

磁力吸引を受けるロータ付加タイミングベルトの 非線形振動*

永井健一^{1*}, 小山富夫^{2*}, 渡辺一実^{3*}
谷藤克也^{4*}, 籠谷正則^{5*}

Nonlinear Vibrations of a Timing Belt with a Rotor Pulled by Magnetic Force

Ken-ichi NAGAI, Tomio KOYAMA, Kazumi WATANABE,
Katsuya TANIFUJI and Masanori KAGOTANI

Analytical results are presented for nonlinear vibrations of a timing belt with a rotor pulled by a magnetic force. With application of the Galerkin method to the basic equation, the ordinary differential equation in a multi-degree-of-freedom system is reduced. The steady-state responses are calculated using the harmonic balance method. The numerical results show the following conclusions. The resonance frequency in each mode of vibration decreases with the increment of the mass in the rotor. The amplitude of nonlinear response decreases with the increment of the cross section in the belt. The magnetic force acting on the belt changes the characteristics of nonlinear spring from the hardening type to the softening-hardening type. The magnetic force on the belt easily shifts the frequency away from the resonance frequency and facilitates suppression of the resonance amplitude.

Key Words: Vibration of Continuous System, Nonlinear Vibration, Vibration Control, Electromagnetic-Structural Coupling, Galerkin's Method

1. 緒 言

近年、各種機械の軽量化や簡便化に伴いプリントなどの位置決めの要素としてタイミングベルトが使用されている。タイミングベルトは比較的弾性率の低い材料が用いられているため軸方向変形や横方向たわみが生じやすい。特に運動の際に歯車などからの周期的な変動外力が作用すると、共振により大振幅の非線形振動が生じやすい。これらは位置決め精度の変動や騒音問題などの原因となる。以上のことからベルトの非線形振動を明らかにし、その振幅や騒音を低減する方法を確立することは工学上重要と言える。ベルトの振動低減に関して著者らはすでにベルトに周期張力を与える方法の実験⁽¹⁾ならびに理論解析⁽²⁾を行った。一方ベルトの大振幅振動を扱った研究^{(3)~(7)}が見受けられる。しかし、ベルトの大たわみ振動に磁気力の非線形性を考慮に入れた解析や振動低減の方法を述べた報告は少ない。本報では、低速走行するタイミングベルトの中

間にはずみ車を配置し、それに磁気吸引力を作用させた振動モデルの下で非線形振動問題を理論的に解析した。基礎式にガラーキン法と調和バランス法を適用して解析した。また数値計算を行い、ベルトの断面と長さの比、磁気力、ベルトとはずみ車との質量比の各値の下で微小振幅の固有振動数、系のばね特性ならびに定常振動応答を求めた。さらに磁気力を切り替えることより共振振幅を低減させる方法をも示した。

2. 基礎式および境界条件

図1に示すように、ベルト歯車間の距離 L 、断面積 A (幅 b 、平均厚さ h)、密度 ρ 、ヤング率 E のタイミングベルトを考える。 $x=x_1$ の位置に質量 M のロータを配置し、さらに磁気吸引力を作用させる。

なお磁気吸引力は外部磁石と磁氣を帯びたロータ間の距離の4乗に反比例する磁力をたわみ変位に関し展

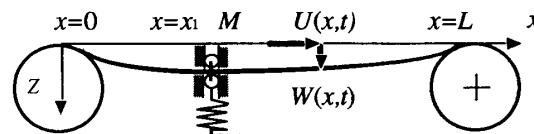


図1 磁力吸引を受けるロータ付加タイミングベルトの力学モデル

* 原稿受付 平成4年8月28日。

*1 正員、群馬大学工学部(☎376 桐生市天神町1-5-1)。

*2 正員、大阪工業大学(☎535 大阪市旭区大宮5-16-1)。

*3 正員、山形大学工学部(☎992 米沢市城南4-3-16)。

*4 正員、新潟大学工学部(☎950-21 新潟市五十嵐2の町8050)。

*5 正員、大阪産業大学(☎574 大東市中垣内3-1-1)。

$$\begin{aligned}
 B_{ij} &= (1/2)\delta_{ij} + \beta \sin i\pi\xi_1 \sin j\pi\xi_1 \\
 C_{ij} &= (\pi^2/2)ij\delta_{ij} - \gamma_1 \sin i\pi\xi_1 \sin j\pi\xi_1 \\
 D_{ijkl} &= -\gamma_2 \sin i\pi\xi_1 \sin j\pi\xi_1 \sin k\pi\xi_1 \\
 E_{ijkl} &= (a\pi^4/8)ijkl\delta_{ij}\delta_{kl} \\
 &\quad - \gamma_3 \sin i\pi\xi_1 \sin j\pi\xi_1 \sin k\pi\xi_1 \sin l\pi\xi_1 \\
 F_i &= \gamma_0 \sin i\pi\xi_1 \\
 G_i &= [1 - (-1)^i]/i\pi + \beta \sin i\pi\xi_1 \dots
 \end{aligned}$$

なお、 δ_{ij} はクロネッカーデルタ記号である。上式の係数はすべて $a, \beta, \gamma_k (k=0, 1, 2, 3)$ と ξ_i の関数として与えられる。ここで、磁気力と一定加速度の下での静的変形を求めるにあたり、式(12)において慣性力、周期外力項を省略し、 $b_j(\tau) = b_j^0$ とおくと、 b_j^0 に関する 3 次の方程式を得る。これを解くことにより静たわみ $w_0(\xi)$ が次式のように定まる。

$$w_0(\xi) = \sum_j b_j^0 \zeta_j(\xi), \quad (j=1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots\dots (14)$$

ついで $b_j = b_j^0 + \bar{b}_j(\tau)$ とおいて式(12)に代入して整理すると、定数項を含まない式が得られる。さらに非線形項と周期外力項を省略すると、微小振幅自由振動に関する式から固有振動数 $\bar{\omega}_i$ と対応する固有ベクトル ϕ_{pi} ($p=1, 2, 3, \dots$) を得る。これより対応する固有振動形 $\xi_i(\xi)$ は次式のようになる。

$$\xi_i(\xi) = \frac{1}{n_i} \sum_p \phi_{pi} \zeta_p(\xi), \quad (p=1, 2, 3, \dots) \quad \dots \dots \dots \quad (15)$$

なお n_i は振幅を基準化させるための任意定数である。固有振動形 $\xi_i(\xi)$ に基づく基準座標を $\bar{b}_i(\tau)$ すると実際のたわみは次式のようになる。

$$w(\xi) = \sum_i \tilde{b}_i(\tau) \tilde{\xi}_i(\xi), \quad (i=1, 2, 3, \dots) \dots\dots (16)$$

基準座標 \tilde{b}_i を用いて基礎式を変換すると、次の規準形の運動方程式を得る。

$$R(\tilde{b}_i) = \tilde{b}_{i,\text{cr}} + \tilde{\omega}_i^2 \tilde{b}_i + \sum_j \sum_k \tilde{D}_{ijk} \tilde{b}_j \tilde{b}_k + \sum_j \sum_k \sum_l \tilde{E}_{ijkl} \tilde{b}_j \tilde{b}_k \tilde{b}_l - p_d \tilde{G}_i \cos \omega \tau = 0$$

(i, j, k, l = 1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots (17)

ただし

$$\begin{aligned}\tilde{D}_{ijk} &= \frac{n_i}{n_j n_k} \sum_p \sum_q \sum_r \bar{D}_{pqr} \phi_{pi} \phi_{qj} \phi_{rk} \\ \bar{D}_{pqr} &= D_{pqr} + \sum_s (E_{pqrs} + E_{prsq} + E_{psqr}) b_s^0 \\ \tilde{E}_{ijkl} &= \frac{n_i}{n_j n_k n_l} \sum_p \sum_q \sum_r \sum_s E_{pqrs} \phi_{pi} \phi_{qj} \phi_{rk} \phi_{sl} \\ \tilde{G}_i &= n_i \sum_p G_p \phi_{pi}, \quad (p, q, r, s = 1, 2, 3, \dots) \quad (18)\end{aligned}$$

つぎに、非線形振動の定常解を求めるにあたり、調和バランス法を用いる。式(17)の解 \tilde{b}_i ($i=1, 2, 3, \dots$) をつぎのごとく仮定する。

$$\tilde{b}_i = \sum_m C_i^{m\mu} \cos \mu m \omega \tau \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad \dots (19)$$

上式で $C_i^{\mu m}$ は未定定数, μ は定数 ($\mu=1, 1/2, 1/3, \dots$) で, $\mu=1$ において, 主共振および高調波共振応答を求め得る。 $\mu=1/2$ または $\mu=1/3$ の下では $1/2$ 次または $1/3$ 次の分数次調波共振応答ならびに亜分数次調波共振応答を求め得る。式(19)を式(17)に代入し, 調和バランス法を用いると, つきの条件式を得る。

$$\frac{\mu\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\mu\omega} R(\tilde{b}_i) \cos \mu\omega\tau d\tau = 0$$

(s=0, 1, 2, ...). (20)

上式の積分を行うと、 $C_i^{\mu m}$ に関する連立 3 次方程式を得る。これを解くことにより周期外力のもとでの定常解を得る。なお振動応答を実効値にて表示する場合、その振動振幅成分の実効値 w_{rms} は次のようになる。

4. 計 算 結 果

形状係数 α , ベルトとロータとの質量比 β さらに磁気力 q の各値の上で数値計算を行った。

まず式(10)における項数の変化による解の精度を吟味した。表1に静的外力を作用した場合のたわみの項数変化による収束状況を示す。表より最初の数項で解が収束していることがわかる。これより実際の計算には式(10)での未定係数を5項仮定して行った。なおロータの位置は主に $\xi_1=0.4$ とした。ついで線形固有振動数と対応する固有振動形を求めた。さらに静的ばね特性、非線形自由振動応答ならびに主要な主共振振動応答を明らかにした。

4・1 線形固有振動数ならびに振動形 磁力 q を 0 とし、質量比 β を逐次変化させて微小振動の固有振動数と対応する固有振動形を求めた。図 2 に固有振動数の変化を示す。縦軸は質量比 β 、横軸は固有振動数の値を示す。図中括弧内の数字は対応する振動形の次数を示す。実際の固有振動数 $f(\text{Hz})$ は図の ω の値より

表 1 ベルトの静たわみ量に及ぼす項数の影響
 $\alpha=0.005$ $\beta=0.2$ $\xi_1=0.4$ $a=0$

| Number of Terms | p_i | | |
|--------------------|--------|--------|--------|
| | 10 | 20 | 30 |
| 2 | 1.5092 | 2.8018 | 4.4268 |
| 3 | 1.4970 | 2.7789 | 3.8230 |
| 4 | 1.4747 | 2.7370 | 3.7647 |
| 5 | 1.4747 | 2.7368 | 3.7643 |

次式で求めることができる。

$$f = (\omega/2\pi)\sqrt{EU_s/\rho L^3} \quad \dots\dots\dots(22)$$

図2より β の増大に伴い、各次数の固有振動数はすべて減少することがわかる。振動数が急激に減少する β の範囲は第1次振動形において $\beta=0\sim0.8$ 、そのほかの各振動形ではほぼ $\beta=0\sim0.4$ である。それ以上の

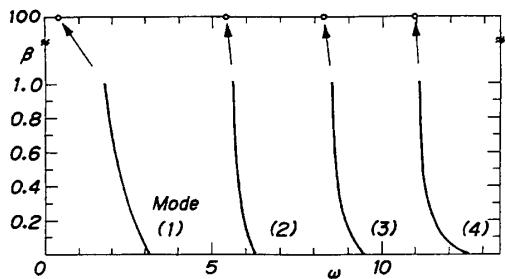


図2 ベルトの線形固有振動数
 $\alpha=0.005, q=0, p_s=0, p_d=0, \xi_1=0.4$

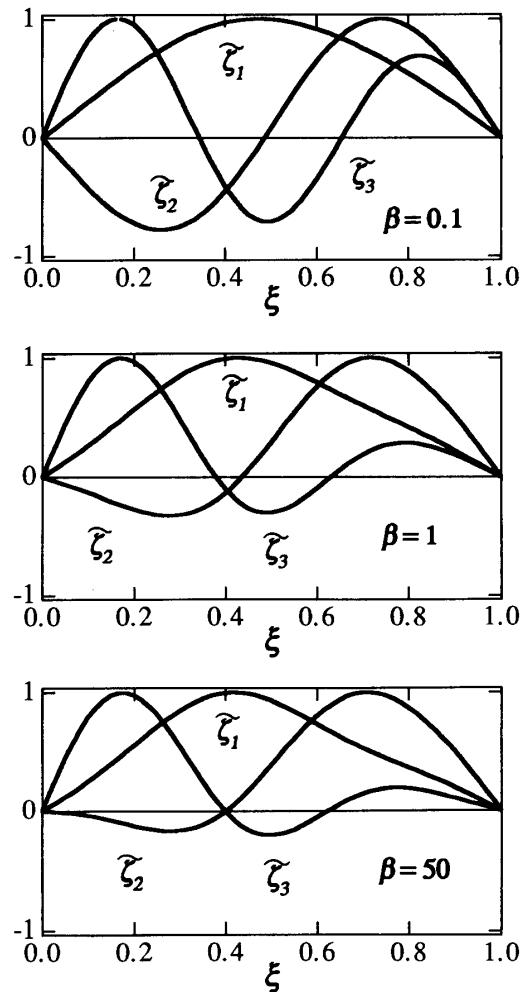


図3 ベルトの線形固有振動形
 $\alpha=0.005, q=0, p_s=0, p_d=0, \xi_1=0.4$

β では振動数はほぼ一定の割合で減少する。図3に第1次から第3次までの固有振動形 ζ_i を示す。

横軸は無次元座標 ξ を示し、縦軸は振幅の最大値を単位長さにして示す。質量比が大きくなると、第1次振動形の形状は、 $\xi_1=0.4$ を中心として左右にほぼ直線状となり、第2次や第3次の振動ではロータを節とした振動形へと移行することがわかる。

4・2 静的外力によるベルトのたわみ特性 $\alpha=0.005, \beta$ が0.2と10の場合、種々の磁力 q の下でベルトに一定加速度を与えた際の静たわみ w を求めた。図4、図5に静的外力 p_s と w の関係を示す。縦軸に p_s 、横軸に $\xi=0.6$ での w を示す。曲線の傾き dp_s/dw から系のばね定数を得ることができる。なお磁力の大きさは磁石とロータの間の距離を一定とし、磁極の強さを変えて示してある。磁力が増大するにつれて p_s の一定値における系のばね定数は逐次高くなることがわかる。さらに、 $\beta=10$ の場合にはロータ慣性力が増えることにより、ベルトの軸方向変形が大となり p_s の小なる範囲で、ばね定数が急激に変化することがわかる。これより磁力の大

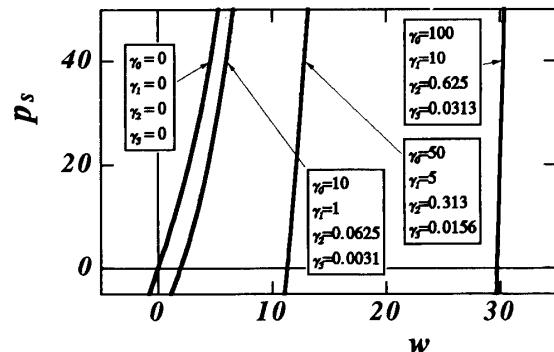


図4 ベルトの復元力特性
 $\alpha=0.005, \beta=0.2, p_d=0, \xi=0.6, \xi_1=0.4$

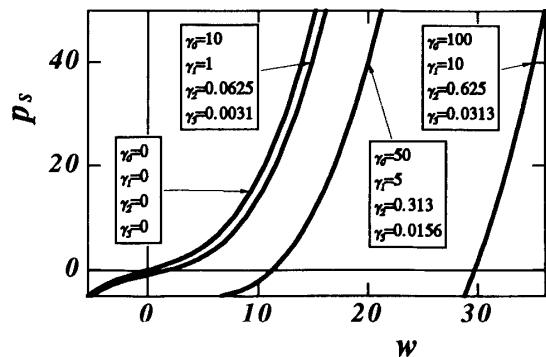


図5 ベルトの復元力特性
 $\alpha=0.005, \beta=10, p_d=0, \xi=0.6, \xi_1=0.4$

きさを変えることによりベルトのばね定数を容易に変化できることとなる。なお磁力なしの場合のベルトのたわみ曲線は漸硬形のばね特性を示す。磁力が作用すると式(12)で示すとく、2次の非線形項を含み一般に漸軟-漸硬形のばね特性を示す。図4, 図5ではその傾向が判読しにくいが、次に示す自由振動応答曲線より確かめることができる。

4・3 自由振動応答曲線 式(17)で p_d を限りなく小とし、式(19)で $\mu=1$ とおいて定常解を求めるとき、自由振動応答曲線いわゆる背骨曲線を得る。なお m は3までとある。これよりベルトで支配的な主共振応答振幅と振動数の関係を明らかにすることができる。まず磁力の作用しないベルトで形状係数 α を0.005とし、質量比 β を逐次変えた場合の背骨曲線を図6に示す。無次元の加振振動数 ω を横軸に示し、観測点の位置 ($\xi=0.6$) での無次元振幅の実効値 w_{rms} を縦軸に対数表示にて示す。図よりの自由振動曲線は漸硬形のばね特性を示す。質量比 β の増大とともに自由

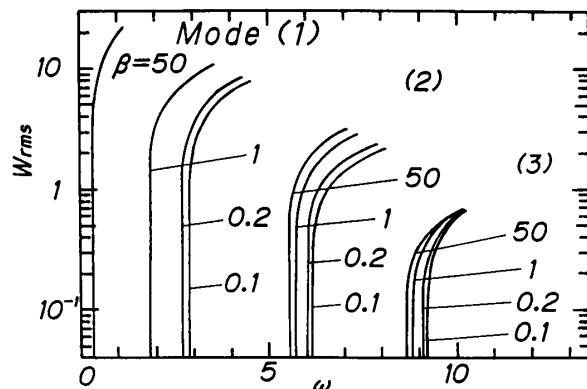


図6 背骨曲線に及ぼすロータ質量比の影響
 $\alpha=0.005, q=0, p_s=0, p_d=0, \xi_1=0.4, \xi=0.6$

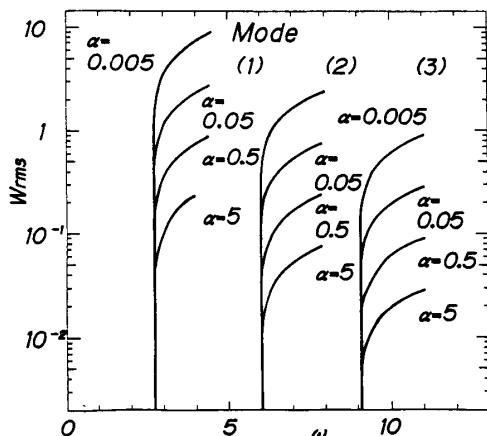


図7 背骨曲線に及ぼす形状係数の影響
 $\beta=0.2, q=0, p_s=0, p_d=0, \xi_1=0.4, \xi=0.6$

振動の振動数は減少する。なお振動次数が高くなるにつれて振幅が小なる範囲でも強い非線形性が現われることがわかる。

次に質量比 β を0.2とし、形状係数 α を逐次変化させた場合の結果を図7に示す。 α が小さい場合、微小振幅振動からある程度の振幅に至るまで振動数は大きく変化しない。大振幅に至って漸硬形の非線形効果が逐次現れてくる。その際 α が大なる程小なる振幅で非線形性が顕著に現れる。

次に $\alpha=0.005, \beta=0.2$ のベルトに磁力を作用させた場合の結果を図8に示す。図中、磁力のない場合の背骨曲線を細い実線にて示す。磁力が作用した場合には第一次の振動形に対応する背骨曲線が顕著な漸軟-漸硬形の振動応答を示すことがわかる。一方、第2次の振動形の背骨曲線はほぼ漸硬形の応答となっている。

4・4 共振応答曲線 図8の場合と同じ条件に加

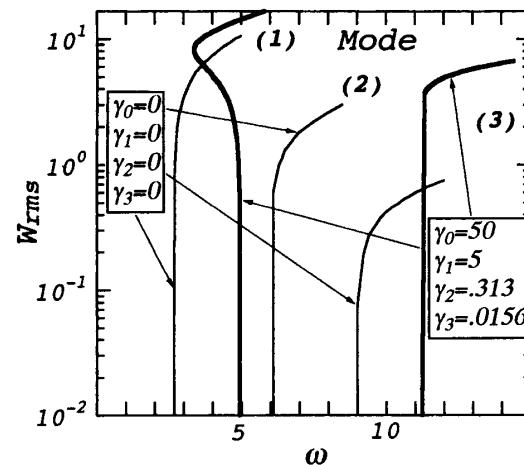


図8 磁力吸引を受けたロータ付加ベルトの背骨曲線
 $\alpha=0.005, \beta=0.2, p_s=0, p_d=0, \xi_1=0.4, \xi=0.6$
 $\gamma_0=50, \gamma_1=5, \gamma_2=0.313, \gamma_3=0.0156$

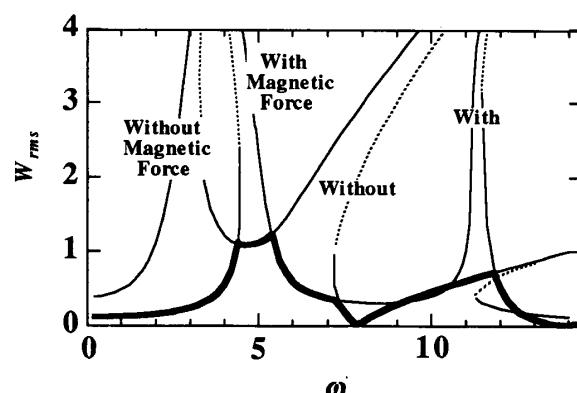


図9 磁力吸引を受けたロータ付加ベルトの定常応答曲線
 $\alpha=0.005, \beta=0.2, p_s=0, p_d=2, \xi_1=0.4, \xi=0.6$
 $\gamma_0=50, \gamma_1=5, \gamma_2=0.313, \gamma_3=0.0156$

え、ベルトに周期加速度を作成させた場合の主要な主共振応答を求めた。結果を図9に示す。 $\xi=0.6$ での振動振幅の実効値、横軸は無次元加振振動数 ω である。磁気吸引力を作成させた場合と作用させない場合の結果をあわせ示す。図中、破線は共振応答の垂直接線より判断した不安定応答曲線である。この位置に至ると、跳躍現象により大振幅の振動応答に移行することとなる。磁力が作用しない場合、各振動次数に対応する主共振応答は漸硬形を示し、微小振幅の固有振動数より高周波領域に定常解を有する。本解析では減衰の影響を考慮に入れていないため、高周波側の上限が示されない。しかし一般に減衰の影響は小さいため比較的広い振動数範囲にわたり主共振応答が存在することとなる。一方磁力を作用させた場合、図7で示したごとくその主共振は漸軟-漸硬形の応答を示す。振幅の比較的小なる範囲では、漸軟形の応答が、比較的狭い範囲に生ずることとなる。磁力を作用させた場合の主共振応答と作用させない場合のそれは互いに離れた振動数領域に存在することがわかる。これより磁石を電磁石とし、磁力を切り換えることにより、系の共振振動数を移動させ、大振幅振動応答を抑えることが可能となる。対応する振動応答を太い実線にて示す。すなわち外力の振動数が低周波領域にある場合、まず磁力を作用させる。ついで振動数の増加により大振幅の共振応答が生ずる手前で磁力を取り去る。これより共振応答が磁力なしの非共振応答に乗り換えることができることなる。

5. 結 言

ベルト上にロータを配し、そのロータを磁気力で吸引する振動モデルの下に非線形振動問題の振動特性を

明らかにした。

得られた結果を要約するとつぎのごとくなる。

(1) ベルトに対するロータの質量比が増大すると、各振動次数の微少振幅の固有振動数はすべて減少する。

(2) ロータを支持する磁力を増大することにより、ベルトのたわみ剛性を高くすることができる。

(3) 磁力が作用しないベルトの自由振動曲線はすべての振動形において漸硬形の振動応答を示す。

磁力を作用させた場合、第1次の振動形に対応する振動は顕著な漸軟-漸硬形の応答を示す。高次の振動形では漸硬形の応答となる。

(4) 磁力を作用させた場合と作用させない場合とでベルトの主共振応答をそれぞれ離れた振動数領域に移動させることができる。これより磁力を切り換えることによりベルトの大振幅振動応答を抑えることが可能となることを示した。

文 献

- (1) Koyama, T., Watanabe, K., Nagai, K. and Kagotani, M., *Trans. ASME, J. Mechanical Design*, **112** (1990), 419.
- (2) Watanabe, K., Koyama, T., Nagai, K. and Kagotani, M., *Trans. ASME, J. Mechanical Design*, **112** (1990), 424.
- (3) 中鉢, 日機論, **24**-139 (1958), 178.
- (4) Oplinger, D. W., *J. Acoust. Soc. Amer.*, **32** (1960), 1529.
- (5) Shinivasa, G. S. and Ramakrishna, B. S. *J. Acoust. Soc. Amer.*, **38** (1965), 461.
- (6) Thurman, A. L. and Mote, C. D. Jr. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **36** (1969), 62.
- (7) Wang, K. W., *Trans. ASME, J. Vib. and Acoust. Stress*, **113** (1991), 62.