≫ 論　説 ≪

貨幣の無限性について

―― 笠原哲也さんの思い出によせて ――

高　宮　浩　司*

概要

貨幣が流通するためには，それが無限に交換され続けることが論理的には前提となるが，それは経済主体の合理性といかに整合するか．ゲーム理論を使って分析してみる．

1　はじめに

本稿が所収される号の「論集」は笠原哲也さんの追悼号であるから，笠原さんに関係のある問題を取り上げることにしたい．

それは「貨幣の無限性」の問題である．ここに一万円札があるとするとそれでモノを買うことができるが，それができるのは売り手が一万円札を受け取るからである．受け取るのは，売り手自身がその一万円札を使ってなにか買えるからで，それはまたべつの誰かが一万円札を受け取るからである…というふうに，無限につづく．つまり，あなたが一万円札を使えるのはそれが無限に受け取られ続けることが前提になっている．それを「貨幣の無限性」と呼ぶのだそうである．しかし，どんなものも無限に受け取られ続けるということはない．したがって，これは一種の逆理である．この逆理をいかに説明しうるか．それが笠原さんと議論していたことである．

笠原さんとはいつかこの問題についていっしょに論文を書こうと話していたが，ついにその日が来ることはなかった．かれが亡くなってから，わたくしはかれとの議論の続きを考えたので，ここにその結果を記したいと思う．

2　問題

問題を単純化して考えるために，つぎのような状況を考えよう．人々が一列に並んでいる．左から 1 人づつ $0, 1, 2, 3, \cdots$ と番号をふる．ゲーム理論の用語にしたがって i 番目の人をプレイヤー i と呼ぼう．

*新潟大学経済科学部, 950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 番地, takamiya@econ.niigata-u.ac.jp.

いま各プレイヤー i ($i = 0, 1, 2, \cdots$) は初期時点でそれぞれ財 i を 1 つもっている．いまプレイヤーができることは，自分の隣りにいるプレイヤーと互いに 1 つづつの財を交換することのみであるとする．

プレイヤー 0 の持つ財 0 は無価値でだれもほしがっていない．また，プレイヤー 0 にとって価値があるのはプレイヤー 1 の持つ財 1 のみであり，ほかの財は無価値である．ほかの各 $i \geq 1$ について，プレイヤー i にとって価値があるのは自分の持つ財 i と右隣りの人が持つ財 $i + 1$ のみであるが，財 i よりも財 $i + 1$ のほうがより価値がある．

これをより具体的にするために以下のように仮定する：

- 財 0 はどのプレイヤーに対しても効用 0 を与える．
- 財 i ($1 \leq i$) はプレイヤー i には効用 1 を，プレイヤー $i - 1$ には効用 2 を与え，この 2 人以外には効用 0 を与える．

仮に人が無限にいるとすると，(0) プレイヤー 0 はプレイヤー 1 に財 0 を渡し引き換えに財 1 をもらう．(1) プレイヤー 1 はプレイヤー 2 に財 0 を渡し引き換えに財 2 をもらう．(2) プレイヤー 2 はプレイヤー 3 に財 0 を渡し引き換えに財 3 をもらう．$\cdots$ と無限につづけていけば全員が効用を改善することができる．このとき財 0 は「貨幣」になっている．それ自体は無価値であるが，交換の仲立ちとなって流通し続け，各人の効用を改善する．

しかし人が有限しかいないとき，これは起こらない．あるいは，起こるとしたら，経済主体の合理性に反する．(一見したところではそのように思われる．) なぜなら，いちばん最後の（右端の）人（プレイヤー n とする）は財 0 を受け取らないからである．受け取ってもそれを交換してくれる人がいないので．したがってプレイヤー $n - 1$ も財 0 を受け取らない．なぜならプレイヤー n がそれを受け取ってくれないからである．したがってプレイヤー $n - 2$ もそれを受け取らず…と結局財 0 はプレイヤー 0 から動かない．いつかだれかが受け取りを拒否する貨幣は最初からだれも受け取らないということになり，流通しない．

しかるに現実の世界では貨幣は流通しているが，これを上の仮想的な世界でいかに解釈すべきであろうか．

3　定式化

3.1　ゲーム

前節で設定した問題は有限な完全情報ゲームとして以下のように定式化できる．プレイヤーの有限集合を $I = \{1, 2, \cdots, n\}$ ($n \geq 2$) とする．ここでプレイヤー 0 はゲームのプレイヤーとはみなさないことを注意する．

終点以外のノードは v_1 から v_n まで n 個存在し一列に並んでいる．各 v_i はプレイヤー i に割り当てられ 1 つの情報集合をなす．

ゲームは v_1 から開始される．v_i $(1 \leq i \leq n-1)$ においてプレイヤー i は，プレイヤー $i-1$ による「財 0 と引き換えに財 i を渡してほしい」という提案を受け入れる (これを行動 α とする) か，あるいは拒否する (行動 β) かを決定する[1]．プレイヤー i が提案を受け入れた場合，すぐに財の交換を行い，さらにプレイヤー $i+1$ に対して「財 0 と引き換えに財 $i+1$ を渡してほしい」という提案を行う．これによりプレイは v_{i+1} へとすすむ．(この提案をしないという選択はないものとする．すなわち，行動 α は自分自身による提案をも一括に含んでいる．どのプレイヤーも財 0 を持っていても益がないので，この仮定は妥当である．) プレイヤー i が拒否した場合交換は行われず，そこでゲームは終了し各自そのとき持っている財の効用を利得として得る．(この終点での利得ベクトルは $(2, \cdots, 2, 0, 1, \cdots, 1)$ という形になることは明らかである．)

v_n においても基本的に同様であるが，違うのは，ここではプレイヤー n がプレイヤー $n-1$ による提案を受け入れることも拒否することもできるが，たとえ受け入れても，プレイヤー n がつぎに提案を行う相手がいないことである．したがって，そこでゲームは終わり，やはり各自持っている財の効用が利得となる．

3.2　情報モデル

1. Aumann (1995) の手法にしたがい，プレイヤーの持つ情報を明示的に表現するために情報モデルを用いる．上のゲームに付随する**情報モデル**とは

$$(\Omega,\ \mu,\ (\boldsymbol{P}_i)_{i\in I},\ (f_i)_{i\in I}) \tag{1}$$

である．ここで $(\Omega,\ \mu)$ は有限の確率空間である．ただし任意の $\omega \in \Omega$ について $\mu(\omega) > 0$ と仮定する．Ω の元 ω は各々世界の 1 つの可能な**状態**をあらわす．

$\boldsymbol{P}_i$ は Ω の分割であり，プレイヤー i の**情報分割**と呼ぶ．これはプレイヤー i の持つ情報をあらわす．$\boldsymbol{P}_i$ のセルのうち，$\omega \in \Omega$ を含むものを $\boldsymbol{P}_i(\omega)$ と書く．

f_i は Ω から行動集合 $\{\alpha, \beta\}$ への写像である．これはプレイヤー i の行動をあらわす．f_i は $\boldsymbol{P}_i$ について可測であると仮定する．すなわち，任意の $\omega,\ \omega' \in \Omega$ について $\omega' \in \boldsymbol{P}_i(\omega) \Rightarrow f_i(\omega) = f_i(\omega')$．この仮定はプレイヤーは自分の行動を知っていることを意味する．

2. 「状態 $\omega \in \Omega$ において，プレイヤー i は事象 $E \subset \Omega$(の生起) を知っている」こととは

$$\boldsymbol{P}_i(\omega) \subset E \tag{2}$$

が成り立つことである．「プレイヤー i は E を知っている」という事象を $\mathrm{K}_i E$ であらわす．すなわち

$$\mathrm{K}_i E := \{\omega \in \Omega \mid \boldsymbol{P}_i(\omega) \subset E\}. \tag{3}$$

[1] プレイヤー 0 には最初の提案を行う以外の選択肢はないので，ゲームのプレイヤーとはみなさないのが妥当である．

K_i は集合族 2^Ω 上の 1 つの演算子とみなされる．これは任意の事象 E, F に対して，以下の性質を満たすことが容易に確かめられる．

(P1) $\mathrm{K}_i\Omega = \Omega$.

(P2) $E \subset F \Rightarrow \mathrm{K}_iE \subset \mathrm{K}_iF$.

(P3) $\mathrm{K}_i(E \cap F) = \mathrm{K}_iE \cap \mathrm{K}_iF$.

(P4) $\mathrm{K}_iE \subset E$.

(P5) $\mathrm{K}_iE \subset \mathrm{K}_i\mathrm{K}_iE$.

(P6) $\Omega \setminus \mathrm{K}_iE \subset \mathrm{K}_i(\Omega \setminus \mathrm{K}_iE)$.

(P4) と (P5) より，$\mathrm{K}_iE = \mathrm{K}_i\mathrm{K}_iE$，また，(P4) と (P6) より，$\Omega \setminus \mathrm{K}_iE = \mathrm{K}_i(\Omega \setminus \mathrm{K}_iE)$ であることに注意する．

3. 「集団 I の全員が事象 E を知っている」という事象を $\mathrm{K}E$ とする．すなわち

$$\mathrm{K}E := \bigcap_{i \in I} \mathrm{K}_iE. \tag{4}$$

K は $\mathrm{K_i}$ と同様に演算子にみなせる．K は上の (P1) から (P4) まではみたすが，(P5), (P6) はみたさない．

$\mathrm{KK}E$ を K^2E と表記する．0, 1 ないしは 3 以上についても同様．K^mE を「E が集団 I での m **階の相互知識**である」という事象であるという．

「集団 I で E が**共有知識**である」という事象を $\mathrm{CK}E$ とする．すなわち

$$\mathrm{CK}E := \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathrm{K}^kE. \tag{5}$$

4　結果

1. いま全プレイヤーの戦略の組を $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, \cdots, s_n)$ とし，$v \in \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ とする．このとき，$\boldsymbol{s}$ のもとでの，v におけるプレイヤー i の**条件付き利得**とは，ゲームを v からはじめて，以降 $\boldsymbol{s}$ にしたがってプレイしたときに導かれるプレイヤー i の利得のことをいう．これを $u_i^v(\boldsymbol{s})$ と表記する．

状態 $\omega \in \Omega$ においてプレイヤー i が**合理的**であるとは，プレイヤー i が，自身が得られる情報のもとで，v_i における条件付き利得の期待値を最大化していること，すなわち，任意の $s_i \in \{\alpha, \beta\}$ について

$$\mathbf{E}[u_i^{v_i}(f_i(\omega), f_{-i}) \mid \boldsymbol{P}_i(\omega)] \geq \mathbf{E}[u_i^{v_i}(s_i, f_{-i}) \mid \boldsymbol{P}_i(\omega)] \tag{6}$$

であることをいう．

2. 以下にいくつかの重要な事象を定義する．まず「プレイヤー i が合理的である」という事象を R_i と書く．また，$R := \bigcap_{i \in I} R_i$ とする．（「全プレイヤーが合理的である」という事象．）

「プレイヤー i が行動 α を取る」という事象を C_i とし (すなわち $C_i = \{\omega \mid f_i(\omega) = \alpha\}$),「プレイヤー i が行動 β を取る」という事象を D_i とする．さらに $1 \leq k \leq n$ なる自然数 k に対して $C^{\leq k} := \bigcap_{i=1}^{k} C_i$（「プレイヤーの列の最初の k 人がみな α を取る」という事象)，$D^{k\leq} := \bigcap_{i=k}^{n} D_i$（「プレイヤーの列の最後の $(n-k+1)$ 人がみな β を取る」という事象) と定義する．

3. 合理性についての相互知識，共有知識のプレイヤーの行動に対する含意を以下に与える．

定理 1 いかなる情報モデルにおいても，任意の $m = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ に対して

$$\mathrm{K}^m R \subset D^{n-m\leq}. \tag{7}$$

すなわち，合理性についての m 階の相互知識のもとではプレイヤーの列の末尾の $m+1$ 人は β を取る．

この定理を示すには以下の補題を使う．

補題 1 いかなる情報モデルにおいても，任意の $i = 1, 2, \cdots, n$ に対して

$$\mathrm{K}_i D_{i+1} \cap R_i \subset D_i. \tag{8}$$

ただしここで $D_{n+1} = \Omega$ とする．(したがって $i = n$ のときは上の式は $R_n \subset D_n$ となる．)

証明 $\omega \in \mathrm{K}_i D_{i+1} \cap R_i$ とする．まず $\mathrm{K_i}$ の定義より $\boldsymbol{P}_i(\omega) \subset D_{i+1}$，すなわち $\boldsymbol{P}_i(\omega)$ 上ではつねに $f_{i+1} = \beta$ となる．したがって，(プレイヤー i の合理性を決める条件付き利得である) $\mathbf{E}[u_i^{v_i}(f_i(\omega), f_{-i}) \mid \boldsymbol{P}_i(\omega)]$ の値は $f_i(\omega) = \beta$ ならば 1，$f_i(\omega) = \alpha$ ならば 0 となる．いま $\omega \in R_i$ であるから $f_i(\omega) = \beta$ でなければならない．よって $\omega \in D_i$ となる．□

定理 1 の証明　いま任意の情報モデルが与えられたものとする．任意の $m = 0, 1, 2 \cdots n-1$ について

$$\mathrm{K}^m R \subset D_{n-m} \tag{9}$$

が成り立つことを以下に示す．

m についての数学的帰納法による．(i) まず $m = 0$ のとき．補題 1 で $i = n$ の場合を考えれば $R_n \subset D_n$ を得る．$\mathrm{K}^0 R = R \subset R_n$ であるので，$K^0 R \subset D_n$ がしたがう．(ii) いま $m = k \in \{0, 1, \cdots, n-2\}$ について $\mathrm{K}^k R \subset D_{n-k}$ であるとする．このとき $m = k+1$ でも成り立つことを示す．$\mathrm{K}^{k+1} R = \mathrm{K}(\mathrm{K}^k R) \subset$

$R_{n-k-1} \cap \mathrm{K}_{n-k-1}(\mathrm{K}^k R)$．ここで帰納法の仮定により $\subset R_{n-k-1} \cap \mathrm{K}_{n-k-1} D_{n-k}$．さらに補題 1 より $\subset D_{n-k-1}$．以上より $\mathrm{K}^{k+1} R \subset D_{n-k-1}$．よって所望の主張が示せた．

つぎにいま示した主張から定理 1 を示す．いま r を $0 \leq r \leq m$ の自然数とすると $\mathrm{K}^m R = \mathrm{K}^r(\mathrm{K}^{m-r} R)$．ここで上の主張より $\subset \mathrm{K}^r D_{n-m+r} \subset D_{n-m+r}$．よって $\mathrm{K}^m R \subset \bigcap_{r=0}^{m} D_{n-m+r} = D^{n-m\leq}$ となり定理 1 がしたがう．□

定理 1 から以下の系が即座にしたがう．

系 1 いかなる情報モデルにおいても

$$\mathrm{CK}R \subset D^{1\leq}. \tag{10}$$

すなわち，合理性の共有知識のもとでは全員が β を取る．

なおこの系は Aumann (1995) による完全情報ゲームについての一般的な結果からもすぐに導かれる．(ただし Aumann による合理性の定義は本稿のものよりも弱いことを注意する．)

4. プレイヤー列のあるところから前が全員 α を取るために十分条件を以下に与える．

定理 2 ある情報モデルが存在し，それにおいては任意の $m = 0, 1, 2, \cdots, n-2$ に対して

$$\emptyset \neq \mathrm{K}^m R \subset C^{\leq n-m-1}. \tag{11}$$

すなわち，合理性についての m 階の相互知識と，プレイヤーの列の最初の $n-m-1$ 人が α を取ることとは両立可能である．

証明 当該の性質を持つ情報モデル $(\Omega,\ \mu,\ (\boldsymbol{P}_i)_{i\in I},\ (f_i)_{i\in I})$ を以下に構築する．

- 状態の集合を $\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots, \omega_n\}$ とする．
- Ω 上の確率分布 μ を一様分布 (すなわち $\forall \omega \in \Omega,\ \mu(\omega) = \frac{1}{n}$) とする．
- プレイヤーの集合を I をつぎのように I_A と I_B とに分割する：$I_A = \{n,\ n-2,\ n-4,\ \cdots\}$ かつ $I_B = \{n-1,\ n-3,\ n-5,\ \cdots\}$．

  各 $i \in I_A$ について $\boldsymbol{P}_i$ を以下のようにさだめる：
  (i) n が奇数のとき，$\boldsymbol{P}_i = \Big\{\{\omega_n\},\ \{\omega_{n-1},\ \omega_{n-2}\},\ \cdots,\ \{\omega_2,\ \omega_1\}\Big\}$．
  (ii) n が偶数のとき，$\boldsymbol{P}_i = \Big\{\{\omega_n\},\ \{\omega_{n-1},\ \omega_{n-2}\},\ \cdots,\ \{\omega_3,\ \omega_2\},\ \{\omega_1\}\Big\}$．
  各 $i \in I_B$ について $\boldsymbol{P}_i$ を以下のようにさだめる：
  (i) n が奇数のとき，$\boldsymbol{P}_i = \Big\{\{\omega_n,\ \omega_{n-1}\},\ \{\omega_{n-2},\ \omega_{n-3}\},\ \cdots,\ \{\omega_3,\ \omega_2\},\ \{\omega_1\}\Big\}$．
  (ii) n が偶数のとき，$\boldsymbol{P}_i = \Big\{\{\omega_n,\ \omega_{n-1}\},\ \{\omega_{n-2},\ \omega_{n-3}\},\ \cdots,\ \{\omega_2,\ \omega_1\}\Big\}$．

- $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ として f を以下のようにさだめる： $1 \le j \le n$ について，$f(\omega_j)$ の値を最初の j 個の成分が α，残りが β であるものとする．（したがって $f(\omega_n) = (\alpha, \alpha, \cdots, \alpha)$，$f(\omega_{n-1}) = (\alpha, \cdots, \alpha, \beta)$ など．）

以上のように情報モデルを与えると以下が成り立つ．

(i) まず $R_n = \Omega \setminus \{\omega_n\}$ であり，$i \ne n$ については $R_i = \Omega$ である．(前者は自明であるが，後者を得るには情報分割のもとでの期待利得の若干の計算が必要である．) したがって，

$$\mathrm{K}^0 R = R = \Omega \setminus \{\omega_n\} \ne \emptyset, \tag{12}$$

かつ，f の構築により

$$\mathrm{K}^0 R \cap C^{\le n-1} \ne \emptyset. \tag{13}$$

となる．これで定理の主張の $m = 0$ の場合の成立がわかる．

(ii) つぎに，$i \in I_A$ については $\mathrm{K}_i R = \Omega \setminus \{\omega_n\}$，$i \in I_B$ については $\mathrm{K}_i R = \Omega \setminus \{\omega_{n-1}, \omega_n\}$ である．よって

$$\mathrm{K}^1 R = R = \Omega \setminus \{\omega_{n-1}, \omega_n\} \ne \emptyset, \tag{14}$$

かつ

$$\mathrm{K}^1 R \cap C^{\le n-2} \ne \emptyset. \tag{15}$$

となる．これで定理の主張の $m = 1$ の場合の成立がわかる．

(iii) 同様に繰り返せば，要するに $\mathrm{K}^m R$ に対して $\mathrm{K}(\mathrm{K}^m R)$ を取ることで $\mathrm{K}^m R$ のなかで最も番号の大きい ω が脱落することがわかる．したがって，$0 \le m \le n-2$ の範囲で

$$\mathrm{K}^m R = R = \Omega \setminus \{\omega_{n-m}, \cdots, \omega_n\} \ne \emptyset, \tag{16}$$

かつ

$$\mathrm{K}^m R \cap C^{\le n-m-1} \ne \emptyset \tag{17}$$

がしたがうが，これが定理 2 の主張であった．□

5. 以上の分析の結果をまとめると：

- プレイヤーの合理性が共有知識であるとき，貨幣は流通しない．

- プレイヤーがみな合理的でそのことが相互に知られているとしてもその階層が m で有限ならば (合理性が有限の相互知識ならば)，貨幣は流通する可能性がある．そのとき流通は最大でプレイヤーの列の最初の $n-m-1$ 人まで可能である．

この結果は現実世界での貨幣の流通に有用な直観的理解を与えるのではないかと思う．要するに有限の社会において貨幣が無限性をもつことは，必ずしも経済主体の合理性とは矛盾しない．貨幣の流通を可能にしているは非合理性ではなくて，むしろ合理性についての情報の不完全性である．これは広い意味での不確実性の一種といってよかろう．

5　おわりに

人生は不確実性にあふれているが，笠原さんは不確実性をポジティブに捉えていた．不確実性があるからこそ人間は互いを尊重すべきであるというのがかれの持論であった．はじめはあまり腑に落ちなかったが，自分もいまではこの直観を共有できるようになった気がする．広い意味での不確実性が人間社会においてのさまざまな寛容性，創造性の源泉であり，未来が不確実であるからこそ人生は生きるに値する．本稿の結果も，ささやかながらではあるが，不確実性が人間社会において創造的であることの一端を示唆していると思う．

一方で不確実性はおそろしいものでもある．それは人々を支配するのに使われてきたし，いまも使われている．不確実な未来を予測できる，こうすれば未来はこうなると主張するものがある．そういう予測を独占する集団が，予測によって人々を恐怖させることで人々を支配している．

笠原さんとはいろいろな問題を議論した．それは学問的で楽しい時間だった．本稿に取り上げた話題を話し合ったのは笠原さんが新潟大学に来られた 2015 年か 2016 年くらいのことだったような気がするが，はっきりとは覚えていない．いずれにしても，かれがこの大学に来て最初の二三年ほどはしょっちゅういろいろなことを話し合っていたように思う．

もっと一般的なことをいうと，2010 年代の中盤あたりまでは，笠原さんだけでなく，同僚と学問的なことを話す機会が多くあった．しかしここ数年でそういう機会はすっかりなくなった．この学部でも他の人たちは知らないが，少なくとも自分はそうである．話すことはいわゆる雑務のことばかりになった．自分の生活もまるで研究者のそれではなくなってしまって久しい．

それに加えて，昨年度からはコロナ禍でほとんどあらゆる人間関係が大なり小なり破壊されてしまった．コロナ禍や学部改組への対応のため負担を多くかかえ，自分の心もつねにささくれていた．だから，笠原さんとの最後の一年は，あまり話もしなかった．

笠原さんは最後の日々，苦しい状況のなか論文を書いていた．十年ほどかかった仕事に決着を付けるのだと言っていた．かれは食い扶持で学問をやっていたのではなく，学問をやることがかれの生き方だったのだと思う．自分もそうでありたいとつねに思ってきた．しかしいまの自分のていたらくでは，自信を持ってそうであると言えないのである．

参考文献

[1] Aumann, R. J. (1995) Backward induction and common knowledge of rationality. *Games and Economic Behavior* 8, 6–19.