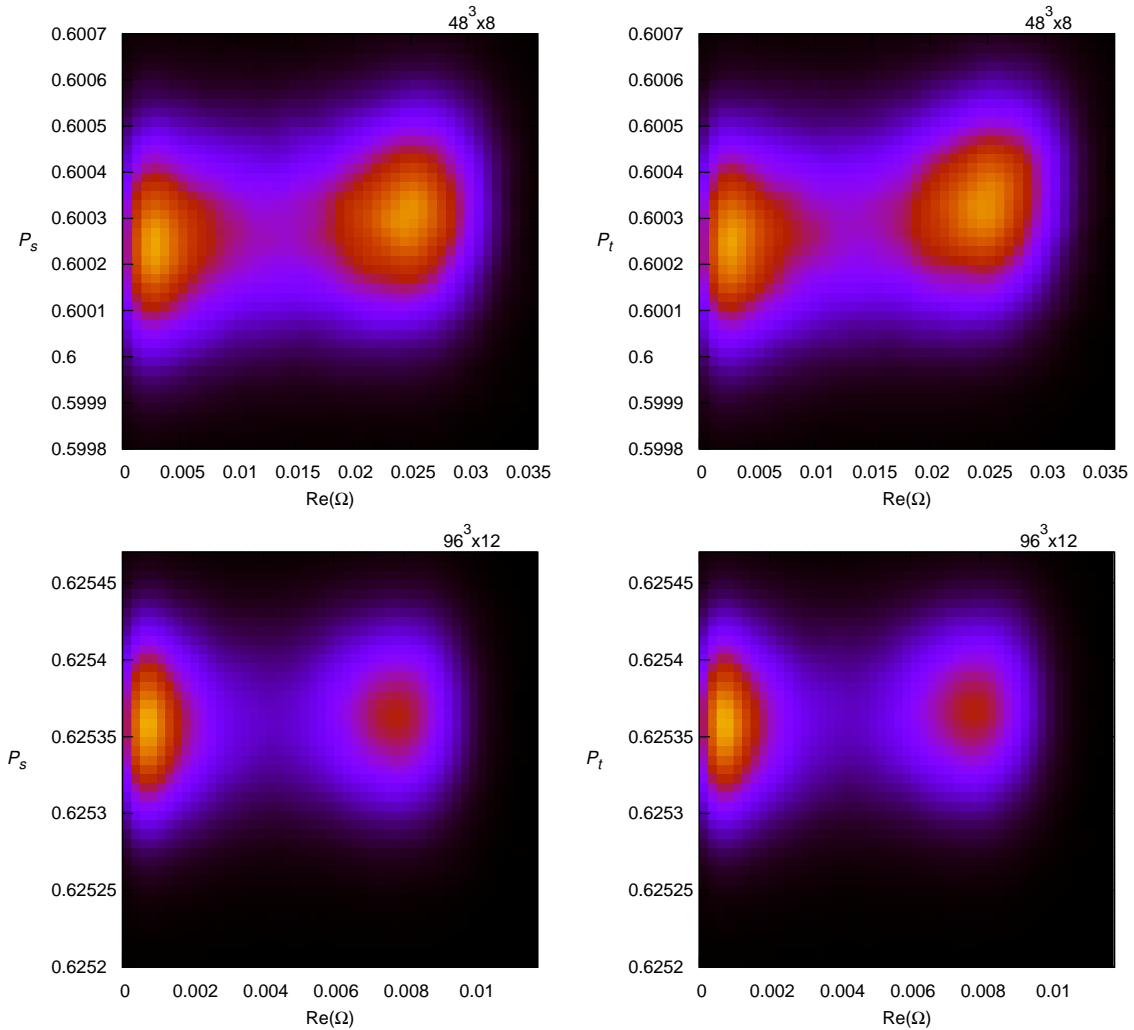


図 3.5: 相転移近傍での  $(P_s, \text{Re}(\Omega))$  (左) と  $(P_t, \text{Re}(\Omega))$  (右) のヒストグラム。  $48^3 \times 8$  (上段) と  $96^3 \times 12$  (下段)

### 3.2.3 一次相転移点近傍での相の分離方法

潜熱と圧力差を求めるために、一次相転移点近傍で高温相の配位と低温相の配位を分離する必要がある。式 (3.10)、(3.11) より、 $\Delta\epsilon/T^4$ 、 $\Delta p/T^4$  は  $N_t^4$  に比例することが分かる、したがってプラケットのギャップは連続極限に近づくほど  $1/N_t^4$  に比例して小さくなる。この性質は、 $N_t$  が大きくなればなるほど測定量の精度を高くしなければいけないことを意味している。

図 3.5 は、 $(P_s, \text{Re}(\Omega))$ 、 $(P_t, \text{Re}(\Omega))$  平面でのヒストグラムを等高線で表したものである。多点再重み付け法を用いて、 $\beta$  を相転移点に調整している。2つの頂点は高温相と低温相に対応していて、2つの頂点は  $\text{Re}(\Omega)$  方向にはとても良く分離しているが、プラケットの方向では相が重なりあっている。

2つの相を分離するために、ポリヤコフループの時間履歴にカットを導入した。図 3.6 の赤い実線が相転移点近傍でポリヤコフループの一部を表したものである。図を見ると、 $48^3 \times 8$  の格子では相の分離が難しい事が分かる。ポリヤコフループのゆらぎを取り除くために、 $\text{Re}(\Omega)$  について、ある配位の前後 250 配位 (合計 501 配位) 平均をとった。結果は図 3.6 に青い実線で描いてある。こ

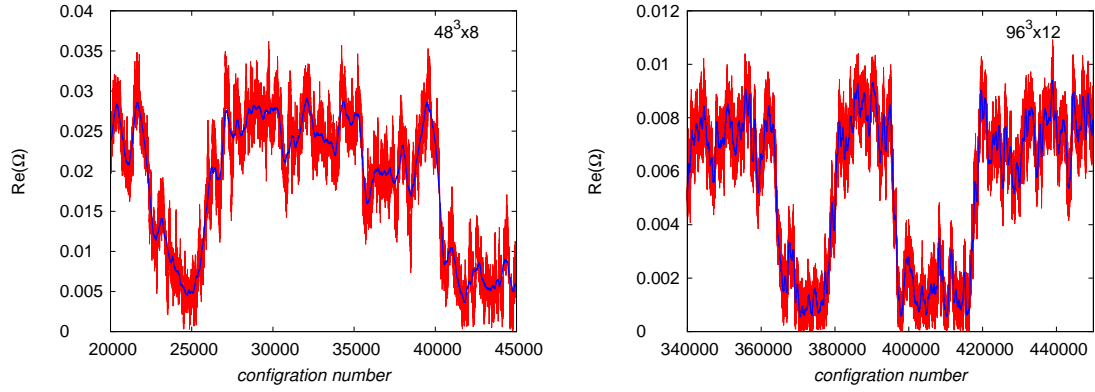


図 3.6: ポリヤコフープ  $\text{Re}\Omega$  の時間発展の図の一部の図。格子の大きさとしミュレーション点は  $48^3 \times 8$ 、 $\beta = 6.020$  (左) と  $96^3 \times 12$ 、 $\beta = 6.335$  (右) である。青の実線は  $\pm 250$  配位ずつ平均をとってならしたポリヤコフープである。

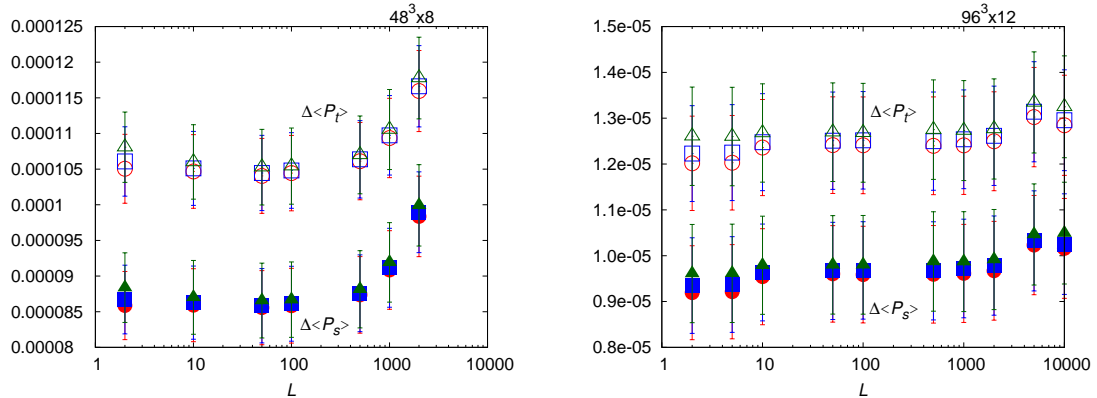


図 3.7: 空間方向のプラケットの相の間の差の期待値  $\Delta\langle P_s \rangle$  と時間方向の期待値  $\Delta\langle P_t \rangle$  相の分離方法についての系統誤差の評価の図。格子サイズは  $48^3 \times 8$  (左)  $96^3 \times 12$  (右)。丸いシンボルはポリヤコフープ  $\text{Re}\Omega$  のヒストグラムを描き、2つのピーク間の最小値にカットを導入し中間状態をとりのぞかない場合の結果。四角のシンボルは本論文で採用した範囲の中間状態を除いた結果 (表 3.4)。三角のシンボルは四角よりも3倍広い範囲の中間状態を取り除いた結果である。

ここで、高温相 (低温相) の定義を、ならされたポリヤコフープの値がカット幅の上限 (下限) より大きい (小さい) 配位、と決めた。ならされたポリヤコフープの値が閾値の間に含まれる様な配位は、中間状態として破棄する。本論文で採用された閾値は表 3.4 から読み取れる。

それぞれのシミュレーションポイントで相を分離した後に、多点再重み付け法を使って配位を結合し、それぞれの相の期待値を計算する。表 3.4 にそれぞれの相でのポリヤコフープの期待値が載せてある。 $\Delta\langle P_{s/t} \rangle \equiv \langle P_{s/t} \rangle_{\text{hot}} - \langle P_{s/t} \rangle_{\text{cold}}$  の結果は表 3.5 に載っている。

相分離の手順による系統的な不定性を推察するために、ポリヤコフープの平均をとる数や、閾値の幅を変化させて、どの程度結果が変わるかを確認した。ポリヤコフープの値を平均をとってならす幅を  $L$  とする。 $L$  は中間状態が続く時間よりは長い、低温相または高温相であり続ける時間よりは短い。図 3.7 は、相転移点近傍での  $\Delta\langle P_s \rangle$  と  $\Delta\langle P_t \rangle$  の  $L$  依存性を見ている。丸いシンボルは、相の分離を  $\text{Re}\Omega$  のヒストグラムを描いて、図の上で谷になっている部分で判断して計算した結果 (閾値の幅が 0)、四角いシンボルは閾値を表 3.4 のとおりに決めて計算結果 (採用した

表 3.4: 相転移点でのポリヤコフープの高温相と低温相の期待値の表。閾値も載せてあり、(LB(hot)) は高温相と判断するポリヤコフープの最低値 (UB(cold)) 低温相と判断する最高値のことである。

lattice	$\langle \Omega \rangle_{\text{hot}}$	$\langle \Omega \rangle_{\text{cold}}$	LB(hot)	UB(cold)
$48^3 \times 6$	0.04485(54)	0.00550(16)	0.0249	0.0231
$64^3 \times 6$	0.04568(37)	0.00697(25)	0.0241	0.0239
$48^3 \times 8$	0.02312(18)	0.00640(15)	0.0138	0.0136
$64^3 \times 8$	0.02102(12)	0.004769(56)	0.0126	0.0124
$64^3 \times 12$	0.007412(90)	0.002075(53)	0.0039	0.0037
$96^3 \times 12$	0.007256(79)	0.001482(48)	0.0039	0.0037

表 3.5: 相転移点近傍での高温相と低温相のブラケットの期待値と、その差の期待値の表。

lattice	$\langle P_s \rangle_{\text{cold}}$	$\langle P_t \rangle_{\text{cold}}$	$\langle P_s \rangle_{\text{hot}}$	$\langle P_t \rangle_{\text{hot}}$	$\Delta \langle P_s \rangle$	$\Delta \langle P_t \rangle$
$48^3 \times 6$	0.58111347(96)	0.5811273(10)	0.5814088(76)	0.5814875(91)	0.0002954(76)	0.0003602(92)
$64^3 \times 6$	0.58119760(23)	0.58121330(23)	0.58151940(47)	0.58160140(50)	0.0003215(71)	0.0003876(78)
$48^3 \times 8$	0.6002544(39)	0.6002574(38)	0.6003397(26)	0.6003617(31)	0.0000912(55)	0.0001097(56)
$64^3 \times 8$	0.6002977(15)	0.6003163(16)	0.60023734(89)	0.60024163(90)	0.0000612(17)	0.0000755(18)
$64^3 \times 12$	0.6253174(36)	0.6253176(36)	0.6253256(22)	0.6253293(22)	0.0000103(24)	0.0000137(25)
$96^3 \times 12$	0.6253577(12)	0.6253584(12)	0.6253674(12)	0.6253710(12)	0.0000096(11)	0.0000124(11)

閾値)、三角のシンボルは、閾値を本論文で採用した幅の3倍広くして計算した結果である。図を見ると、中間状態として取り除く領域が広がると、 $\Delta \langle P_{s/t} \rangle$  の値は心持ち大きくなる、しかし、その変化は統計誤差に比べるととても小さい。これは、私たちが計算した格子では、閾値の幅による依存性は無視できるほどに小さいということを意味している。また、 $L \leq 501$  で、値が一定なので本論文では  $L = 501$  を採用した。

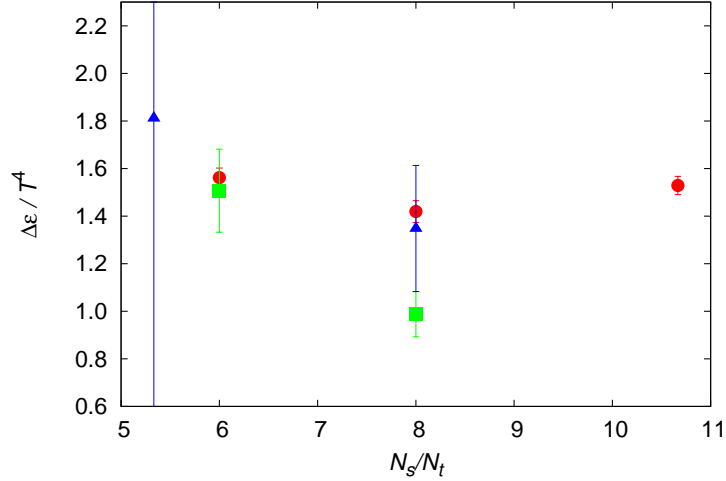


図 3.8: 潜熱  $\Delta\epsilon/T^4$  (丸印) と、 $\Delta(\epsilon - 3p)/T^4$ (四角) を  $N_t = 6, 8, 12$  のデータを  $N_s/N_t$  の関数として描画した図。  $N_t = 6$  が赤色、8 が緑色、12 が青色のシンボルである。

表 3.6: 非摂動非等方係数を用いて熱力学量の相の間の差を計算した結果

lattice	$\beta_c(N_t, V)$	$\Delta\epsilon/T^4$	$\Delta p/T^4$	$\Delta(\epsilon + p)/T^4$	$\Delta(\epsilon - 3p)/T^4$
$36^2 \times 48 \times 6$	5.89379(34)	1.56(4)	-0.003(17)	1.56(5)	1.57(4)
$48^3 \times 6$	5.89383(24)	1.42(5)	0.007(11)	1.43(5)	1.40(4)
$64^3 \times 6$	5.894512(40)	1.53(4)	0.006(7)	1.53(4)	1.51(3)
$48^3 \times 8$	6.06160(18)	1.51(17)	0.009(43)	1.52(21)	1.48(8)
$64^3 \times 8$	6.06247(14)	0.99(10)	-0.02(3)	0.97(12)	1.04(3)
$64^3 \times 12$	6.3349(11)	1.81(509)	0.24(172)	2.05(681)	1.09(21)
$96^3 \times 12$	6.33532(11)	1.35(27)	0.11(8)	1.45(34)	1.03(10)

### 3.2.4 潜熱と圧力差

非摂動論的な非等方係数とブラケットのギャップを使って、潜熱  $\Delta\epsilon$  と圧力差  $\Delta p$  を計算する。 $36^2 \times 48 \times 6$  の格子の結果は先行研究の値を用いた。

微分法の先行研究 [27] では、摂動論的に求めた非等方係数を使って、相転移点直上での圧力差を計算したが、0 にならなかったと言う問題があった。しかし、本論文では非摂動論的に求めた非等方係数を使って圧力差を計算することによって、その問題を解決した。表 3.6 にその結果を載せてあるが、 $\Delta p/T^4$  の値がすべて 0 とコンシステントになっている。また、式 (3.43) の確認も行った、結果は表 3.2 に載せてある。

さらに、熱力学量の体積依存性も確認した。一次相転移の相関長は有限なので、格子の空間方向の大きさが相関長よりも十分に大きいとき、相転移の際に生じるギャップは体積に依存しないはずである。したがって、潜熱  $\Delta\epsilon$  は十分に大きい格子で計算したなら、空間体積依存性はないことが期待される。図 3.8 に様々な体積で計算した潜熱の結果をプロットした。この図より、体積依存性がないことが確認できたので、各  $N_t$  での潜熱の結果は様々な体積で計算した潜熱を体積依存

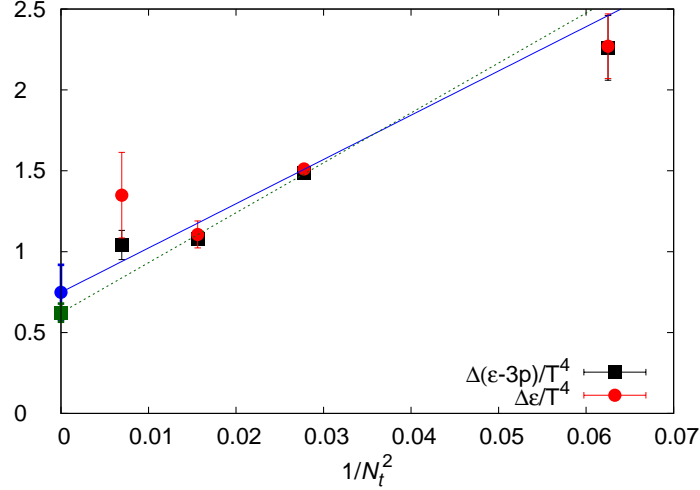


図 3.9: 潜熱  $\Delta\epsilon/T^4$  (丸印) と、 $\Delta(\epsilon - 3p)/T^4$ (四角) を  $N_t = 6, 8, 12$  のデータを使って連続極限外挿を試みた図。一番右の点は  $N_t = 4$  の結果で [27] のデータを使わせていただいた。  $N_t = 4$  のデータの誤差は系統誤差も評価してある。図の中にある直線は  $N_t = 4$  以外の点を使って直線フィットを行った結果である、青色が  $\Delta\epsilon/T^4$ 、緑色が  $\Delta(\epsilon - 3p)/T^4$  のフィットの結果である。

表 3.7: 各  $N_t$  における体積無限大極限の熱力学量

$N_t$	$\Delta\epsilon/T^4$	$\Delta(\epsilon - 3p)/T^4$
6	1.511(24)	1.488(21)
8	1.106(84)	1.079(25)
12	1.349(265)	1.041(90)

性が無いと仮定してフィットした結果を採用した。表 3.7 にその結果を載せてある。同様の解析を  $\Delta(\epsilon - 3p)$  についても行った。  $\Delta(\epsilon - 3p)$  の計算には非等方係数がいらないので、  $\Delta\epsilon$  よりも少ない統計誤差で計算が出来るからである。

最後に、計算した熱力学量を連続極限へ外挿した。格子間隔効果が  $\mathcal{O}(a^2)$  であることと、高温での状態方程式が  $N_t^{-2}$  の関数になっているという理由から、熱力学量を  $1/N_t^2$  の直線外挿を行った。  $N_t = 6, 8, 12$  の 3 点を使って外挿を行い、結果は

$$\frac{\Delta\epsilon}{T^4} = 0.75 \pm 0.17, \quad \frac{\Delta(\epsilon - 3p)}{T^4} = 0.623 \pm 0.056 \quad (3.55)$$

表 3.8: 潜熱の連続極限

fit range	$N_t = 6-12$		$N_t = 4-12$	
	$\Delta\epsilon/T^4$	$\Delta(\epsilon - 3p)/T^4$	$\Delta\epsilon/T^4$	$\Delta(\epsilon - 3p)/T^4$
	0.75(17)	0.623(56)	0.83(12)	0.652(51)
$\chi^2/\text{dof}$	3.12	6.38	1.75	4.05

である。 $\chi^2/\text{dof}$  は表 3.8 に載せておく。

図 3.9 には  $N_t = 4$  のデータも描いている、これは [27] の値を採用していて、ベータ関数の値は [27] を使っている。セクション 3.2.2 の最後に議論したようにベータ関数の定義による不定性が大きい。この不定性を系統誤差として  $N_t = 4$  の誤差棒をつけた。 $N_t = 4$  のデータがフィットの線からそう遠くない位置にあるので、 $N_t = 4$  のデータもフィットに加えたデータも表に記載してある。結果から読み取れるように、フィットレンジの変化による値の変化は小さい、しかし、誤差は小さくはない。

### 3.3 微分法の結論

等方格子で  $SU(3)$  ゲージ理論の有限温度シミュレーションを行うことにより、非摂動的な非等方係数を計算した。非摂動的な非等方係数は  $N_t$  が大きくなるにつれて、摂動論的に求めた非等方係数に漸近的に近づいていく様子が確認できた。

生成した配位をそれぞれの相に分離することによって、一次相転移点での高温相と低温相の間にあるギャップを計算した。プラケットのギャップと非摂動的に計算した非等方係数の結果から、相転移点上での潜熱と圧力差を計算した。本論文で生成した格子すべてで、非等方係数から導かれる圧力差が消失する事を確認した。空間体積依存性を調べ、連続極限への外挿も行い、連続極限の値が  $\Delta\epsilon/T^4 = 0.75 \pm 0.17$ 、 $\Delta(\epsilon - 3p)/T^4 = 0.623 \pm 0.056$  という結果を得た。

また、以降の章でより大きな格子の解析を、より小さい統計誤差で議論することができた。その結果からは、体積依存性などが認められた。しかし、微分法ではカーシュ係数からくる統計誤差が大きかったため、体積依存性はみられなかった。

## 第4章 SFtX法

この章では、SFtX法 (Small flow time expansion Method) [1, 2] を用いた熱力学量の計算について説明する。計算の妥当性を確認するために、前章までと同様に相転移点近傍で熱力学量を計算する。微分法と結果を比較し、系統誤差等を評価する。[40]

### 4.1 SFtX法の原理

#### 4.1.1 Gradient flow

gradient flow とは、裸の場の演算子にある種の拡散方程式を作用させ、ぼやかした場 (スミアした場、粗視化した場) の演算子を定義する手続きである。そうすると、ぼやかした場の局所的な積の量子論的期待値はすべて有限となる。ぼやかした場で測定したい物理量を記述することが出来れば、その表式は発散を含まない、正則化によらない普遍的なものになる。[39]

本研究で用いた、gradient flow 方程式は、フローさせてぼやかした場  $B_\mu^a(t, x)$  を用いて次の様に表される [5]。

$$\partial_t B_\mu^a(t, x) = D_\nu G_{\nu\mu}^a(t, x) \equiv \partial_\nu G_{\nu\mu}^a(t, x) + f^{abc} B_\nu^b(t, x) G_{\nu\mu}^c(t, x) \quad (4.1)$$

フロー時間がゼロのとき、フローされた場は、 $B_\mu^a(0, x) = A_\mu^a(x)$  であり、フローされた場の強さは、次の様に表される。

$$G_{\mu\nu}^a(t, x) \equiv \partial_\mu B_\nu^a(t, x) - \partial_\nu B_\mu^a(t, x) + f^{abc} B_\mu^b(t, x) B_\nu^c(t, x) \quad (4.2)$$

(4.1) は一種の拡散方程式であり、 $B_\mu^a(t, x)$  は、 $A_\mu^a(x)$  を4次元時空  $\sqrt{8t}$  範囲でぼやかした場とみなすことができる。これらの式はすべて、(4.1) がゲージ対称性を保つように構成されている。(4.1) の  $D_\nu G_{\nu\mu}^a(t, x)$  の部分は、作用のゲージ場についての汎関数微分にあたっているため、ゲージ場の位相空間における gradient を表している。つまり、

$$\partial_t B_\mu^a(t, x) = -\frac{\delta S(t)}{\delta B_\mu^a(t, x)} \quad (4.3)$$

であるため、(4.1) は作用を少なくする方向に発展していく。このことは、量子揺らぎを減らし、古典的な配位に近づけることを意味している。また、拡散されるうちに、元の格子間隔の情報が失われる。それにより、フローされた場で演算子の期待値を計算すれば、連続極限をとりやすくなるのが期待できる。



フロウされた場  $B_\mu^a(t, x)$  には紫外発散と短距離の特異点がないことが示されている。したがって、gradient flow は一種のくりこみスキームを定義しているといえ、さらに非摂動的に定式化されているので、格子上で直接計算することが出来る。

SFtX 法は、厳密に発散が無いので、繰り込みをすることなく格子上で計算でき、フロウタイム  $t$  が小さい領域での、物理量の計算をすることが出来る。[1] QCD などの漸近自由理論では、摂動論を適用して繰り込まれた観測量をフロウタイムが小さな領域で、フロウされた演算子に関連付けるマッチング係数を計算することが出来る。[6]  $O(t)$  の寄与は、 $t \rightarrow 0$  極限をとることによって取り除くことができる。

#### 4.1.2 エネルギー運動量テンソルへの応用

エネルギー運動量テンソルの gradient flow を用いた表示を考える。

一般に力学系が変数の連続変換のもとで不変な時、対応した保存量が存在するが(ネーターの定理)、場の理論では対応する保存カレントが存在する。得に時間と空間の並進のもとでの普遍性に対応した保存量がエネルギーと運動量であるが、これらがまとめられ、エネルギー運動量テンソルとして扱われる。並進不変性は極めて普遍的であるため、エネルギー運動量テンソルは場の理論の基本的な物理量である。

本研究で扱う動的クォークを含まない QCD の作用  $S$  は

$$S = \frac{1}{4g_0^2} \int d^4x F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^a(x) + \int d^4x \sum_{f=\mu,d,s,c,b,t} \bar{\psi}_f(x) (D + m_f) \psi_f(x) \quad (4.4)$$

無限小 4 元ベクトル  $\xi_\mu$  で表せる並進変換

$$\delta A_m^a u(x) = \xi_\nu \partial_\nu A_\mu^a(x) \quad (4.5)$$

のもとで不変  $\delta S = 0$  となる。この不変性に対応した保存カレントであるエネルギー運動量テンソルを求める簡便な方法は、定数ベクトル  $\xi_\mu$  を  $\xi_\mu(x)$  と関数に格上げすることである。こうすると、 $S$  は不変ではなくなるが、 $\xi_\mu(x)$  が定数の土岐には  $\delta S = 0$  なので、 $\delta S$  は必ず微分  $\partial_\mu \xi_\nu(x)$  に比例する。実際、

$$\delta S = \int d^4x \partial_\mu \xi_\nu(x) T_{\mu\nu} = - \int d^4x \xi_\nu(x) \partial_\mu T_{\mu\nu}(x) \quad (4.6)$$

となる。ここにあらわれる量が、エネルギー運動量テンソル  $T_{\mu\nu}(x)$  で、運動方程式で消える項を無視して、

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{g_0^2} \left[ \mathcal{O}_{1\mu\nu}(x) - \frac{1}{4} \mathcal{O}_{2\mu\nu}(x) \right] \quad (4.7)$$

ここで、

$$\mathcal{O}_{1\mu\nu}(x) \equiv F_{\mu\rho}^a(x) F_{\nu\rho}^a(x), \quad \mathcal{O}_{2\mu\nu}(x) \equiv \delta_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}^a(x) F_{\rho\sigma}^a(x) \quad (4.8)$$

で与えられる。運動方程式 (オイラー-ラグランジュ方程式) のもとでは、任意の変分のもとで作用の変分が 0 になるので、式 (4.6) の最後の表式から、運動方程式のもとでは、保存則  $\partial_\mu T_{\mu\nu} = 0$  となりたつことがわかる。

ここまでは古典力学の議論だが、場の量子論ではより複雑になる。場の理論では理論を定義する際にまず正則化が必要になるが、正則化が並進対称性を壊すことがあり、この場合、古典論での表式 (4.7) は必ずしも正しくはない。

格子正則化は時空間を格子に切るために、まさに並進対称性を壊す正則化のひとつである。そのため、格子ゲージ理論では、(4.7) そのままでは使えない。単純に考えると  $a \rightarrow 0$  の連続極限で、この対称性の破れは解消する様に思えるが、エネルギー運動量テンソルが複合演算子であるため、それは一般に  $1/a$  の形の紫外発散を含み、 $a \cdot 1/a = 1$  と有限の破れの効果が残る可能性がある。(4.4) の様なゲージ理論には、次元正則化というゲージ対称性と並進対称性を厳密に保つ正則化が存在する。しかし、次元正則化は摂動論にもとづいた正則化であり、非摂動計算には使うことが出来ない。こうした理由から、エネルギー運動量テンソルの構成は、非常に重要かつ、技術的に複雑な問題となっている。

この問題に gradient flow を応用する。

まず、次元正則化を採用したと仮定する。フローさせた場  $B_\mu^a(t, x)$  の組み合わせで、次元正則化でのエネルギー運動量テンソル (4.7) に等しいものが得られたとする。すると、フローさせた場  $B_\mu^a(t, x)$  の任意の複合演算子は有限な量なので、正則化によらないはずである。したがってその表式は、格子正則化でも使えるはずである。では、次元正則化でのエネルギー運動量テンソルは、フローされた場を用いてどのようにかけるかというのを考えなければならない。

そこで、SFtX (小フロー時間展開) を利用する。このために、フロー場の複合演算子で、2 階の対称テンソルで質量次元が 4 のものを用意する。

$$\mathcal{O}_{1\mu\nu}(x) \equiv G_{\mu\rho}^a(x)G_{\nu\rho}^a(x), \quad \mathcal{O}_{2\mu\nu}(x) \equiv \delta_{\mu\nu}G_{\rho\sigma}^a(x)G_{\rho\sigma}^a(x) \quad (4.9)$$

これらの表式は (4.8) を真似たものだが、あくまでもフローさせた場の複合演算子であるため、明白に有限である。フローの拡散長さが  $\sqrt{8t}$  ほどの拡散方程式であることを考えると、これらの複合演算子は、半径  $\sqrt{8t}$  内の元々の場、 $A_\mu^a(x)$  の組み合わせになると考えられる。そこで、 $t > 0$  かつ  $t$  が極めて小さくなる極限を考える。すると、上の描像から、(4.9) の複合演算子は、フローさせていない場の複合演算子の完全系で展開できると考えられ、

$$\tilde{\mathcal{O}}_{i\mu\nu}(t, x) = \left\langle \tilde{\mathcal{O}}_{i\mu\nu}(t, x) \right\rangle \mathbf{I} + \sum_j \zeta_{ij}(t) [\mathcal{O}_{i\mu\nu}(x) - \left\langle \tilde{\mathcal{O}}_{i\mu\nu}(t, x) \right\rangle \mathbf{I}] + O(t) \quad (4.10)$$

となる。ここで  $\mathbf{I}$  は単位行列。かりにこの展開が得られたとすると、これを逆に解いて

$$\mathcal{O}_{i\mu\nu}(x) = \left\langle \tilde{\mathcal{O}}_{i\mu\nu}(x) \right\rangle \mathbf{I} + \lim_{t \rightarrow 0} \zeta_{ij}^{-1}(t) \left[ \tilde{\mathcal{O}}_{i\mu\nu}(x) - \left\langle \tilde{\mathcal{O}}_{i\mu\nu}(t, x) \right\rangle \mathbf{I} \right] \quad (4.11)$$

となる。ここでは、 $t \rightarrow 0$  の極限を考えることで、(4.10) の最後の  $O(t)$  の項を落としており、こうすることでフローさせていない場の複合演算子  $\mathcal{O}_{i\mu\nu}(x)$  をフローさせた場の演算子  $\tilde{\mathcal{O}}_{i\mu\nu}(t, x)$  で

表すことが出来る。

(4.11) のよいところは、 $t \rightarrow 0$  の極限は漸近自由性から強い相互作用が弱くなる高エネルギー極限であり、係数  $\zeta_{ij}(t)$  が摂動論で計算できることである。参考文献 [2, 1] によると、次元正則化により、(4.10) の係数  $\zeta_{ij}(t)$  を非自明な最初の係数 (1 ループ) までの計算できることがわかる。最後に、(4.11) を次元正則化でのエネルギー運動量テンソルの式 (4.7) に代入することで次節以降で述べる表式が得られる。また、参考文献 [33] において、係数  $c_i(t)$  の計算が 2 ループレベルまで拡張され、より系統誤差の小さい結果が得られることが期待される。

(4.7) のエネルギー運動量テンソルの表式はすべて明白に有限な量としてかかれており、正則化に依存しない量になっている。したがって、これを格子正則化にもとづく格子ゲージ理論で使うことも出来るはずである。しかし、今まで議論した普遍性は、正則化を外した極限で成り立つものである。そのため、 $a \rightarrow 0$  の連続極限をとり、 $t \rightarrow 0$  の極限をとる必要がある。

### 4.1.3 NNLO でのエネルギー運動量テンソル

SFtX 法でエネルギー運動量テンソルを計算するために、ゲージ不変的で局所的なフロウタイム  $t$  でのフロウされた演算子を考える

$$U_{\mu\nu}(t, x) \equiv G_{\mu\rho}^a(t, x)G_{\nu\rho}^a(t, x) - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}G_{\rho\sigma}^a(t, x)G_{\rho\sigma}^a(t, x) \quad (4.12)$$

$$E(t, x) \equiv \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a(t, x)G_{\mu\nu}^a(t, x) \quad (4.13)$$

これらの、4 次元演算子を用いると、くりこまれたエネルギー運動量テンソル  $T_{\mu\nu}^R$  は次の式で与えられる [1]

$$T_{\mu\nu}^R(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \{c_1(t)U_{\mu\nu}(t, x) + 4c_2(t)\delta_{\mu\nu}[E(t, x) - \langle E(t, x) \rangle_0]\} \quad (4.14)$$

ここで、 $\langle E(t, x) \rangle_0$  はゼロ温度の期待値である。 $c_1(t)$  と  $c_2(t)$  はマッチング係数であり、摂動論から計算される。[6]

$$c_1(t) = \frac{1}{g^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} k_1^{(\ell)}(\mu, t) \left[ \frac{g^2}{(4\pi)^2} \right]^\ell, \quad c_2(t) = \frac{1}{g^2} \sum_{\ell=1}^{\infty} k_2^{(\ell)}(\mu, t) \left[ \frac{g^2}{(4\pi)^2} \right]^\ell, \quad (4.15)$$

ここで、 $g = g(\mu)$  はくりこみスケール  $\mu$  でくりこまれた  $\overline{\text{MS}}$  スキームのくりこまれたゲージカップリングである。ツリーレベルの近似では、 $F_{\mu\rho}^a(x)F_{\nu\rho}^a(x) = G_{\mu\rho}^a(t, x)G_{\nu\rho}^a(t, x) + O(t)$  であるため、 $k_1^{(0)} = 1$  となる。一方で、ツリーレベルのエネルギー運動量テンソルはトレースレスになるため、 $k_2^{(0)}$  は存在しない。したがって、 $c_1(t)$  の NLO 式 (next to leading order) には  $k_1^{(0)}$  と  $k_1^{(1)}$  が含まれ、 $c_1(t)$  の式には  $k_2^{(1)}$  と  $k_2^{(2)}$  が含まれる。 $c_1(t)$  の NNLO 式 (next to next to leading order) には  $k_1^{(0)}$  と  $k_1^{(1)}$ 、 $k_1^{(2)}$  が含まれ、 $c_2(t)$  の式には  $k_2^{(1)}$  と  $k_2^{(2)}$ 、 $k_2^{(3)}$  が含まれる。

1 ループのマッチング係数は、先行研究 [1, 2, 34] で計算され、2 ループの係数は、. [33] で計算されている。参考文献 [1] で述べられている様に、動的クォークを含まない  $SU(N_c)$  ヤンミルズ理論では、 $k_2^{(l+1)}$  はトレースアノマリーを用いた  $l$ -ループ係数から予測される。 $k_2^{(3)}$  の具体的な形は、

参考文献 [11] にある。動的クォークを含まない  $SU(N_c)$  ゲージ理論の場合のマッチング係数は

$$k_1^{(1)}(\mu, t) = -\beta_0 L(\mu, t) - \frac{7}{3} C_A = C_A \left( -\frac{11}{3} L(\mu, t) - \frac{7}{3} \right), \quad (4.16)$$

$$k_2^{(1)}(\mu, t) = \frac{1}{8} \beta_0 = \frac{11}{24} C_A, \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} k_1^{(2)}(\mu, t) &= -\beta_1 L(\mu, t) + C_A^2 \left( -\frac{14482}{405} - \frac{16546}{135} \ln 2 + \frac{1187}{10} \ln 3 \right) \\ &= C_A^2 \left( -\frac{34}{3} L(\mu, t) - \frac{14482}{405} - \frac{16546}{135} \ln 2 + \frac{1187}{10} \ln 3 \right), \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$k_2^{(2)}(\mu, t) = \frac{1}{8} \beta_1 - \frac{7}{16} \beta_0 C_A = C_A^2 \left( -\frac{3}{16} \right), \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} k_2^{(3)}(\mu, t) &= \frac{1}{8} \beta_2 - \frac{7}{16} \beta_1 C_A + \beta_0 C_A^2 \left( -\frac{3}{16} L(\mu, t) - \frac{1427}{1440} + \frac{87}{40} \ln 2 - \frac{27}{20} \ln 3 \right) \\ &= C_A^3 \left( -\frac{11}{16} L(\mu, t) - \frac{2849}{1440} + \frac{319}{40} \ln 2 - \frac{99}{20} \ln 3 \right), \end{aligned} \quad (4.20)$$

となる。ここで、

$$\beta_0 = \frac{11}{3} C_A, \quad \beta_1 = \frac{34}{3} C_A^2, \quad \beta_2 = \frac{2857}{54} C_A^3 \quad (4.21)$$

は、ヤンミルズ理論の  $\beta$  関数の最初の 3 つの係数であり、

$$L(\mu, t) \equiv \ln(2\mu^2 t) + \gamma_E \quad (4.22)$$

は参考文献 [33] で、Euler-Mascheroni 定数  $\gamma_E$  を使用して導入された。 $C_A$  は

$$f^{acd} f^{bcd} = C_A \delta^{ab} \quad (4.23)$$

で定義される、随伴表現の 2 次カシミアであり、 $SU(N_c)$  ゲージ群では、 $C_A = N_c$  である。

#### 4.1.4 NLO でのエネルギー運動量テンソル

SfX 法の本論文 [1] ではエネルギー運動量テンソルの計算において、以下のような表式の NLO マッチング係数が与えられている。マッチング係数の中の摂動論の打ち切り誤差を見積もるために、本研究で行った NLO マッチング係数を用いた計算ではこの表式を用いた。

$$T_{\mu\nu}^R(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\alpha_U(t)} U_{\mu\nu}(t, x) + \frac{\delta_{\mu\nu}}{4\alpha_E(t)} [E(t, x) - \langle E(t, x) \rangle_0] \right\} \quad (4.24)$$

$$\alpha_U(t) = \frac{1}{c_1(t)} = g^2 \left[ 1 + 2 \frac{\beta_0}{(4\pi)^2} \bar{s}_1 g^2 + O(g^4) \right] \quad (4.25)$$

$$\alpha_E(t) = \frac{1}{c_2(t)} = \frac{(4\pi)^2}{2\beta_0} \left[ 1 + 2 \frac{\beta_0}{(4\pi)^2} \bar{s}_2 g^2 + O(g^4) \right] \quad (4.26)$$

$$\bar{s}_1 = \frac{7}{22} + \frac{1}{2}\gamma_E - \ln 2 \simeq -0.08635752993 \quad (4.27)$$

$$\bar{s}_2 = \frac{21}{44} - \frac{\beta_1}{2\beta_0^2} = \frac{27}{484} \simeq 0.05578512397 \quad (4.28)$$

#### 4.1.5 潜熱と圧力差

エネルギー密度と圧力はエネルギー運動量テンソルを用いて、次の様に表せる

$$\epsilon = -\langle T_{00}^R(x) \rangle, \quad p = \frac{1}{3} \sum_{i=1,2,3} \langle T_{ii}^R(x) \rangle \quad (4.29)$$

これらの高温相での期待値と低温相の期待値  $\epsilon^{(\text{hot/cold})}$  と  $p^{(\text{hot/cold})}$  を求め、それらの差から、潜熱と圧力差を計算する。SFtX 法でも同様に、

$$\frac{\Delta(\epsilon - 3p)}{T^4}, \quad \frac{\Delta(\epsilon + p)}{T^4} \quad (4.30)$$

を計算する。相転移点直上への温度の調整は多点再重みづけ法を用いた。[37, 38]

#### 4.1.6 くりこみスケール

マッチング係数、 $c_i(t)$  はくりこみスケール  $\mu$  に依存する形で記述されている。ただし、マッチング係数はエネルギー運動量テンソルとフロウされた演算子を関連付ける量であるため、物理的で、くりこみスケール  $\mu$  に依存せず、発散もない。そのためマッチング係数も発散がなく  $\mu$  にも依存しないはずである。つまり、 $L(\mu, t)$  からの  $\mu$  依存性は、走行結合定数  $g$  からの依存性によってキャンセルされているはずである。しかし、実際のまっちゃんぐけいすうの表式は摂動展開が有限な次数で切り捨てられているため、 $\mu$  の選び方によって、摂動のきりすてられてた高次項による系統誤差が生じる可能性がある。

SFtX 法を用いた先行研究、[8, 29, 9, 12] では、 $\mu_d$  が物理的なスミアリングの程度が  $\sqrt{8t}$  である局所フロウ演算子の自然なスケールであるため、 $\mu_d$  スケールが採用された。

$$\mu = \mu_d(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{8t}}, \quad L(\mu, t) = -2 \ln 2 + \gamma_E \quad (4.31)$$

一方参考文献 [33] では、2 ループの寄与を小さくする  $\mu_0$  を選ぶのが適切な選択であるとされている。

$$\mu = \mu_0(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2t e^{\gamma_E}}} \simeq 1.499 \mu_d(t) \quad L(\mu, t) = 0 \quad (4.32)$$

$\mu_0$  スケールは quenched QCD [11] と 2+1 フレーバー QCD [31, 32] でテストされ、格子が十分に細くない場合、 $\mu_0$  スケールが計算結果を改善する可能性があることが報告された [31, 32]。

本論文では、 $\mu = \mu_0(t)$  と  $\mu_d(t)$  の結果を比較して、それらを比べることによって摂動論の切り捨てられた項の寄与の大きさを検討する。

#### 4.1.7 連続極限と、フロウタイムゼロ極限の外挿

SfTX 法で物理的な結果を得るには、連続極限への外挿  $a \rightarrow 0$  とフロウタイムゼロへの外挿  $t \rightarrow 0$  の両方が式 (4.14) で無視した高次元演算子からの効果と格子正則化の誤差を取り除くためには必要である。参考文献 [9, 10, 11, 12, 13, 15] では、この二重外挿は、各フロウタイム  $t$  で  $a \rightarrow 0$  外挿を行い、次に連続極限をとった結果で  $t \rightarrow 0$  外挿をとることによって実行される。参考文献 [29, 30, 31, 14] では、有限の格子間隔  $a$  で  $t \rightarrow 0$  外挿を行い、後から連続極限をとるための準備をしている。本論文では、最初に  $t \rightarrow 0$  をとり、次に  $a \rightarrow 0$  外挿を行う方法を「方法 1」とし、 $a \rightarrow 0$  外挿を行った後に、 $t \rightarrow 0$  外挿を行う方法を「方法 2」とする。

有限格子では、格子効果のために、式 (4.14) の右辺が打ちきった演算子の寄与によって誤差が増える可能性がある。格子間隔  $a$  の LO(Leading order) に式 (4.14) は次の様に展開されると予想される。

$$T_{\mu\nu}(t, x, a) = T_{\mu\nu}^R(x) + tS_{\mu\nu}(x) + A_{\mu\nu}(x)\frac{a^2}{t} + C_{\mu\nu}(x)(aT)^2 + D_{\mu\nu}(x)(a\Lambda_{\text{QCD}})^2 + a^2S'_{\mu\nu}(x) + O(a^4, t^2) \quad (4.33)$$

ここで、 $T_{\mu\nu}^R$  は、物理的なエネルギー運動量テンソルである。 $S_{\mu\nu}$  と  $S'_{\mu\nu}$  は次元 6 演算子の誤差、 $A_{\mu\nu}$ 、 $C_{\mu\nu}$  および  $D_{\mu\nu}$  は次元 4 演算子の誤差による誤差である。 $a$  の高次では、 $(a^2/t)^2$  などに比例する項もある [36]。式 (4.33) において、 $a^2/t$  に比例する項は、 $t = 0$  で特異点を持つため、方法 1 で、格子間隔  $a$  を有言にして  $t \rightarrow 0$  外挿を行う場合には問題が生じる。方法 2 で、最初に  $a \rightarrow 0$  の極限をとると、原理的には  $a^2/t$  に比例する項が消えるが、実際に、 $a^2/t$  の項の寄与が大きい、 $t$  が小さい領域で  $a \rightarrow 0$  極限をとりたい場合は、単純には外挿が行えない。そのため、方法 2 でも  $a^2/t$  の項が問題を引き起こす可能性がある。したがって、どちらの方法でも、 $a^2/t$  以上の高次項の効果が無視できる  $t$  の領域を各格子間隔  $a$  で見つける必要がある。この様な、 $O(t^2)$  の項の効果が無視できる  $t$  の範囲を「リニアウィンドウ」と呼ぶことにする [29, 31]。

リニアウィンドウのデータのみを使用して、 $t \rightarrow 0$  外挿と  $a \rightarrow 0$  外挿を行った場合、格子上のフロウされた演算子はリニアウィンドウで  $T_{\mu\nu}(t, a) \approx T_{\mu\nu}^R + tS_{\mu\nu} + a^2C'_{\mu\nu} + O(a^4, t^2)$  として近似されるため、 $T_{\mu\nu}^R$  の最終結果は、方法 1 と方法 2 で一致する必要がある。したがって、2 つの方法の結果を比較することは、SfTX 法の良い試験になる。本論文では、リニアウィンドウのデータを使用して、方法 1 と 2 の両方を採用し、 $t$  と  $a^2$  の線形の外挿を実行する。両方の結果が一致するかどうかを調べるのが、リニアウィンドウの選び方の強い指標になる。

熱力学的特性を調べる上で他に気をつけておかなばならないのは、系の物理的体積依存性である。有限体積効果を調べるには、 $a \rightarrow 0$  と  $t \rightarrow 0$  外挿において体積を固定しておく必要がある。これ以降の解析でも、これまでと同じように相転移点近傍の熱力学量を測定するため、温度  $T$  は相転移温度  $T_c$  の調整し解析を行う。 $N_s^3 \times N_t$  の大きさの格子では相転移温度において、格子間隔が  $a = 1/(N_t T_c)$  として定義されるので、 $N_t$  を変えること格子間隔を変化させられる。物理的な体積は  $V = (N_s a)^3 = N_s^3 / (N_t T_c)^3$  であらわされるため、体積を固定するには、アスペクト比  $N_s/N_t$  を固定する。本論文では、有限体積効果を議論するために、 $N_s/N_t = 6, 8$  の場合の二重外挿について解析を行う。

## 4.2 SFtX 法の結果

この章では、SFtX 法を用いて、格子 QCD の理論の上で熱力学量を求める。

### 4.2.1 シミュレーション点

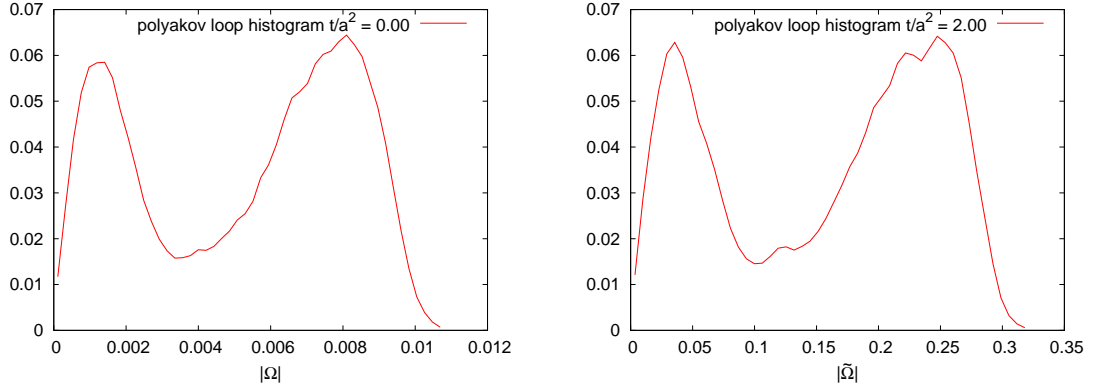


図 4.1: ポリャコフループのヒストグラム、左は  $t/a^2 = 0.0$ 、右は  $t/a^2 = 2.0$ 、 $T = T_c$  格子の大きさは  $96^3 \times 12$

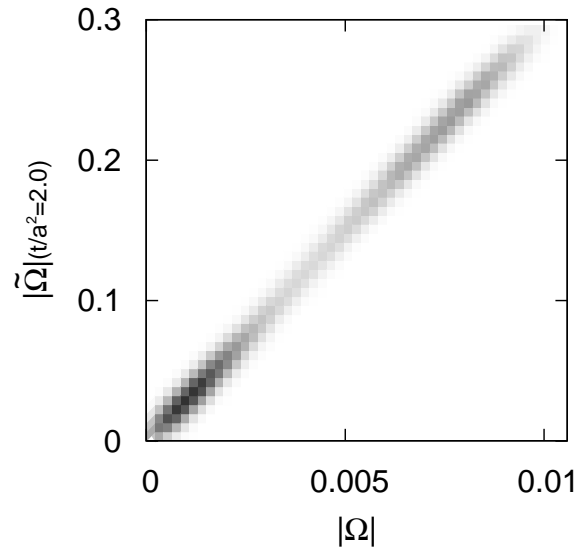


図 4.2: ポリャコフループのコントアプロット、縦軸  $t/a^2 = 2.0$  横軸  $t/a^2 = 0.0$  のポリャコフループの値

3.2 節と同様に、擬熱浴法を用いてシミュレーションを行った。様々な空間格子サイズ  $N_s$ 、時間格子サイズは  $N_t = 8.12.16$  について解析を行った。3.2 節で用いた配位も一部使っている。  $N_t = 6$  の格子についても解析を行ったが、  $N_t = 6$  ではリニアウィンドウが見られないため、本論文では解析を行わない。

配位生成の  $N_{\text{sep}}$  回毎に、配位の測定を行った。各格子につき、3 から 6 個の  $\beta$  を測定し、3 章と同様に多点再重み付け法を用いて結合する [37, 38]。統計誤差は、誤差が飽和するように選んだ

表 4.1: シミュレーションパラメータ、フロウされたデータは、 $N_{\text{sep}}$  毎に計算した。

$N_s$	$N_t$	$\beta$	$\beta_c$	$N_{\text{sep}}$	$N_{\text{conf}}$
48	8	6.056	6.06160(18)	20	10000
		6.058			10000
		6.060			10000
		6.062			10000
		6.065			11000
		6.067			10000
64	8	6.0585	6.06247(14)	20	4750
		6.061			103000
		6.063			12500
		6.065			25500
		6.068			81000
48	12	6.333	6.33472(13)	50	52500
		6.335			40000
		6.337			52500
64	12	6.332	6.33493(17)	50	6000
		6.3335			17500
		6.335			5800
		6.3375			9600
		6.339			8800
72	12	6.334	6.33531(10)	50	8000
		6.335			8000
		6.337			8000
96	12	6.334	6.33532(11)	50	20550
		6.335			12000
		6.336			14400
96	16	6.543	6.54667(20)	50	4350
		6.545			4800
		6.547			4250
128	16	6.544	6.54616(23)	200	2750
		6.545			3000
		6.546			3000
		6.547			3000
		6.548			3000

ビンサイズを使用したジャックナイフ法で測定した。相転移点は、ポリャコフループ感受率が最大になる点とした。

ウィルソンゲージ作用から定義されたフロウ方程式 (4.1) の離散化表現を使用する [5]。フロウ方程式の数値解は、3 次のルンゲクッタ法によって計算する。フロウされた場の強さ  $G_{\mu\nu}(t, x)$  の計算方法にはクローバー演算子を用いるものとプラケット演算子を用いるものの 2 つの候補がある。本論文では両方解析を行うが、まずはクローバーの解析結果を主に使用し、考察を行う。

#### 4.2.2 潜熱と圧力差

#### 4.2.3 NLO の結果

図 4.3–4.5 は、NLO マッチング係数を使用して、 $t/a^2$  の関数として、 $\Delta(\epsilon - 3p)/T^4$ 、 $\Delta(\epsilon + p)/T^4$ 、 $\Delta\epsilon/T^4$  の結果をプロットしてある。青、緑、赤の結果はそれぞれ、 $\Delta(\epsilon - 3p)/T^4$ 、 $\Delta(\epsilon + p)/T^4$ 、 $\Delta\epsilon/T^4$  の結果である。 $t$  が小さい部分で、急激に減少しているのは 4.1.7 節で説明した  $O(a^2/t)$  の



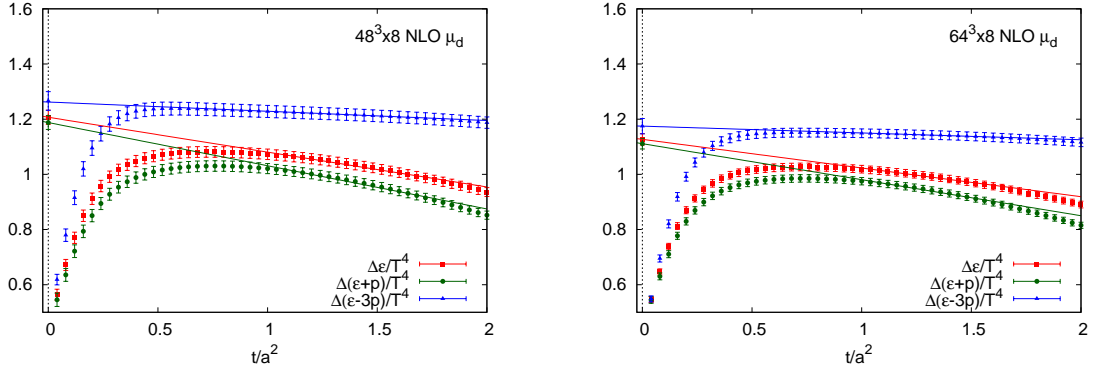


図 4.3:  $\Delta(\epsilon - 3p)/T^4$  (青)、 $\Delta(\epsilon + p)/T^4$  (緑)、 $\Delta\epsilon/T^4$  (赤) の結果  $48^3 \times 8$  (左)  $64^3 \times 8$  (右) 横軸  $t/a^2$

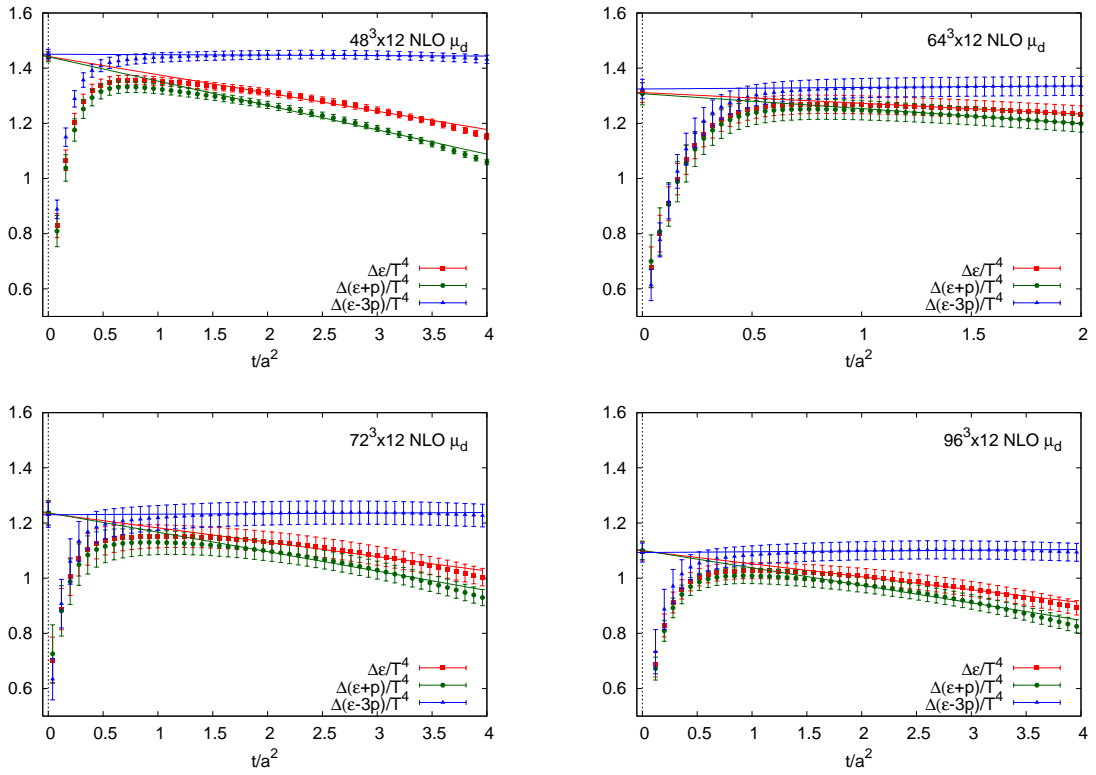


図 4.4: 図 4.3 と同様の図  $48^3 \times 12$  (左上)、 $64^3 \times 12$  (右上)、 $72^3 \times 12$  (左下) and  $96^3 \times 12$  (右下)

格子の効果のためである。先行研究 [8, 9, 11] でも同様の結果が報告されている。それで、その激減する  $t$  が小さい領域のデータを無視して、 $t \rightarrow 0$ ,  $a \rightarrow 0$  の外挿を行うと、その3つの  $t \rightarrow 0$  の外挿結果が誤差の範囲で一致している。図中の直線は、外挿のために線形フィットした結果である。

#### 4.2.4 NNLO の結果

図 4.6–4.8 は、NLO マッチング係数を使用して、 $t/a^2$  の関数として、 $\Delta(\epsilon - 3p)/T^4$ 、 $\Delta(\epsilon + p)/T^4$ 、 $\Delta\epsilon/T^4$  の結果をプロットしてある。節と同様のことが、図 4.6–4.8 でも言うことができる。くり

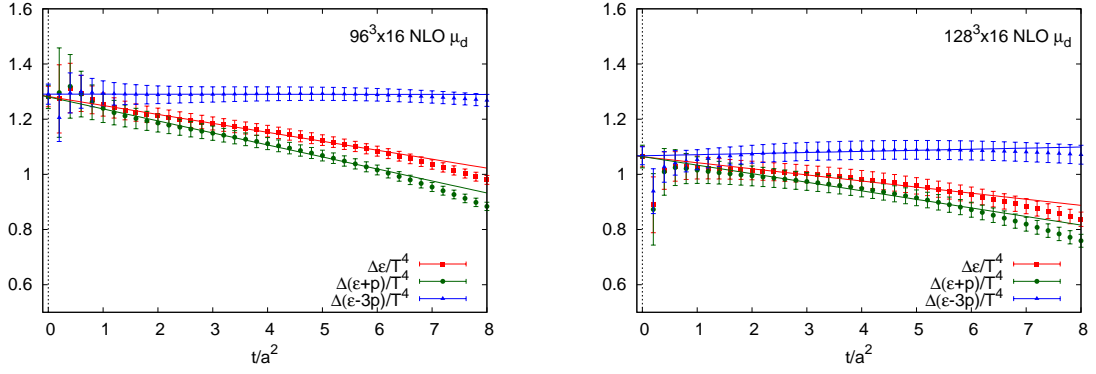


図 4.5: 図 4.3 と同様の図  $96^3 \times 16$  (左)  $128^3 \times 16$  (右)

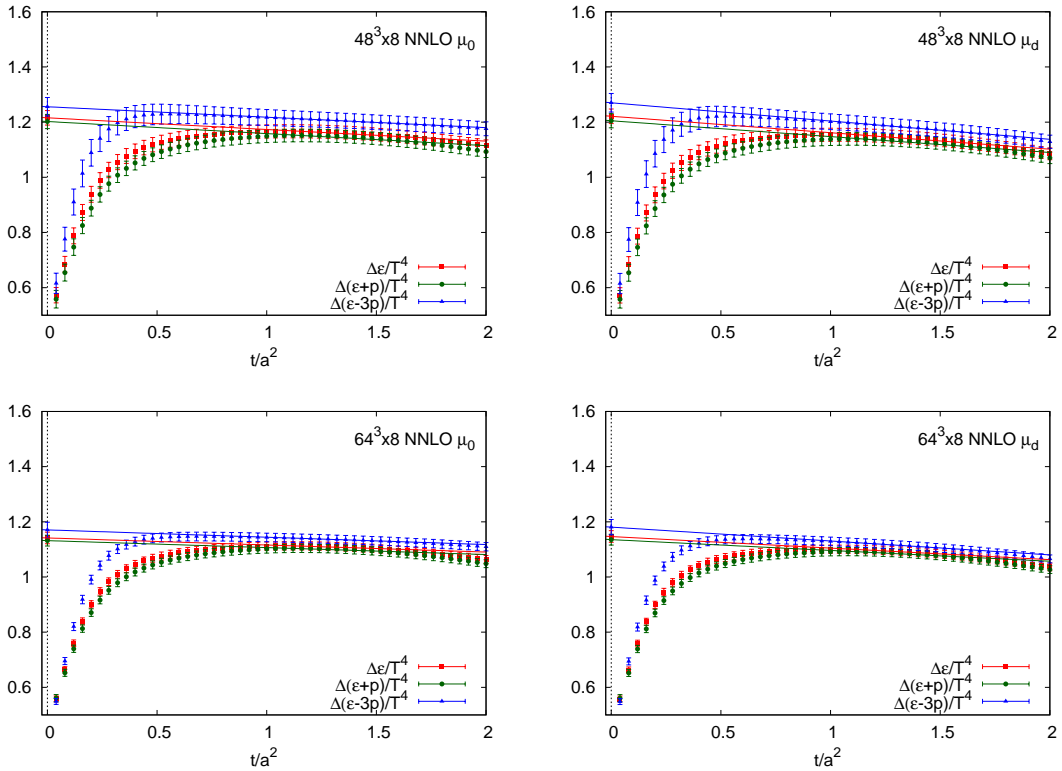


図 4.6:  $\Delta(\epsilon - 3p)/T^4$  (青)、 $\Delta(\epsilon + p)/T^4$  (緑)、 $\Delta\epsilon/T^4$  (赤) の結果、 $48^3 \times 8$  (上)  $64^3 \times 8$  (下)  $\mu = \mu_0$  (左)、 $\mu = \mu_d$  (右)、横軸  $t/a^2$

こみスケール  $\mu$  の依存性は小さいが、 $\mu_0$  スケールは、 $\mu_d$  スケールよりもわずかに少ない傾きで  $t \rightarrow 0$  外挿を行うことができる。

統計誤差の範囲で、有限の  $t$  で 3 つの値が一致している。これは、圧力差  $\Delta p$  が消失している事を示している。この性質は、二重外挿を行った後に示されるべき性質であるが、図 4.6–4.8 では、有限な  $t$  でも確認できている。

NLO の結果と比較することで、マッチング係数に対する摂動系列の切り捨ての影響を考えることができる。比較すると、有限の  $t$  および、 $a$  での圧力差  $\Delta p$  ははるかに小さくなり、観測量の  $t$  に対する傾きがより小さくなっているということが分かる。このことから、NNLO マッチング係

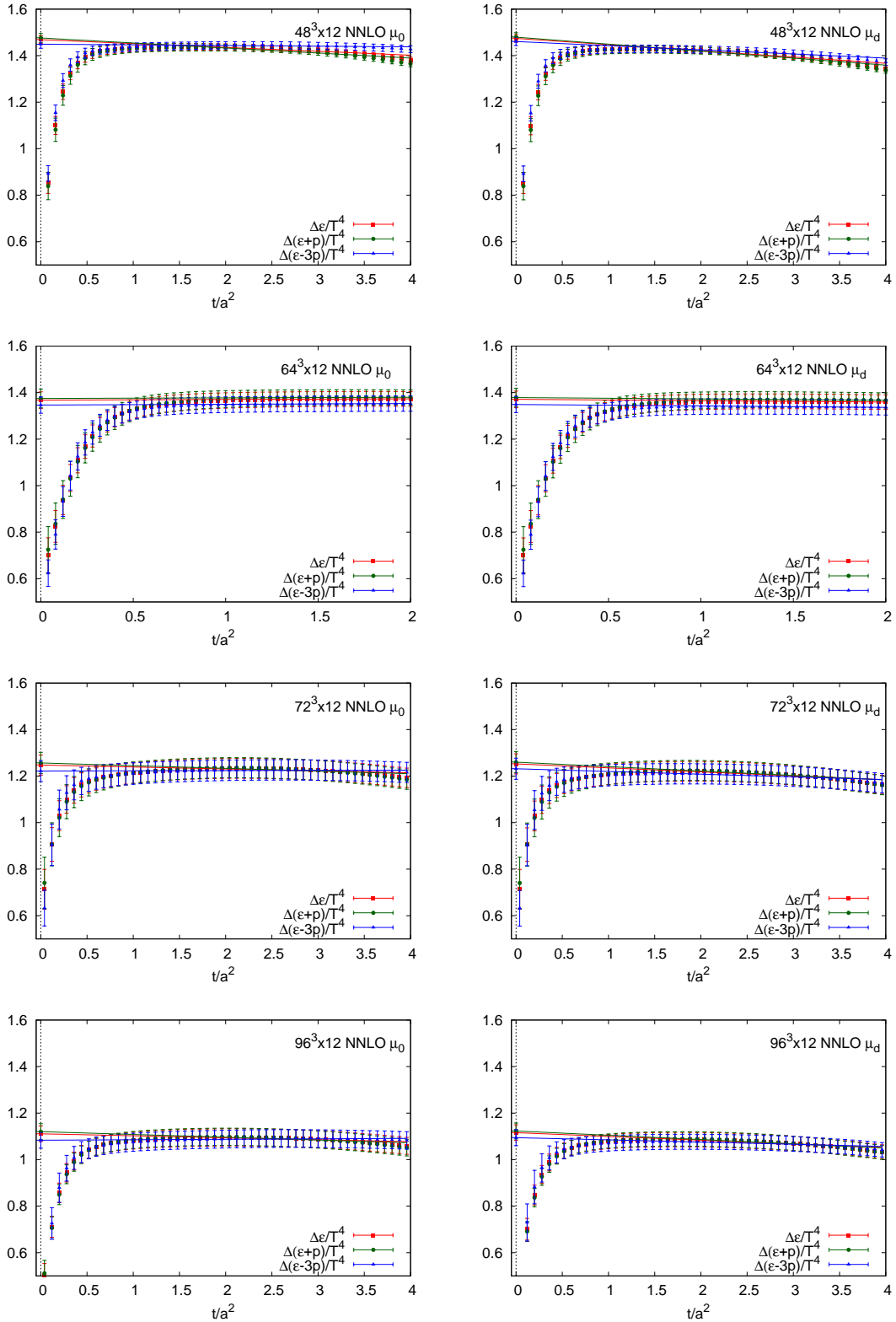


図 4.7: 図 4.6 と同様の図、上から、 $48^3 \times 12$ 、 $64^3 \times 12$ 、 $72^3 \times 12$ 、 $96^3 \times 12$

数は NLO マッチング係数よりもよりよいマッチング係数である事が分かる。次の節では  $t \rightarrow 0$  外挿を行った  $\Delta(\epsilon - 3p)/T^4$ 、 $\Delta(\epsilon + p)/T^4$ 、 $\Delta\epsilon/T^4$  が、NNLO と NLO で誤差の範囲で一致している事を確認する。

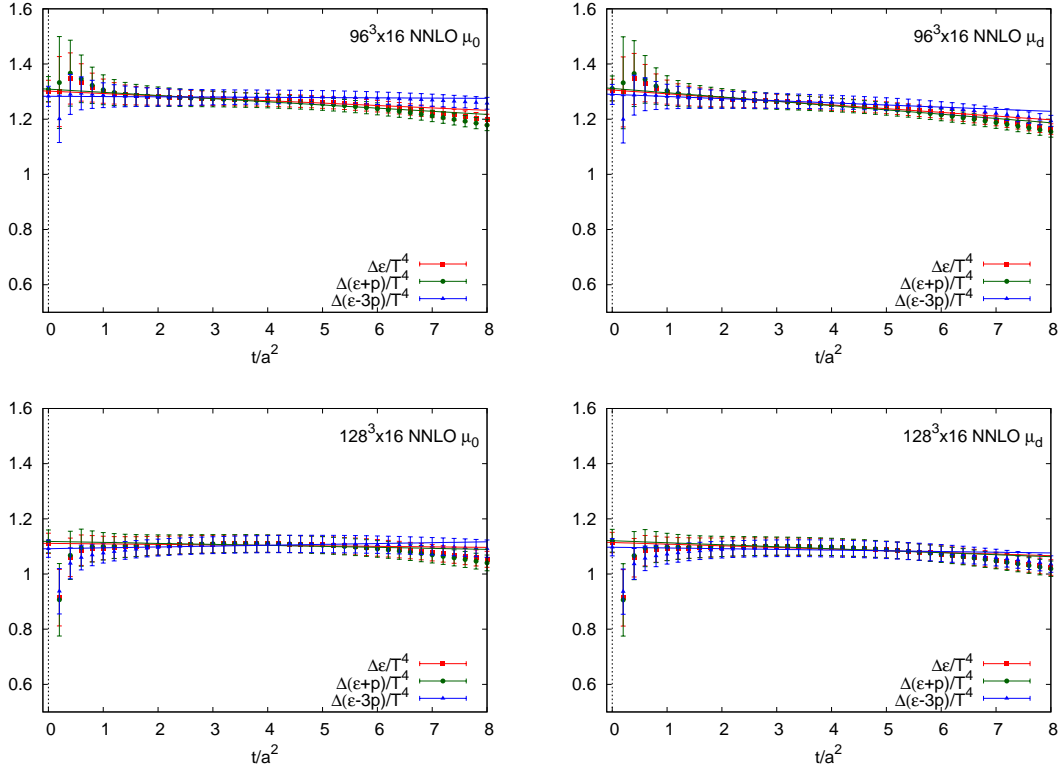


図 4.8: 図 4.6 と同様の図  $96^3 \times 16$  (上)、 $128^3 \times 16$  (下)

#### 4.2.5 空間体積依存性

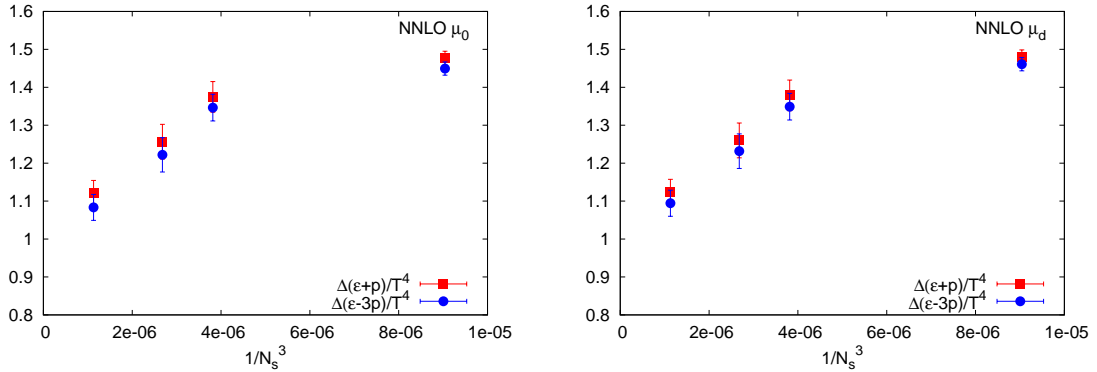


図 4.9: 空間体積依存性の図。  $\Delta(\epsilon+p)/T^4$  (赤)  $\Delta(\epsilon-3p)/T^4$  (青) NNLO の結果で、くりこみスケールは  $\mu = \mu_0$ (左)、 $\mu_d$ (右) 格子は  $N_s^3 \times 12$  の格子を使って比較。  $N_s = 48, 64, 72, 96$ 。

図 4.10 では、 $N_t$  を 12 に固定し、いくつかの  $N_s$ 、 $N_s = 48, 64, 72, 96$  の計算結果を比較することで、空間体積依存性を調べた。赤と青の印はそれぞれ、 $\Delta(\epsilon+p)/T^4$ 、 $\Delta(\epsilon-3p)/T^4$  の NNLO の結果で、くりこみスケールは、左が  $\mu = \mu_0$ 、右が  $\mu_d$  である。物理的な体積は  $V = (N_s a)^3 = N_s^3 / (N_t T_c)^3$  で、横軸は  $1/N_s^3$  なので、横軸の目盛りが 0 の点が、体積無限大である。体積が増加するに従い、それらの量は単調減少している。このことから、空間体積依存性は無視できず、以下の解析では、物理的な体積が同じ格子、つまりアスペクト比  $N_s/N_t$  が同じ格子だけの結果で  $a \rightarrow 0$ 、 $t \rightarrow 0$  の

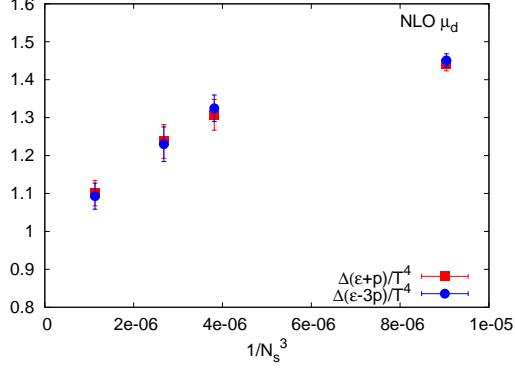


図 4.10: 空間体積依存性の図。  $\Delta(\epsilon + p)/T^4$  (赤)  $\Delta(\epsilon - 3p)/T^4$  (青) NLO の結果。  $\mu = \mu_0$  格子は  $N_s^3 \times 12$  の格子を使って比較。  $N_s = 48, 64, 72, 96$ 。

外挿を行う外挿を行う。3.2.4 で議論した微分法の計算では、誤差が大きく、体積依存性は見えなかった。SSFtX 法では、体積依存性についても解析を改良する。

#### 4.2.6 方法 1 の結果

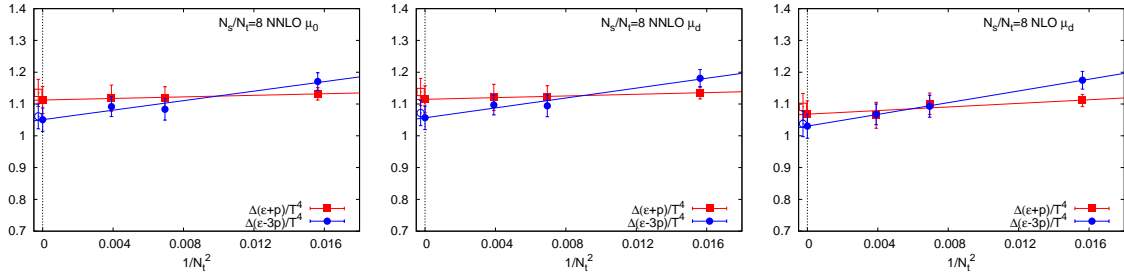


図 4.11: 各格子  $t = 0$  の値  $\Delta(\epsilon + p)/T^4$  (四角)、 $\Delta(\epsilon - 3p)/T^4$  (丸)、アスペクト比  $N_s/N_t = 8$ 。横軸は  $1/N_t^2 = (T_c a)^2$ 。中抜きは方法 2 の結果。左と真ん中は NNLO 係数を用いた結果、 $\mu = \mu_0$ (左)、 $\mu_d$ (真ん中) 右は NLO マッチング係数を用いた結果。

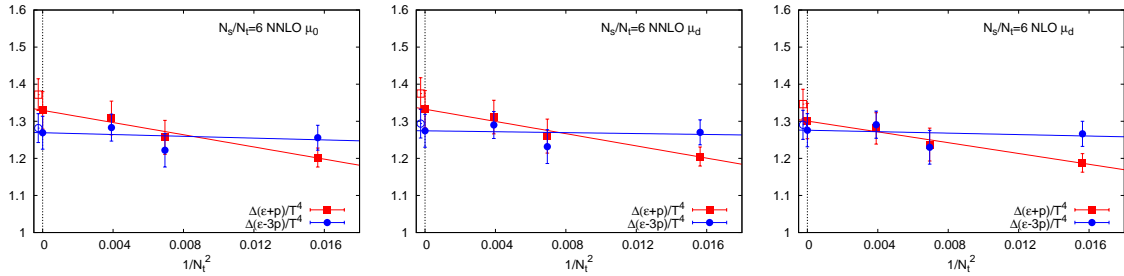


図 4.12: 図 4.11 と同様の図。アスペクト比は  $N_s/N_t = 6$

まず、方法 1 を採用したデータを分析する。方法 1 では、先にフロウタイムゼロ外挿  $t \rightarrow 0$  を行い、次に連続極限外挿  $a \rightarrow 0$  を行う。図 4.6–4.8 のデータは、統計誤差内の広い  $t$  の範囲で十分に線形とみなせる。本論文では、リニアウィンドウを次の条件を満たすように選択した。1、 $tT_c^2 \leq 0.025$

表 4.2: 各格子で  $\Delta(\epsilon - 3p)/T^4$  と  $\Delta(\epsilon + p)/T^4$  の  $t \rightarrow 0$  外挿を行った結果。誤差は統計誤差のみ。リニアウィンドウの選び方による誤差は統計誤差よりもはるかに小さい。

$N_s$	$N_t$	fit range $t/a^2$	NNLO with $\mu_0$		NNLO with $\mu_d$		NLO with $\mu_d$	
			$\frac{\Delta(\epsilon-3p)}{T^4}$	$\frac{\Delta(\epsilon+p)}{T^4}$	$\frac{\Delta(\epsilon-3p)}{T^4}$	$\frac{\Delta(\epsilon+p)}{T^4}$	$\frac{\Delta(\epsilon-3p)}{T^4}$	$\frac{\Delta(\epsilon+p)}{T^4}$
48	8	1.0–1.6	1.256(34)	1.202(26)	1.270(34)	1.205(26)	1.266(34)	1.188(25)
64	8	1.0–1.6	1.171(28)	1.132(20)	1.181(28)	1.135(20)	1.175(28)	1.111(19)
48	12	1.4–3.6	1.449(17)	1.476(19)	1.461(17)	1.480(19)	1.451(18)	1.441(18)
64	12	1.4–2.0	1.347(35)	1.375(40)	1.349(35)	1.379(40)	1.325(35)	1.307(40)
72	12	1.4–3.6	1.222(45)	1.257(46)	1.232(46)	1.260(46)	1.230(46)	1.237(44)
96	12	1.4–3.6	1.083(34)	1.120(34)	1.094(34)	1.123(34)	1.093(34)	1.101(34)
96	16	1.4–6.4	1.283(36)	1.309(45)	1.290(36)	1.311(45)	1.291(37)	1.281(42)
128	16	1.4–6.4	1.092(31)	1.118(41)	1.097(31)	1.121(41)	1.067(33)	1.065(41)

を満たす。2、4.2.6 節で説明する方法 2 で採用されたリニアウィンドウの範囲との整合性がとれている。リニアウィンドウの上限は、gradient flow による粗視化で周期境界条件を越えて、リンクが自分自身との相関を取り込んでいないという要件を満たさなければならない ( $t/a^2 < t_{1/2}$  は参考文献 [29] で定義されている)。また、下限はぼやかした半径が隣接する格子を十分に含んでいなければならないので  $t/a^2 \geq \sqrt{2}$  を満たす必要がある。ただし、 $N_t = 8$  の場合、リニアウィンドウが狭くなりすぎるため、 $t/a^2 \geq 1$  に条件を緩和した。採用したリニアウィンドウの範囲と  $t \rightarrow 0$  線形外挿の結果を表 4.2 にまとめた。外挿に用いた直線は、図 4.6–4.8 に描画した。表 4.2 の誤差は統計誤差だけである。リニアウィンドウを変えて系統誤差を検討したが、その誤差は統計誤差よりも十分に小さいことを確認した。

表 4.2 を見ると、NLO の結果、NNLO の結果 ( $\mu = \mu_d, \mu_0$ ) それぞれ、誤差の範囲で一致している。また、 $\Delta(\epsilon - 3p)/T^4$  と  $\Delta(\epsilon + p)/T^4$  の結果が誤差の範囲で一致している、これは、一次相転移点では  $\Delta p = 0$  になると言う予想通りの結果である。

ここで、表 4.2 の結果を利用して、連続極限への外挿  $a \rightarrow 0$  を実行する。有限体積効果を考慮するため、体積  $V$  を固定して外挿を実行する。4.1.7 節で説明した様に、 $N_s/N_t$  を固定することで、体積を固定する。図 4.11 では、 $N_s/N_t = 8$  である格子で、 $1/N_t^2 = (T_c a)^2$  の関数として、 $\Delta(\epsilon - 3p)/T^4$  と  $\Delta(\epsilon + p)/T^4$  の結果をプロットしている。 $N_s/N_t = 6$  の結果は、図 4.12 に示す。

これらの結果を  $(T_c a)^2 = 1/N_t^2$  の線形フィットを行うことによって、 $a \rightarrow 0$  外挿を行う。結果を見ると、傾きが小さいため、格子間隔の依存性が小さいことがわかる。また、 $N_s/N_t = 6, 8$  の結果で傾きが異なっている。これは、様々な系統誤差を考慮すると、この格子間隔の範囲では格子間隔依存性が、ほとんど存在しないことを示唆している。線形フィットで  $a \rightarrow 0$  に外挿された結果は図 4.11 と図 4.12 の  $1/N_t^2 = 0$  に塗りつぶされたシンボルでプロットされている。中抜きされた印は方法 2 の結果である。

方法 1 の潜熱の最終結果は、表 4.3 の左列にまとめられている。それぞれの結果は各アスペクト比の間で、 $\Delta\epsilon/T^4$  と  $\Delta(\epsilon - 3p)/T^4$  と  $\Delta(\epsilon + p)/T^4$  の 3 つの値が誤差の範囲でよく一致している事が分かる。NNLO マッチング係数 ( $\mu = \mu_0$ ) を使った結果は

$$\Delta p/T^4 = 0.015(17) \quad (N_s/N_t = 8) \quad \Delta p/T^4 = 0.015(14) \quad (N_s/N_t = 6) \quad (4.34)$$

である事が分かる。圧力差の大きさは、潜熱の1%程度まで小さく、ほぼ圧力差0になっている。

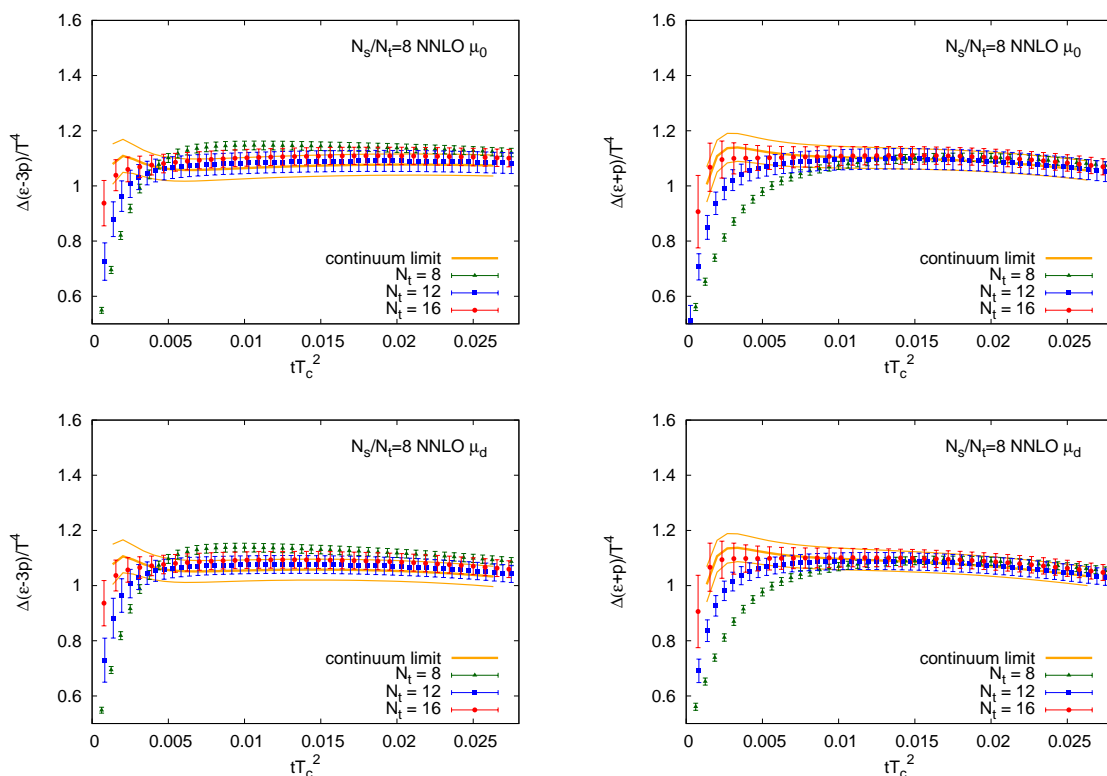


図 4.13:  $\Delta(\epsilon - 3p)/T^4$  (左)  $\Delta(\epsilon + p)/T^4$  (右) の図。NNLO マッチング係数を使用した。  $\mu = \mu_0$  (上)  $\mu = \mu_d$  (下)  $N_s/N_t = 8$ 。オレンジの線は連続極限の結果 (3 本の線の内中央の線が期待値、上下の線はそれぞれ誤差の上限と下限)。

表 4.3:  $\Delta\epsilon/T^4$  と  $\Delta(\epsilon - 3p)/T^4$  と  $\Delta(\epsilon + p)/T^4$  の二重外挿を行った後の値。左が方法 1、右が方法 2。誤差は統計誤差のみ考慮した。系統誤差は統計誤差よりも十分に小さい。

	$\frac{N_s}{N_t}$	$\frac{\Delta\epsilon}{T^4}$	method 1		method 2		
			$\frac{\Delta(\epsilon - 3p)}{T^4}$	$\frac{\Delta(\epsilon + p)}{T^4}$	$\frac{\Delta\epsilon}{T^4}$	$\frac{\Delta(\epsilon - 3p)}{T^4}$	$\frac{\Delta(\epsilon + p)}{T^4}$
NNLO $\mu_0$	6	1.314(45)	1.269(44)	1.329(50)	1.349(38)	1.282(39)	1.372(43)
NNLO $\mu_d$	6	1.317(45)	1.274(44)	1.333(50)	1.355(38)	1.294(39)	1.375(43)
NLO $\mu_d$	6	1.293(43)	1.276(45)	1.301(48)	1.332(37)	1.290(39)	1.346(40)
NNLO $\mu_0$	8	1.095(40)	1.051(37)	1.113(42)	1.117(40)	1.061(39)	1.135(43)
NNLO $\mu_d$	8	1.099(40)	1.057(37)	1.115(42)	1.121(41)	1.072(40)	1.138(43)
NLO $\mu_d$	8	1.056(40)	1.030(38)	1.068(42)	1.078(40)	1.037(40)	1.091(42)

#### 4.2.7 方法 2 の結果

次に、方法 2 を採用して、二重外挿を行う  $(t, a) \rightarrow (0, 0)$ 、つまり、初めに各フロー時間  $t$  で  $a \rightarrow 0$  極限をとり、次に  $t \rightarrow 0$  外挿を行う。有限格子効果を考慮するため、アスペクト比  $N_s/N_t$

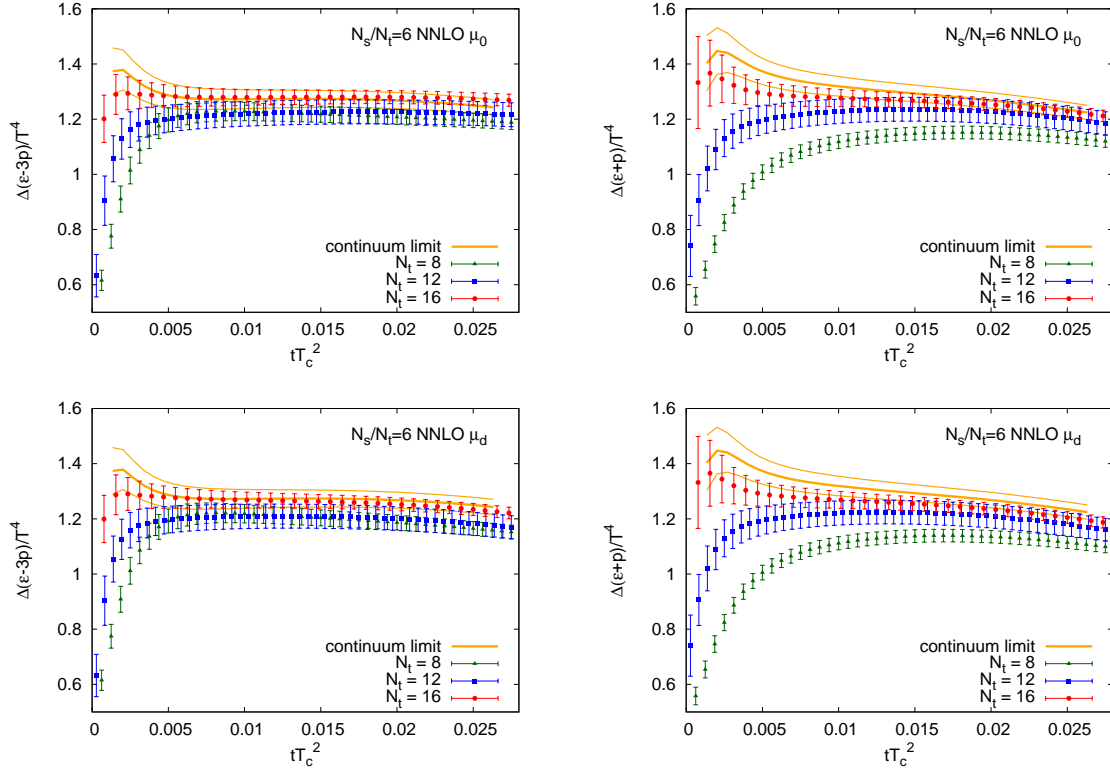


図 4.14: 図 4.13 と同様の図。ただし、 $N_s/N_t = 6$ 。

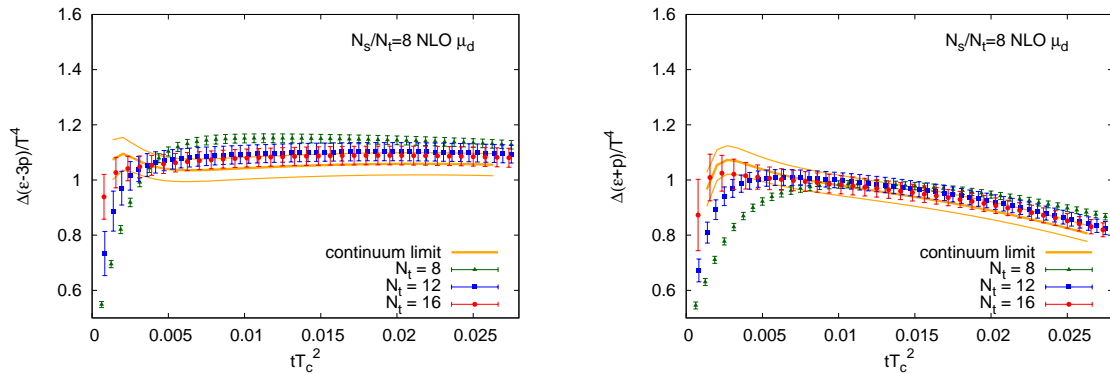


図 4.15: 図 4.13 と同様の図。ただし、 $N_s/N_t = 8$ 、NLO マッチング係数を使用。

を固定する。図 4.13 に物理単位のプロウ時間の関数として  $N_s/N_t = 8$  での  $\Delta(\epsilon - 3p)/T^4$ (左)、 $\Delta(\epsilon + p)/T^4$ (右) の結果を、プロットする。図 4.14 は  $N_s/N_t = 6$  の結果である。図 4.15 と 4.16 は NLO マッチング係数を使った結果である。赤、青、緑の印は  $N_t = 8, 12, 16$  の結果であることを示している。格子間隔  $a = 1/(N_t T_c)$  は  $N_t$  によって変化することを考慮すると、プロウ時間が大きくなれば、格子間隔依存性が急速に抑制されることが分かる。

各プロウタイム  $tT_c^2$  で  $1/N_t^2$  の 1 次関数でフィットを行うことで  $a \rightarrow 0$  極限をとることができる。図 4.13— 4.16 のオレンジ色の線は連続極限の結果である。中央の曲線は期待値を表し、上下の線は誤差の上下限を表している。図 4.17 には、連続極限における、 $\Delta(\epsilon - 3p)/T^4$  (丸) $\Delta(\epsilon + p)/T^4$  (四角) の結果を  $tT_c^2$  の関数としてプロットしている  $N_s/N_t = 8$  (塗りつぶし)  $N_s/N_t = 6$  (中抜き) の



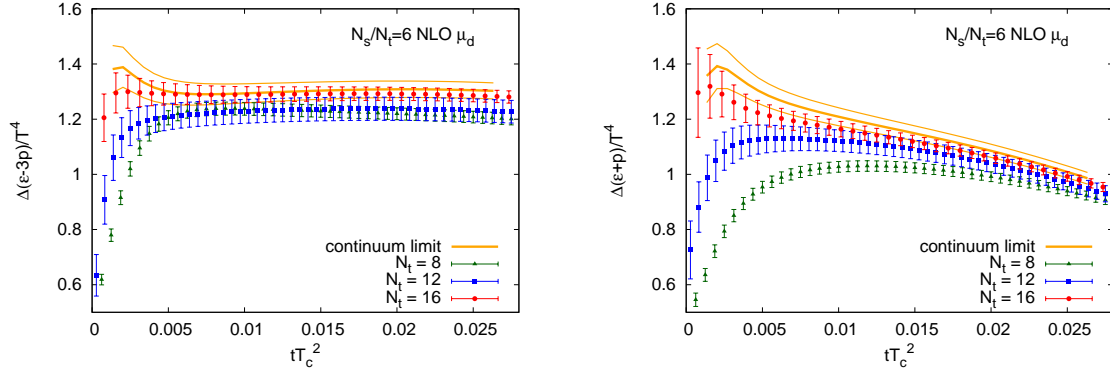


図 4.16: 図 4.15 と同様の図。ただし、 $N_s/N_t = 6$ 。

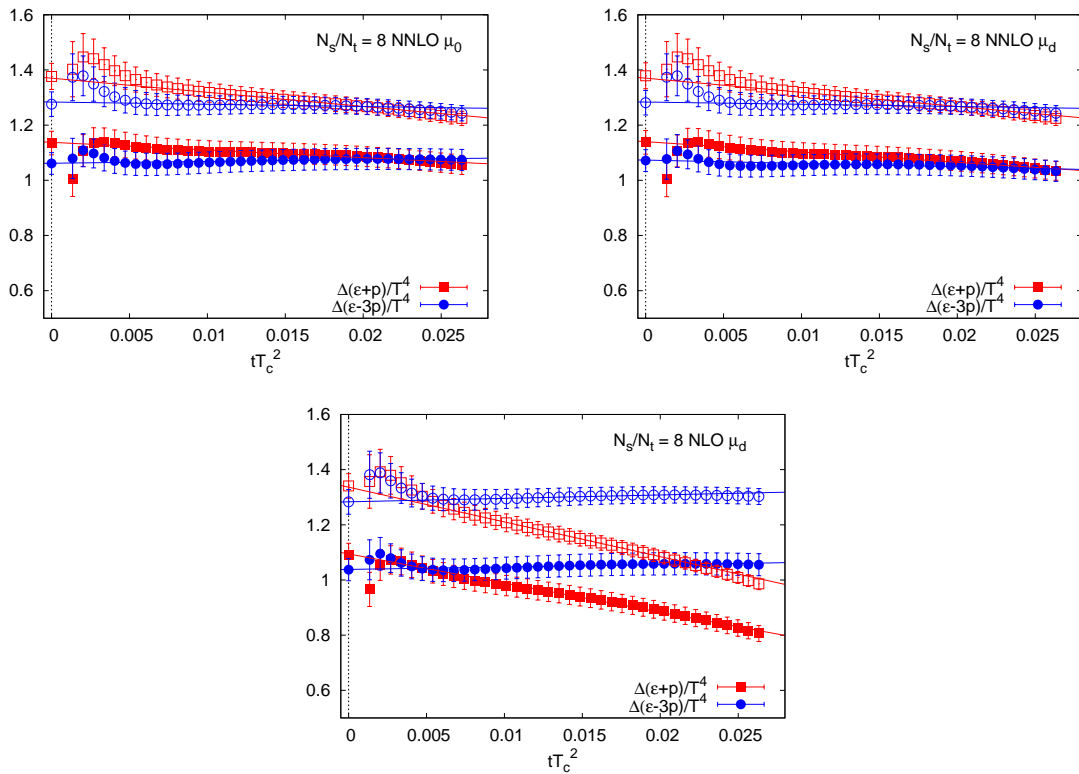


図 4.17:  $\Delta(\epsilon + p)/T^4$ (赤四角) $\Delta(\epsilon - 3p)/T^4$ (青丸)、 $\mu = \mu_0$ (左 上) $\mu = \mu_d$ (右上) は NNLO マッチング係数を使用、 $\mu = \mu_d$ (下) は NNLO マッチング係数を使用。塗りつぶされた印は  $N_s/N_t = 8$  であり、中抜きされた印は  $N_s/N_t = 6$  である。縦軸の上にある点は連続極限の値である。

結果を並べてプロットしている。 $\mu = \mu_0, \mu_d$  を採用した結果は左上、右上に載せている。これらの結果を見ると、くりこみスケール  $\mu$  の依存性はほとんど無視できることが分かる。図 4.17 の下図には NLO マッチング係数のデータを使用した結果を載せている。NNLO の結果と比較すると、NNLO のマッチング係数を採用することで  $t$  に対する傾きは少なくなる事に加え、有限  $t$  の圧力ギャップ  $\Delta p/T^4$  が大幅に抑制されることがわかる。

次に、連続極限への外挿結果を使用して、 $t \rightarrow 0$  外挿を行う。 $O(a^2/t)$  の項による誤差が含まれる  $t$  の小さい領域のデータは、フィットに使用しない。 $t \rightarrow 0$  外挿による系統誤差を推定す

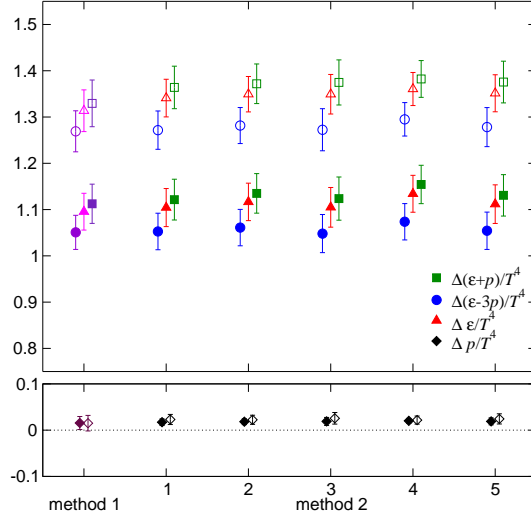


図 4.18: フィット範囲依存性の図、 $\Delta\epsilon/T^4$ (三角) $\Delta(\epsilon+p)/T^4$ (四角) $\Delta(\epsilon-3p)/T^4$ (丸) $\Delta p/T^4$ (菱形) 方法 2 の  $t=0$ 、NNLO( $\mu_0$ ) の結果をプロットしている塗りつぶされたシンボルは  $N_s/N_t = 8$  中抜きされた印は  $N_s/N_t = 6$ 。横軸の 1-5 は文中のフィット範囲に対応している。図の左には方法 1 の結果をプロットしている。

るために、次の 5 つのフィット範囲について解析を行う。範囲 1:  $0.010 < tT_c < 0.020$ 、範囲 2:  $0.010 < tT_c < 0.025$ 、範囲 3:  $0.005 < tT_c < 0.020$ 、範囲 4:  $0.015 < tT_c < 0.025$ 、範囲 5:  $0.005 < tT_c < 0.025$ 。図 4.18 に NNLO マッチング係数  $\mu_0$  スケールを使用した、 $tT_c^2$  での線形外挿の結果をまとめる。それぞれのフィット範囲の結果は、互いに誤差の範囲で一致している事が分かる。図 4.18 では、方法 1 の結果も左端に示している。どちらの方法ともに、誤差の範囲内で一致している。これは 4.1.7 節で述べたように、一致するべきである。

$t=0$  での  $\Delta(\epsilon+p)/T^4$  と  $\Delta(\epsilon-3p)/T^4$  の結果は、統計誤差の範囲内で互いに一致している。 $\Delta p$  の直截の計算結果は、図 4.18 の下部に菱形の印で示されている。 $\Delta p$  の値は潜熱の約 1%で、式 (4.34) で得られる方法 1 の結果と一致している事が分かる。

方法 2 による潜熱の結果は、表 4.3 の右側の列にまとめられている、本論文ではフィット範囲 2 の結果を最終結果として採用した。誤差は統計誤差のみ。図 4.18 を見ると分かるように、フィット範囲による系統誤差は統計誤差よりも小さい。

#### 4.2.8 ブラケットオペレーターを用いた計算結果との比較

この節では、式 (4.12) と式 (4.13) の演算子  $U_{\mu\nu}(t, x)$  と  $E(t, x)$  の定義の中の、フロウされた場の強さ  $G_{\mu\nu}(t, x)$  を、どの格子上の演算子で計算するかが、結果に影響するかどうかを確認する。よく使われる選択肢は、ブラケット演算子とクローバー型演算子である。

図 4.19 は、4.1.7 節で議論した方法 2 を採用し、クローバー型演算子とブラケット演算子から得られた連続極限における  $\Delta(\epsilon-3p)/T^4$  と  $\Delta(\epsilon+p)/T^4$  の結果である。上の図がアスペクト比 8 の結果で、下の図が 6 の結果である。青印はクローバー、赤印はブラケットの結果を表している。図を見ると、 $t$  が大きい領域で 2 つの結果がよく一致している。 $tT_c^2 \leq 0.01$  での、2 つの値の差は格子効果による誤差が原因であり、 $t \rightarrow 0$  外挿を行うことによって、取り除くことができる。クロー

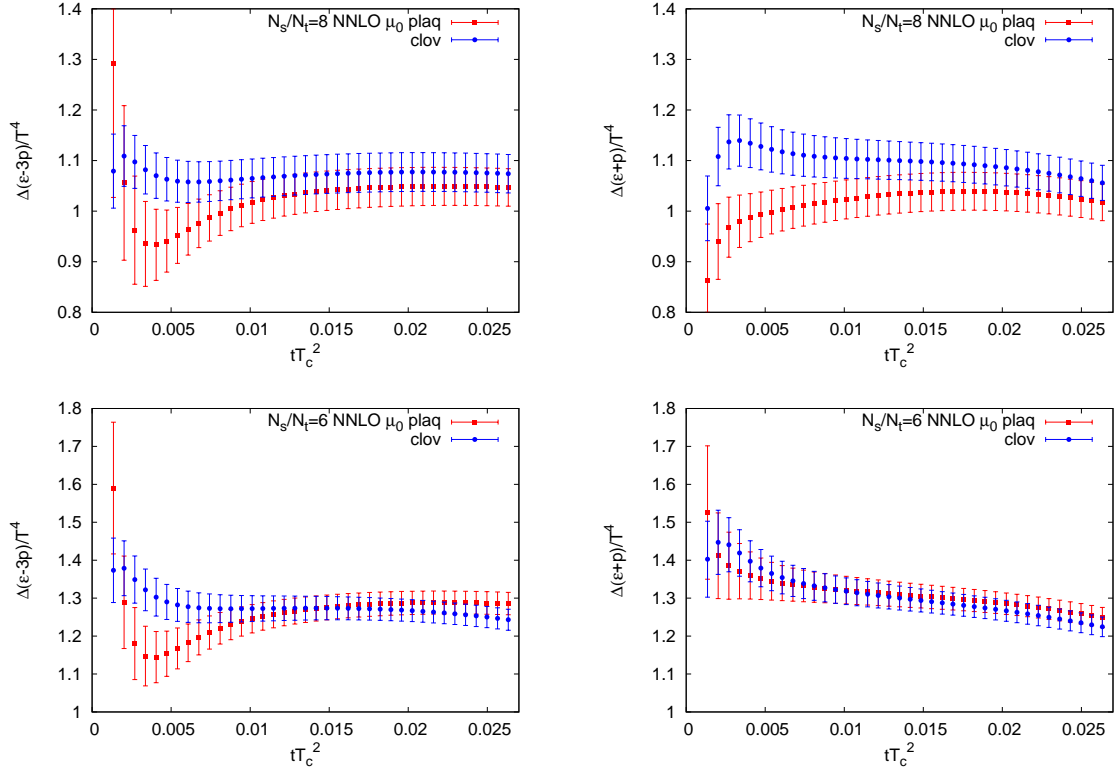


図 4.19: 連続極限の  $\Delta(\epsilon - 3p)/T^4$  の図。クローバーオペレータ (赤) プラケットオペレータ (青)。 $N_s/N_t = 8$ (上)6(下)。NNLO マッチング係数、くりこみスケール  $\mu = \mu_0$ 。

パー型演算子を用いた結果の方が、リニアウィンドウが広い為、本論文では  $U_{\mu\nu}(t, x)$ 、 $E(t, x)$  の計算をクローバー型演算子を用いて行った。

#### 4.2.9 SFtX 法を用いた潜熱の結果

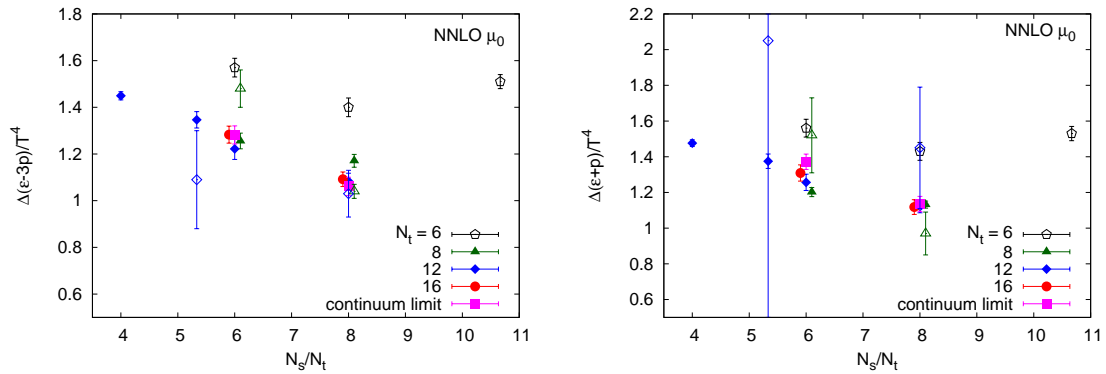


図 4.20: 各格子、連続極限での  $\Delta(\epsilon - 3p)/T^4$ (左)  $\Delta(\epsilon + p)/T^4$ (右) の図。横軸は  $N_s/N_t = \sqrt[3]{VT_c}$ 。NNLO マッチング係数、 $\mu = \mu_0$  スケールで計算。中抜き印は微分法の結果。

最後に、本論文での潜熱に対する SFtX 法の最終結果を決定する。表 4.3 と図 4.18 から、方法 1、2 の結果がよく一致していることが分かり、これまでの議論から、くりこみスケールについて

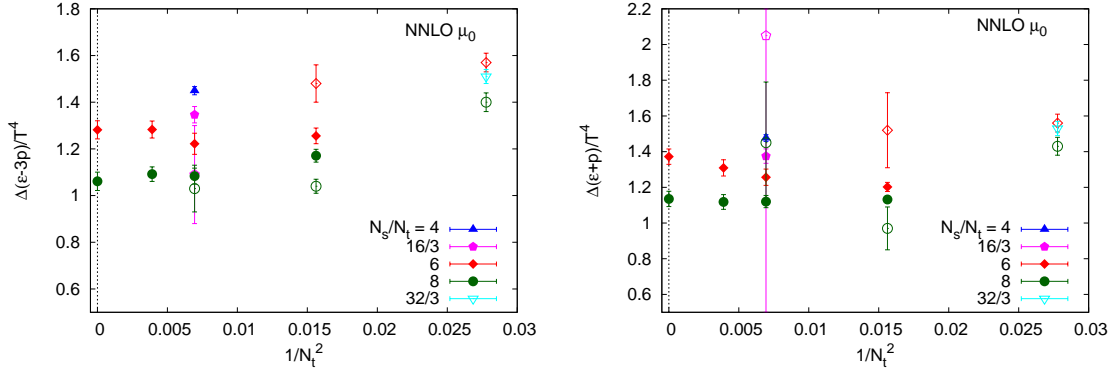


図 4.21: 各格子、連続極限での  $\Delta(\epsilon - 3p)/T^4$ (左) $\Delta(\epsilon + p)/T^4$ (右) の図。横軸は  $1/N_t^2 = a^2 T_c^2$ 。NNLO マッチング係数、 $\mu = \mu_0$  スケールで計算。中抜き印は微分法の結果。

もよく一致していることがわかる。マッチング係数については、NNLO の係数を使った方が、傾きが抑制されるためよりよいといえる。そのため、本論文では、NNLO マッチング係数を用い、くりこみスケール  $\mu = \mu_0$  の結果を最終結果として採用する。

$N_s/N_t = 8$  の結果は、

$$\Delta(\epsilon - 3p)/T^4 = 1.061(39) \quad (4.35)$$

$$\Delta(\epsilon + p)/T^4 = 1.135(43) \quad (4.36)$$

$$\Delta\epsilon/T^4 = 1.117(40) \quad (4.37)$$

そして、 $N_s/N_t = 6$  の結果は、

$$\Delta(\epsilon - 3p)/T^4 = 1.282(39) \quad (4.38)$$

$$\Delta(\epsilon + p)/T^4 = 1.372(43) \quad (4.39)$$

$$\Delta\epsilon/T^4 = 1.349(38) \quad (4.40)$$

となった。

方法 1、2 による系統誤差、フィット範囲による系統誤差はどちらも、この最終結果の統計誤差よりも小さい。この最終結果を用いて、熱力学極限への 2 点の外挿を実行する。1/V 線形外挿では、 $\Delta\epsilon/T^4 \sim 0.95 \pm 0.07$ 、定数外挿を行うと、 $\Delta\epsilon/T^4 \sim 1.23 \pm 0.03$  となる。

#### 4.2.10 微分法との比較

SfTX 法の結果を微分法で得られた結果と比較する。SfTX 法の計算コストは、微分法の計算コストよりもはるかに小さくなる。微分法に必要なカーシュ係数の非摂動計算には、多くの統計数を用いた大規模な配位生成が必要になるためである。SfTX 法ではカーシュ係数を使用しなくても計算を行うことが出来ることと、グラディエントフローにより、量子揺らぎが抑制されたおかげで、統計誤差が非常に小さくなる。

微分法の計算結果では、 $N_t = 6, 8, 12$  の配位を用いて、 $\Delta\epsilon/T^4 = 0.75 \pm 0.17$  という最終結果を得た。微分法の計算結果では、潜熱の空間体積依存性は無いと考えた [28]。しかし、SFtX 法の解析から、一次相転移近傍の潜熱には空間体積依存性がある事が確認された。SFtX 法から推測される空間体積依存性は、カーシュ係数から得られる統計誤差よりもはるかに小さい、そのため、微分法を用いた計算では空間体積依存性を見出すことが出来なかった。

連続極限と体積無限大極限への外挿による間違えを避けるために、有限格子サイズの  $\Delta(\epsilon-3p)/T^4$  と  $\Delta(\epsilon+p)/T^4$  の結果を直接比較する。図 4.20 に、表 4.2 の NNLO マッチング係数、 $\mu_0$  スケール、 $t \rightarrow 0$  外挿を行った結果を示す。印の形と色は、それぞれ、 $N_t = 8$  が赤菱形、12 が緑丸、16 が青三角である。横軸は、 $N_s/N_t = \sqrt[3]{V}T_c$  である。マゼンタの正方形は、方法 2 で計算した  $N_s/N_t = 6$  と 8 の結果を表している。中抜き印は微分法の結果で、 $N_t = 6$  (黒五角形)、8 (赤菱形)、12 (緑丸) で示す。微分法の  $\Delta(\epsilon+p)/T^4$  の大きな統計誤差は、 $N_t$  の増加とともに増加するカーシュ係数の誤差から伝搬している。図 4.20 より、SFtX 法と微分法による熱力学量の結果は、同じ  $N_s/N_t$  でほぼ一致していることが分かる。SFtX 法と微分法では、計算方法が違い、使われるマッチング係数もまったく違うため、単純に計算を行えば、2つの方法の結果が一致するというわけではない。連続極限では一致すべきであるが、有限格子間隔で一致する必要もない。しかし、今回得られた SFtX 法の計算結果は微分法と一致し、SFtX 法の計算結果が妥当であることが示されている。

また、4.2.6 節で議論したように、我々が計算した  $N_t = 8, 12, 16$  の範囲で、SFtX 法による結果の格子間隔依存性は小さい。微分法による結果も、 $N_t = 8$  と 12 とでは、格子間隔依存性が小さい。図 4.21 の左右の図は、 $\Delta(\epsilon-3p)/T^4$  と  $\Delta(\epsilon+p)/T^4$  を  $1/N_t^2 = a^2 T_c^2$  の関数としてプロットした結果である。赤い菱形と緑の丸は、 $N_s/N_t = 6$  と 8 の結果を表している。この図の右端にプロットされている  $N_t = 6$  のデータは、より大きい格子のデータの傾向にそわない値であることを示し、 $N_t = 6$  の結果には大きな離散化誤差が含まれていることを示唆している。図 3.9 の  $N_t = 6$  のデータを使わずに、連続極限への外挿を行うことで、微分法の最終結果が少し増加し、SFtX 法の最終結果へと近づくことが予想される。しかし、その場合、2点での連続極限への外挿となるため、外挿への信頼性が失われるため、 $N_t = 6$  データを省くことはできない。

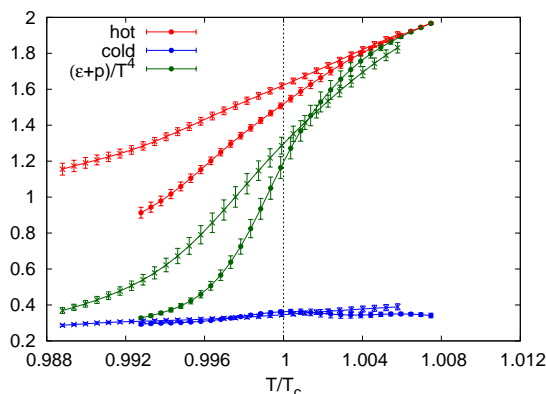


図 4.22: SFtX 法を用いて  $(\epsilon+p)/T^4$  を相転移点近傍で計算した。シンボルの色は高温相 (赤)、低温相 (青)、全配位 (緑) を使って計算を行ったことを表している。NNLO マッチング係数、 $\mu_0$  スケールを使用。48<sup>3</sup> × 8 (バツ)、64<sup>3</sup> × 8 (丸)。

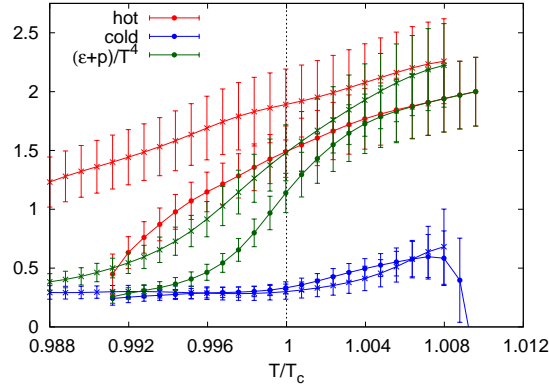


図 4.23: 図 4.22 と同様の図、ただし、微分法を使用。

#### 4.2.11 相転移点近傍での潜熱のヒステリシス曲線

4.2.5 節では、潜熱が系の空間体積に明らかに依存していることを確認した。しかし、一次相転移では相関長が有限であるため、体積が十分に大きい場合、空間体積依存性は小さいはずである。潜熱の空間体積依存性の原因を見つけるために、多点再重み付け法を用いて、相転移温度  $T_c$  近傍における、 $(\epsilon + p)/T^4$  を高温相のみの配位、低温相のみの配位を用いて計算を行った。

$48^3 \times 8$ 、 $64^3 \times 8$  それぞれの格子で得られた結果は、バツ印、丸印でプロットされている。図 4.22 の結果は  $t/a^2 = 1.4$  で、NNLO マッチング係数、 $\mu_0$  スケールを用いて計算されている。印の色は使用した配位を表していて、高温相 (赤)、低温相 (青)、全配位 (緑) を使用して計算を行ったということに対応している。横軸は相転移温度  $T_c$  で規格化された、温度  $T = 1/(N_t a)$  であり、3 章や、図 3.3 殻分かるように、格子間隔  $a$  と  $\beta$  の関係は、 $N_t$  の関数とした  $\beta_c$  から決まる。 $T_c$  以下の高温相の結果と、 $T_c$  以上の低温相の結果は、それぞれに対応する準安定状態 で得られた結果である。図 4.22 を見ると、空間体積依存性は高温相の準安定状態でのみ発生し、低温相では準安定状態でも、明らかな体積依存性は見られない事が分かる。したがって、潜熱の空間体積依存性は、高温相の準安定状態からの寄与によるものであると結論づけられる。また、この図から、潜熱は相転移温度  $\beta_c$  の値に敏感であることがわかる。

図 4.23 は、微分法を用いて図 4.22 と同等の計算を行った図である [27, 28]。カーシュ係数の非摂動的決定は、 $\beta_c$  でのみ適用可能であるが、この計算では  $\beta_c$  で得られたカーシュ係数を  $\beta_c$  近傍の  $\beta$  でも使用している。統計誤差は大きいものの、図 4.22 と同じような傾向を示しているといえる。

準安定状態の性質について、より明確に解析を行うためには、より多くの統計数が必要になる。なぜなら、 $T$  が  $T_c$  に十分に近くない場合、再重み付け計算を行った時の相分離後の準安定状態の有効な統計数が少なくなってしまうためである。

### 4.3 SFtX 法の結論

SFtX 法を用いて、相転移点近傍の熱力学量について、様々な解析を行った。

一次相転移では  $T_c$  で、高温相と低温相の二相共存状態になっていることから想像されるように、

$T_C$  直上では相の間の圧力差が 0 になっていることを確認した。連続極限における潜熱の結果は、4.2.9 節に要約されている。本論文では、潜熱の最終結果を、アスペクト比  $N_s/N_t = \sqrt[3]{VT_c} = 8$  にて、 $\Delta\epsilon/T^4 = 1.053(38)$ 、 $N_s/N_t = 6$  にて  $\Delta\epsilon/T^4 = 1.352(38)$  とした。 $\Delta(\epsilon + p)/T^4$  のヒステリシス曲線の解析を行い、 $T_C$  近傍の詳しい解析を行った。その結果から、 $\Delta(\epsilon + p)/T^4$  は非閉じ込め相の準安定状態では、空間体積の変化に敏感であるのに対し、閉じ込め相では鈍感であった。 $\Delta(\epsilon + p)/T^4$  の値は、準安定状態では、空間体積が増加するにつれて減少した。熱力学的極限 (空間体積無限大極限) の潜熱を正確に決定するにはより大きな統計を用いた研究が必要になる。

さらに、様々な格子間隔のデータを用意して、SFtX 法の系統誤差について評価した。二重外挿  $(a, t) \rightarrow (0, 0)$  の 2 つの順番について、方法 1 (最初に  $t \rightarrow 0$ 、次に  $a \rightarrow 0$ ) と方法 2 (最初に  $a \rightarrow 0$ 、次に  $t \rightarrow 0$ ) で比較を行った。また、繰り込みスケールの効果と、マッチング係数における高次項の切り捨てについても解析を行った。これらの代替手順による最終結果は、誤差の範囲で一致し、矛盾がないことを確認した。また、NNLO マッチング係数を使用すると、SFtX 法での潜熱の振る舞いが改善される事も分かった。

## 第5章 結論

相転移点直上での熱力学量について、二つの方法で計算した。微分法は、熱力学の処方箋にしたがって分配関数を微分することで熱力学量を計算する方法である。SFtX法は gradient flow という方法で、格子を粗視化し、格子上で連続極限をとっても発散を生じないようにして、熱力学量を計算する方法である。

一次相転移点で高温相と低温相が安定に共存するために必要な条件である、二相間の圧力が同じであることは確認できた。確立された方法である微分法の結果と比較して、SFtX法の計算結果の妥当性を確認した。まったく計算方法の違う2つ方法の結果を、連続極限をとらずに単純に比較すべきかはわからないが、 $N_t = 8$ より大きい結果のみを比べると、2つの方法による潜熱の結果はほぼ一致した。ほかにも、体積依存性や、相転移点近傍でのエネルギー密度のヒステリシス曲線を描いて比較を行った。その結果、2つの方法は同じ傾向を示すことが分かった。このように、2つの計算方法で一次相転移点における熱力学量の計算結果を比較し、その結果からSFtX法の妥当性を確認した。



## 謝辞

素粒子論研究室に配属してから今までの3年間、浅賀岳彦先生、江尻信司先生、谷本盛光先生、中野博章先生にお世話になりました、心から感謝いたします。とくに江尻先生には、至らぬところの多い私にうんざりせずに最後まで世話をさせていただき本当に感謝しています。また、共同研究者の石見涼さん、金谷和至先生、北沢正清先生、鈴木博先生、谷口祐介先生、梅田貴士先生にも感謝しています。

## 付録A 誤差評価

数値計算を用いて物理を解明していく上で重要な要素の一つに誤差の評価がある。

数値計算を行うと様々な計算結果が得られるが、その結果が理論、例えば連続極限で摂動論の結果と一致することなどを確認できなければ、その計算結果に物理的意味をもたせる時に説得力がなくなってしまう。もし、誤差評価があいまいで実際の誤差よりも多く誤差を見積もってしまうと、本来理論と一致するはずのない計算結果が一見一致してしまうように見えたり、計算コードに隠れているバグを見抜けなかったりする。逆に本来の誤差よりも誤差を小さく見積もってしまうと、統計数が少し変わっただけで計算結果が変わったり、本来その計算結果が持つ性質が見えなくなってしまうたりする。

したがって、誤差がどの程度の大きさだったら妥当なのかを正しく見積もることが、数値計算を用いて物理量を研究、考察する上で非常に重要な要素であると言える。

### A.1 基本的な誤差

数値計算においてある物理量  $\mathcal{O}$  を統計数  $N$  個集めたときの期待値と統計誤差は次の様に定義される。

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{O}_i \quad (\text{A.1})$$

$$\delta \langle \mathcal{O} \rangle = \sqrt{\frac{\langle (\mathcal{O} - \langle \mathcal{O} \rangle)^2 \rangle}{N-1}} = \sqrt{\frac{\langle \mathcal{O}^2 \rangle - \langle \mathcal{O} \rangle^2}{N-1}} \quad (\text{A.2})$$

もし、測定、観測できる量と数値計算を用いて解析したい量が一致している場合は、この定義にしたがって誤差を評価すればなんの問題もなく妥当な誤差を見積もることができる。

しかし、解析したい物理量が複雑な場合は次の誤差伝搬の式を用いて誤差を見積もる場合が多い。

$$\delta \langle f(\{\mathcal{O}\}) \rangle \equiv \sum_a \left\langle \frac{\partial f}{\partial \mathcal{O}_a} \right\rangle \delta \langle \mathcal{O}_a \rangle \quad (\text{A.3})$$

ここで、 $\mathcal{O}_a$  は様々な物理量のおつまりで、 $f$  はそれらの物理量の任意の関数である。

### A.2 ジャック・ナイフ法

誤差伝搬は様々な物理量の誤差を評価する上で強力な道具になるが、大抵の場合、誤差を過大評価してしまう。それは  $\mathcal{O}_a$  に相関があるため、誤差の一部が相殺することによって、真の誤差は

誤差伝搬の評価よりも小さくなってしまいうためである。この問題を解決するために使われている誤差評価方法のうちの一つにジャック・ナイフ法がある。

ジャック・ナイフ法のところは、測定した相関のある物理量を、相関長ほどの大きさをもつデータの塊ごとに解析するというところにある。そのため、測定、観測した単純な統計集合ではなく、ジャック・ナイフ統計集合をあつかう、と言う概念を理解する必要がある。全統計数  $N$  のデータを、相関長ほどの長さで分割する。この時、分割されたデータの長さ (bin-size) を  $N_{\text{bin}}$  とする。つまりデータを  $n = N/N_{\text{bin}}$  等分するということである。次に、分割したデータの塊に  $N_1, N_2, \dots, N_n$  という風に名前を付ける。最後に全統計から順番にのデータの塊を取り除くことによって、ジャック・ナイフ統計集合が作られる。

つまり、ジャック・ナイフ統計集合において  $i$  番目のデータというのは  $N_i$  のデータの塊を取り除いた統計の期待値ということの意味しており、次の式の様にかける。

$$\langle \mathcal{O} \rangle_i = \frac{1}{N - N_{\text{bin}}} \sum_{k \notin N_i} \mathcal{O}_k \quad (\text{A.4})$$

そして、この統計集合を用いて誤差を評価することによって妥当な誤差評価を行うことができる。この統計集合をつかって計算できる期待値と誤差は次のとおり。

$$\langle f(\mathcal{O}) \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\langle \mathcal{O} \rangle_i) \quad (\text{A.5})$$

$$\delta \langle f(\mathcal{O}) \rangle = \sqrt{(n-1) \{ \langle f(\mathcal{O})^2 \rangle - \langle f(\mathcal{O}) \rangle^2 \}} \quad (\text{A.6})$$

ここで注意しなくてはいけないのが、 $\langle f(\mathcal{O})^2 \rangle$  の部分である。ジャック・ナイフ法は単純かつ明解に相関のあるデータの誤差の評価を与えるが、それゆえにジャック・ナイフ統計集合の概念を理解していないと、 $\langle f(\mathcal{O})^2 \rangle$  を正しく計算することができず、間違った誤差評価をしてしまうことがある。

間違いが多いのが、ある物理量のジャック・ナイフ統計集合の2乗の期待値ではなく、ある物理量の2乗のジャック・ナイフ統計集合の期待値をとってしまうという間違いである。言葉でかくと分かり辛いが、式で書くと簡単で、

$$\langle f(\mathcal{O})^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\langle \mathcal{O} \rangle_i)^2 \quad (\text{A.7})$$

が正しいジャック・ナイフ統計集合での2乗の期待値であり、

$$\langle f(\mathcal{O}^2) \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\langle \mathcal{O}^2 \rangle_i) \quad (\text{A.8})$$

は普通の統計集合での2乗の期待値を見ていることになる。

この2つは似ている様に見えるが大きく違う。(A.7) を使って求めた誤差は、ビンサイズの大きさを変えると変化するが、(A.8) を使って求めた誤差 (正しくは誤差ですらない) はビンサイズを変えても変化しない。なぜなら、(A.8) は単純な統計集合での2乗の期待値をジャック・ナイフ統計

集合に直して期待値を見ているだけなので、単純な統計集合の時とジャック・ナイフ統計集合の時  
で期待値には差は無いはずだからである。

## 参考文献

- [1] H. Suzuki, “Energy-momentum tensor from the Yang-Mills gradient flow,” PTEP **2013**, 083B03 (2013) Erratum: [PTEP **2015**, 079201 (2015)].
- [2] H. Makino and H. Suzuki, “Lattice energy-momentum tensor from the Yang-Mills gradient flow—inclusion of fermion fields,” PTEP **2014**, 063B02 (2014) Erratum: [PTEP **2015**, 079202 (2015)]
- [3] R. Narayanan and H. Neuberger, “Infinite  $N$  phase transitions in continuum Wilson loop operators,” JHEP **0603**, 064 (2006)
- [4] M. Lüscher, “Trivializing maps, the Wilson flow and the HMC algorithm,” Commun. Math. Phys. **293**, 899 (2010)
- [5] M. Lüscher, “Properties and uses of the Wilson flow in lattice QCD,” JHEP **1008**, 071 (2010) Erratum: [**1403**, 092 (2014)]
- [6] M. Lüscher and P. Weisz, “Perturbative analysis of the gradient flow in nonabelian gauge theories,” JHEP **1102**, 051 (2011)
- [7] M. Lüscher, “Chiral symmetry and the Yang-Mills gradient flow,” JHEP **1304**, 123 (2013)
- [8] M. Asakawa, T. Hatsuda, E. Itou, M. Kitazawa, H. Suzuki [FlowQCD Collaboration], “Thermodynamics of SU(3) gauge theory from gradient flow on the lattice,” Phys. Rev. D **90**, 011501 (2014) Erratum: **92**, 059902 (2015)
- [9] M. Kitazawa, T. Iritani, M. Asakawa, T. Hatsuda, and H. Suzuki, “Equation of State for SU(3) Gauge Theory via the Energy-Momentum Tensor under Gradient Flow,” Phys. Rev. D **94**, 114512 (2016).
- [10] T. Hirakida, E. Itou and H. Kouno, “Thermodynamics for pure SU(2) gauge theory using gradient flow,” PTEP **2019**, 033B01 (2019).
- [11] T. Iritani, M. Kitazawa, H. Suzuki, and H. Takaura, “Thermodynamics in quenched QCD: energy-momentum tensor with two-loop order coefficients in the gradient-flow formalism,” Prog. Theor. Exp. Phys. **2019**, 023B02 (2019).
- [12] M. Kitazawa, T. Iritani, M. Asakawa and T. Hatsuda, “Correlations of the energy-momentum tensor via gradient flow in SU(3) Yang-Mills theory at finite temperature,” Phys. Rev. D **96**, no. 11, 111502 (2017),

- [13] R. Yanagihara, T. Iritani, M. Kitazawa, M. Asakawa and T. Hatsuda, “Distribution of Stress Tensor around Static Quark–Anti-Quark from Yang-Mills Gradient Flow,” *Phys. Lett. B* **789**, 210 (2019).
- [14] M. Kitazawa, S. Mogliacci, I. Kolbé and W. Horowitz, “Anisotropic pressure induced by finite-size effects in SU(3) Yang-Mills theory,” *Phys. Rev. D* **99**, 094507 (2019).
- [15] R. Yanagihara, M. Kitazawa, M. Asakawa and T. Hatsuda, “Distribution of Energy-Momentum Tensor around a Static Quark in the Deconfined Phase of SU(3) Yang-Mills Theory,” arXiv:2010.13465 [hep-lat].
- [16] Y. Taniguchi, S. Ejiri, K. Kanaya, M. Kitazawa, A. Suzuki, H. Suzuki, and T. Umeda, “Energy-momentum tensor correlation function in  $N_f = 2 + 1$  full QCD at finite temperature,” *EPJ Web Conf.* **175**, 07013 (2018); Y. Taniguchi, A. Baba, A. Suzuki, S. Ejiri, K. Kanaya, M. Kitazawa, T. Shimojo, H. Suzuki, and T. Umeda, “Study of energy-momentum tensor correlation function in  $N_f = 2 + 1$  full QCD for QGP viscosities,” *Proc. Sci.*, LATTICE 2018, 166 (2019).
- [17] G. Burgers, F. Karsch, A. Nakamura and I.O. Stamatescu, QCD on anisotropic lattices, *Nucl. Phys. B* 304 , 587 (1988).
- [18] QCD-TARO Collaboration: M. Fujisaki et al. , Finite temperature gauge theory on anisotropic lattices, *Nucl. Phys. B(Proc. Suppl.)* 53 , 426 (1997).
- [19] J. Engels, F. Karsch and T. Scheideler, Direct determination of the gauge coupling derivatives for the energy density in lattice QCD, *Nucl. Phys. B(Proc. Suppl.)* 63 , 427 (1998).
- [20] J. Engels, F. Karsch and T. Scheideler, Determination of anisotropy coefficients for SU(3) gauge actions from the integral and matching methods, *Nucl. Phys. B* 564 , 303 (2000).
- [21] T.R. Klassen, The Anisotropic Wilson gauge action, *Nucl. Phys. B* 533 , 557 (1998).
- [22] A.M. Ferrenberg and R.H. Swendsen, New Monte Carlo technique for studying phase transitions *Phys. Rev. Lett.* 61 , 2635 (1988); Optimized Monte Carlo analysis, *Phys. Rev. Lett.* 63 , 1195 (1989).
- [23] R. Iwami, S. Ejiri, K. Kanaya, Y. Nakagawa, D. Yamamoto, T. Umeda (WHOT-QCD Collaboration), Multipoint reweighting method and its applications to lattice QCD, *Phys. Rev. D* 92 , 094507 (2015).
- [24] A. Francis, O. Kaczmarek, M. Laine, T. Neuhaus, H. Ohno, Critical point and scale setting in SU(3) plasma: An update, *Phys. Rev. D* 91 , 096002 (2015).
- [25] Y. Iwasaki, K. Kanaya, T. Yoshié, T. Hoshino, T. Shirakawa, Y. Oyanagi, S. Ichii, and T. Kawai, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 3343; *Phys. Rev. D* **46** (1992) 4657.

- [26] F. Karsch, “SU( $N$ ) Gauge Theory Couplings on Asymmetric Lattices,” Nucl. Phys. B **205**, 285 (1982).
- [27] S. Ejiri, Y. Iwasaki and K. Kanaya, “Nonperturbative determination of anisotropy coefficients in lattice gauge theories,” Phys. Rev. D **58**, 094505 (1998).
- [28] M. Shirogane, S. Ejiri, R. Iwami, K. Kanaya, M. Kitazawa [WHOT-QCD Collaboration] “Latent heat at the first order phase transition point of the SU(3) gauge theory,” Phys. Rev. D **94**, 014506 (2016).
- [29] Y. Taniguchi, S. Ejiri, R. Iwami, K. Kanaya, M. Kitazawa, H. Suzuki, T. Umeda, and N. Wakabayashi [WHOT-QCD Collaboration], “Exploring  $N_f = 2 + 1$  QCD thermodynamics from gradient flow,” Phys. Rev. D **96**, 014509 (2017); Erratum: **96**, 059904(E) (2019).
- [30] Y. Taniguchi, K. Kanaya, H. Suzuki, and T. Umeda [WHOT-QCD Collaboration], “Topological susceptibility in finite temperature (2 + 1)-flavor QCD using gradient flow,” Phys. Rev. D **95**, 054502 (2017)
- [31] Y. Taniguchi, S. Ejiri, K. Kanaya, M. Kitazawa, H. Suzuki, T. Umeda [WHOT-QCD Collaboration], “ $N_f = 2+1$  QCD thermodynamics with gradient flow using two-loop matching coefficients,” Phys. Rev. D **102**, 014510 (2020); Erratum: **102**, 059903 (2020).
- [32] K. Kanaya, A. Baba, A. Suzuki, S. Ejiri, M. Kitazawa, H. Suzuki, Y. Taniguchi, and T. Umeda, “Study of 2 + 1 flavor finite-temperature QCD using improved Wilson quarks at the physical point with the gradient flow,” Proc. Sci., LATTICE 2019, 088 (2020).
- [33] R.V. Harlander, Y. Kluth, and F. Lange, “The two-loop energy-momentum tensor within the gradient-flow formalism,” Eur. Phys. J. C **78**:944 (2018).
- [34] H. Suzuki, “Background field method in the gradient flow,” PTEP **2015**, no. 10, 103B03 (2015).
- [35] J. Artz, R. V. Harlander, F. Lange, T. Neumann and M. Prausa, “Results and techniques for higher order calculations within the gradient-flow formalism,” J. High Energy Phys. **06**, 121 (2019).
- [36] Z. Fodor, K. Holland, J. Kuti, S. Mondal, D. Negradi, and C. H. Wong, “The lattice gradient flow at tree-level and its improvement,” J. High Energy Phys. **09**, 018 (2014).
- [37] A.M. Ferrenberg and R. H. Swendsen, “Optimized Monte Carlo analysis,” Phys. Rev. Lett. **63**, 1195 (1989).

- [38] R. Iwami, S. Ejiri, K. Kanaya, Y. Nakagawa, D. Yamamoto, T. Umeda [WHOT-QCD Collaboration], “Multipoint reweighting method and its applications to lattice QCD,” *Phys. Rev. D* **92**, 094507 (2015).
- [39] 鈴木博, “グラディエントフロー-エネルギー運動量テンソルへの応用を中心として-,” *原子核研究* 64 巻 1 号 52 頁 (2019)
- [40] M. Shirogane, S. Ejiri, R. Iwami, K. Kanaya, M. Kitazawa, H. Suzuki, Y. Taniguchi, T. Umeda (WHOT-QCD Collaboration), “Latent heat and pressure gap at the first order deconfining phase transition of SU(3) Yang-Mills theory using the small flow-time expansion method”, *PTEP* **2021**, 013B08 (2021)