論　文

一部の点間の距離からの有向ネットワークの実現

正　員　田村　裕[†]　非会員　後藤　聡子[†]　正　員　仙石　正和[†]
正　員　篠田　庄司[††]　正　員　阿部　武雄[†]

Realization of a Directed Network from a Subset of the Distance Set between Vertex Pairs

Hiroshi TAMURA[†], *Member,* Satoko GOTO[†], *Nonmember,*
Masakazu SENGOKU[†], Shoji SHINODA[††] *and*
Takeo ABE[†], *Members*

あらまし　通信網や交通網などのシステムのモデル化であるネットワークにおいて，2点間の距離は，その2点間の最短路長で定義され，2点間の関係を表す基本的な量である．各2点間の距離を，行列の要素としたものを距離行列と言い，行列が，あるネットワークの距離行列となるための必要十分条件や，そのネットワークを構成する問題は，興味ある重要な問題であり，現在まで多くの研究がなされている．距離行列とは，すべての2点間の距離が与えられたものであるが，本論文では，すべての2点間の距離ではなく，一部の2点間の距離（これを部分距離集合と言うこととする）が与えられた場合を考え，その距離を満足する有向ネットワークを実現する方法などについて考察する．まず，与えられた部分距離集合を満足する有向ネットワークが存在するための必要十分条件を与える．また，与えられた部分距離集合から，他の2点間の距離のとり得る範囲が決定されることを示す．次に，与えられた部分距離集合の実現となる有向ネットワークの集合を考える．そして，その集合が一致するような部分距離集合の中で，要素数が最も大きいもの，最も小さいものを求めるアルゴリズムを提案する．

1. まえがき

通信網や交通網などのシステムのモデル化であるネットワークにおいて，2点間の距離は，最短路長で定義され，2点間の関係を表す基本的な量である．各2点間の距離を要素として，行列によって表現したものを距離行列と言い，行列が，あるネットワークの距離行列となるための必要十分条件や，そのネットワークを構成する問題は，興味ある重要な問題であり，現在まで多くの研究がなされている．この場合は，2点間の距離をすべて与える，つまり行列の要素をすべて与えた場合の考察である．しかし応用面から考えて，2点間の距離をすべて与える必要がない場合，つまりすべてではなく一部の2点間の距離が与えられた場合の考察も重要である．例えば，コンピュータネットワークを設計する際には，遅延時間が距離に対応するが，このときすべてのコンピュータ間の距離ではなく，一部の主要なコンピュータ間の距離を満足することを要求される場合がこれにあたる．

そこで，本論文では，一部の2点間の距離（これを部分距離集合ということとする）を与えたとき，それらを満足する有向ネットワークが存在するための必要十分条件を与える．これは今までに得られた結果を補足的に拡張したものとなっている．また部分距離集合を満足する有向ネットワークが存在した場合，与えられた部分距離集合から決定される他の2点間の距離の取り得る範囲を示す．次に，与えられた部分距離集合の実現となる有向ネットワークの集合を考える．そして，その集合が等しくなるような部分距離集合の中で，要素数が最大となるものおよび最小となるものを求めるアルゴリズムを提案する．部分距離集合の要素数を最小にできれば，データとして記憶する際に，記憶領域の軽減につながる．

また，2点間の関係を表す基本的な量として，2点間の最大流量も重要である．最大流量に関する同様の考

† 新潟大学工学部情報工学科，新潟市
Faculty of Engineering, Niigata University, Niigata-shi, 950-21 Japan
†† 中央大学理工学部電気工学科，東京都
Faculty of Science and Engineering, Chuo University, Tokyo, 112 Japan

電子情報通信学会論文誌　A　Vol. J72-A　No. 11　pp. 1866-1875　1989年11月

察は，文献(1)，(5)を参照されたい．

なお，定義なしで用いる用語は，文献(2)によるものとする．

2. 準　　備

本論文では点集合を V，枝集合を E とする単純な有向グラフ $G=(V,E)$ を結線構造とする有向ネットワーク $N=(G,w_N)$ を考える．ここで，w_N は各枝 e に正の実数の重み $w_N(e)$ を対応させる重み関数とする．以下では，単にネットワークといった場合，有向ネットワークを意味するものとする．またネットワーク N における点集合，枝集合をそれぞれ $V(N), E(N)$ と表す場合もある．ネットワーク N の点 x から点 y への初等的な有向道の中で，長さが最小なものを点 x から点 y への最短路と言う．また，最短路の長さを x から y への距離と言い，$d_N(x,y)$ で表す．x から y への有向道が存在しない場合は，$d_N(x,y)=\infty$ とする．

ネットワーク N の任意の2点 x_i，x_j に対して，i，j 成分が $d_N(x_i,x_j)$ である $n\times n$ 行列 D_N を N の距離行列と言う．但し，n は N の点数とする．

文献(3)では，正方行列 A が，ある無向ネットワークの距離行列であるための必要十分条件を与えている．その必要十分条件の中の，対称性に関する条件を除くことで，正方行列 A が，ある（有向）ネットワークの距離行列であるための必要十分条件が得られる．

[定理1]　各成分が非負である正方行列 A が，あるネットワークの距離行列であるための必要十分条件は，A の i，j 成分を $A(i,j)$ とすると，

(I)　$A(i,j)=0\Leftrightarrow i=j$,

(II)　すべての相異なる i，j，k に対して，

$A(i,k)\leqq A(i,j)+A(j,k)$,

となることである．　□

本論文では，すべての2点間の距離の集合の，ある部分集合が与えられる場合を考える．そして与えられた一部の2点間の距離（これを部分距離集合と言う）は，ネットワークを用いて表すものとする．つまり，点 x から点 y への距離 a が与えられた場合には，点 x から点 y へ有向枝を結び，枝重みを a として，ネットワークで表すのである．

N，M をネットワークとしたとき，M の各枝 (x,y) に対して，$w_M(x,y)=d_N(f(x),f(y))$ となる $V(M)$ から $V(N)$ への全単射 f が存在するならば，M を N の距離行列のネットワーク表現と言う．なお，簡単のため M と N の点集合は同一のものを用いて，f を省略

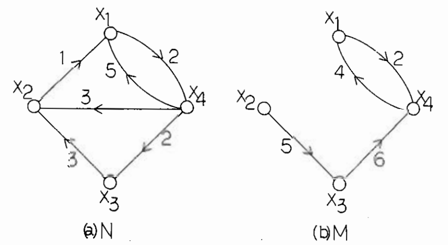

図1　ネットワーク N と N の距離行列のネットワーク表現 M

Fig. 1　A network N and a network representation M of the distance matrix of N.

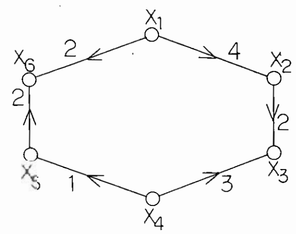

図2　ネットワーク M

Fig. 2　A network M.

する場合がある．ネットワーク表現の定義より，距離行列のある一部分が表されているネットワークは，その距離行列のネットワーク表現となる．距離行列のあるネットワーク表現から，いくつかの枝を開放除去したものも，その距離行列のネットワーク表現となるので，ある距離行列に対して，そのネットワーク表現は複数存在する．例えば図1において，M は N の距離行列のネットワーク表現となっている．

また，$\boldsymbol{S}(M)=\{N$：ネットワーク｜M は N の距離行列のネットワーク表現$\}$とし，$\boldsymbol{S}(M)$ を M の実現集合と言う．

ネットワーク M の点対 (x,y) に対して，$E_M(x,y)=\{(z,z')\in E(M)\mid d_M(z,x)<\infty,\ d_M(y,z')<\infty\}$ とし，$E_M(x,y)$ を (x,y) への到達可能枝集合と言う．また $E_M(x,y)\neq\phi$ であるとき，$e_M(x,y)=\max\{w_M(z,z')-d_M(z,x)-d_M(y,z')\mid(z,z')\in E_M(x,y)\}$ とする．例えば，図2において，$E_M(x_6,x_2)=\{(x_4,x_3),(x_1,x_2)\}$ であり，$e_M(x_6,x_2)=2$ である．また，$E_M(x_1,x_3)=\phi$ である．

M があるネットワークの距離行列のネットワーク表現となっているとき，M を距離実現可能ネットワークと言う．定理1から，距離実現可能ネットワークの枝重みに関する以下の不等式が成立する．

[系1]　M を距離実現可能ネットワークとする．$(x,$

$y), (y, z), (x, z)$ がともに M の枝であるならば，

$$w_M(x, z) \leqq w_M(x, y) + w_M(y, z)$$

が成り立つ． □

3. 諸　定　理

本論文では，与えられた部分距離集合を，ネットワーク M を用いて表すこととした．与えられる 2 点間の距離には，∞の場合もあり得るのだが，本章では，∞の距離は考えないものとする．この仮定からネットワーク M の枝重みは，正の実数と考えてよい．なお，枝重みとして∞も含む場合は，**5.** において考察する．

3.1 距離実現可能ネットワーク

まず，前章で述べた，今までに得られている結果から，直ちに，M が距離実現可能ネットワークであるための必要十分条件が得られる．

[定理 2]　M が距離実現可能ネットワークであるための必要十分条件は，任意の M の枝 (x, y) に対して，

$$w_M(x, y) = d_M(x, y)$$

であることである．

(証明)　必要性：(x, y) を M の枝とし，x から y への最短路を $(x, z_1, z_2, \cdots, z_k, y)$ とする．すると，

$$d_M(x, y) = w_M(x, z_1) + w_M(z_1, z_2) + \cdots + w_M(z_k, y)$$

系 1 より，

$$d_M(x, y) \geqq w_M(x, z_2) + \cdots + w_M(z_k, y) \geqq \cdots \geqq w_M(x, y),$$

また，一般に $w_M(x, y) \geqq d_M(x, y)$ であるので，$w_M(x, y) = d_M(x, y)$ となる．

十分性：M の各枝 (x, y) に対して，$w_M(x, y) = d_M(x, y)$ であるので，M は M 自身の距離行列のネットワーク表現となっている． □

M の距離行列を求めておけば，定理 2 から，M が距離実現可能ネットワークかどうかの判定は容易である．1 点から他のすべての点への距離は $O(m + n \log n)$ の手間で求められることが知られている[4]ので(但し，n，m はそれぞれ M の点数，枝数を表す)，これを M の各点に関して，繰り返し求めることにより，$O(mn + n^2 \log n)$ の手間で M の距離行列を求めることができる．よって $O(mn + n^2 \log n)$ の手間で，M が距離実現可能ネットワークであるかどうかを判定できる．

次に，M が距離実現可能ネットワークであるとし，(x, y) は M の枝でない，つまり，x から y への距離は，与えられていないものとする．このとき，取り得る x から y への距離の範囲が，M より決定される．

[定理 3]　M を距離実現可能ネットワークとし，$M' = M + (x, y)$ とする．このとき，M' が距離実現可能ネットワークであるための必要十分条件は，

$$0 < w_{M'}(x, y) \leqq d_M(x, y),$$

かつ，$E_M(x, y) \neq \phi$ であれば，

$$e_M(x, y) \leqq w_{M'}(x, y) \tag{1}$$

であることである．

(証明)　必要性：枝の付加により M' が得られたので，任意の 2 点 z，z' に対して $d_{M'}(z, z') \leqq d_M(z, z')$ である．

M' は N の距離行列のネットワーク表現であるとすると，N の枝重みは正であるので，$w_{M'}(x, y) > 0$ である．

$d_M(x, y) < w_{M'}(x, y)$ であるとすると，$d_{M'}(x, y) \leqq d_M(x, y) < w_{M'}(x, y)$ となるので，定理 2 から M' は距離実現可能ネットワークではない．

また $E_M(x, y) \neq \phi$ であって，$e_M(x, y) > w_{M'}(x, y)$ であるとする．すると，$w_M(z, z') - d_M(z, x) - d_M(y, z') > w_{M'}(x, y)$ なる枝 (z, z') が存在する．$w_{M'}(z, z') = w_M(z, z') > d_M(z, x) + w_{M'}(x, y) + d_M(y, z') \geqq d_{M'}(z, x) + w_{M'}(x, y) + d_{M'}(y, z') \geqq d_{M'}(z, z')$ となるので，定理 2 より M' は距離実現可能ネットワークではない．

十分性：定理 2 から，M' の各枝 (z, z') に対して，$w_{M'}(z, z') = d_{M'}(z, z')$ を示せばよい．

$(z, z') = (x, y)$ のときは，$w_{M'}(x, y) \leqq d_M(x, y)$ であるので，枝 (x, y) が M' における x から y への最短路となり，$w_{M'}(x, y) = d_{M'}(x, y)$．

$(z, z') \neq (x, y)$ のときを以下に示す．P を M' における z から z' への最短路とする．P が枝 (x, y) を通らない場合は，$d_{M'}(z, z') = d_M(z, z')$ である．M は距離実現可能ネットワークであるので，定理 2 から $d_M(z, z') = w_M(z, z')$ である．よって，$d_{M'}(z, z') = w_M(z, z') = w_{M'}(z, z')$ となる．P が枝 (x, y) を通る場合は，

$$d_{M'}(z, z') = d_M(z, x) + w_{M'}(x, y) + d_M(y, z')$$

となる．$d_M(z, x) < \infty$，$d_M(y, z') < \infty$ であるので，$(z, z') \in E_M(x, y)$ となる．よって式(1)より

$$w_M(z, z') \leqq d_M(z, x) + w_{M'}(x, y) + d_M(y, z')$$

となる．よって，$d_{M'}(z, z') \geqq w_M(z, z')$ となり，$d_{M'}(z, z') \leqq d_M(z, z') = w_M(z, z') = w_M(z, z')$ であることから，$d_{M'}(z, z') = w_M(z, z') = w_{M'}(z, z')$ となる． □

3.2 枝の D 付加，D 削除

定理 3 から，$E_M(x, y) \neq \phi$ であって，$e_M(x, y) = d_M(x, y)$ となる場合は，$w_{M'}(x, y)$，つまり x から y へ

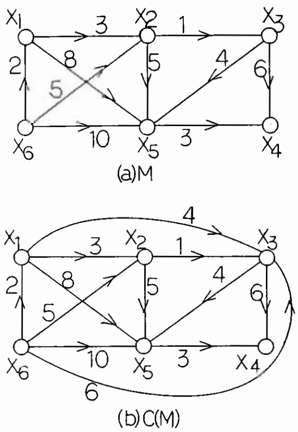

図 3　ネットワーク M とその閉包 $C(M)$
Fig. 3　A network M and the closure $C(M)$ of M.

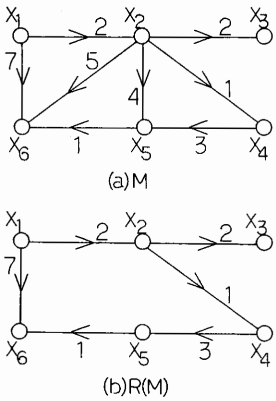

図 4　ネットワーク M とその簡約形 $R(M)$
Fig. 4　A network M and the reduction $R(M)$ of M.

の距離は，M を与えた時点で，決定していたと考えることができる．そこで，M の構造から決定してしまう距離を，枝として M に付加する操作を定義する．

［定義 1］　M を距離実現可能ネットワークとする．$(x, y)\notin E(M)$ であるとし，

$$w_M(z, z')=d_M(z, x)+d_M(x, y)+d_M(y, z') \quad (2)$$

なる枝 (z, z') が存在するとする．このとき，M に枝 (x, y) を加え，重みを $d_M(x, y)$ とする操作を，枝 (x, y) の D 付加と言う（定理 3 の条件式より導出される（derived）枝の意味）．

また，枝の D 付加を M から可能な限り繰り返したネットワークを M の閉包と言い，$C(M)$ と表す．□

閉包の例を示す．図 3(a) の距離実現可能ネットワーク M において，$w_M(x_6, x_5)=d_M(x_6, x_1)+d_M(x_1, x_3)+d_M(x_3, x_5)$ であるので，枝 (x_1, x_3) の D 付加が可能である．$M+(x_1, x_3)$ においては，枝 (x_6, x_3) の D 付加が可能であり，(x, x_3) を D 付加したネットワークが M の閉包 $C(M)$ となる（図 3(b)）．

次に，M から枝を削除する操作を定義する．

［定義 2］　M を距離実現可能ネットワークとする．$(x, y)\in E(M)$ であるとし，$M'=M-(x, y)$ とすると，$d_{M'}(x, y)=d_M(x, y)$ であり，かつ

$$w_M(z, z')=d_M(z, x)+d_M(x, y)+d_M(y, z') \quad (3)$$

なる枝 $(z, z')(\neq(x, y))$ が存在するとする．このとき，M から枝 (x, y) を削除する操作を，枝 (x, y) の D 削除と言う．

また，枝の D 削除を M から可能な限り繰り返したネットワークを M の簡約形と言い，$R(M)$ と表す．□

簡約形の例を示す．図 4(a) の距離実現可能ネットワークにおいて，$M'=M-(x_2, x_5)$ とすると，$d_{M'}(x_2, x_5)=d_M(x_2, x_5)$ であり，$w_M(x_1, x_6)=d_M(x_1, x_2)+d_M(x_2, x_5)+d_M(x_5, x_6)$ であるので，M から枝 (x_2, x_5) の D削除が可能である．M' においては，枝 (x_2, x_6) の D 削除が可能であり，M' から枝 (x_2, x_6) を D 削除したネットワークが，M の簡約形 $R(M)$ となる（図 4(b)）．

枝の D 削除は，D 付加の逆の操作となるが，これについて以下に示す．

［補題 1］　M を距離実現可能ネットワークとし，M に枝 (x_0, y_0) を D 付加したネットワークを M' とする．すると，M の距離行列と M' の距離行列は等しい．

（証明）　x，y を M の任意の 2 点とする．M' における x から y への最短路が，枝 (x_0, y_0) を通らなければ，$d_{M'}(x, y)=d_M(x, y)$ である．枝 (x_0, y_0) を通る場合は，D 付加の定義から $d_M(x_0, y_0)=w_{M'}(x_0, y_0)$ であるので，やはり，枝 (x_0, y_0) を通らない x から y への最短路が存在する．よって，$d_{M'}(x, y)=d_M(x, y)$ である．□

［補題 2］　M を N の距離行列のネットワーク表現とし，M に枝 (x_0, y_0) を D 付加したネットワークを M' とする．すると M' も N の距離行列のネットワーク表現となる．

（証明）　M に (x_0, y_0) の D 付加が可能であることより，$w_M(z_0, z_0')=d_M(z_0, x_0)+d_M(x_0, y_0)+d_M(y_0, z_0')$ なる M の枝 (z_0, z_0') が存在する．つまり，

$$d_M(x_0, y_0)=w_M(z_0, z_0')-d_M(z_0, x_0)-d_M(y_0, z_0') \quad (4)$$

である．また，$d_M(x_0, y_0)\neq\infty$ であることから，$d_N(x_0, y_0)\neq\infty$ である．よって，$M^*=M+(x_0, y_0)$，$w_{M^*}(x_0,$

$y_0)=d_N(x_0, y_0)$ とすると，M^* は N の距離行列のネットワーク表現となる．M^* は距離実現可能ネットワークであるので，定理3より，

$$w_M(z_0, z_0')-d_M(z_0, x_0)-d_M(y_0, z_0') \leqq w_{M^*}(x_0, y_0) \leqq d_M(x_0, y_0) \quad (5)$$

となる．式(4)，(5)より，$d_M(x_0, y_0)=w_{M^*}(x_0, y_0)$ となる．D付加の定義から，$d_M(x_0, y_0)=w_{M'}(x_0, y_0)$であるので，$w_{M^*}(x_0, y_0)=w_{M'}(x_0, y_0)$ となる．従って，$M^*=M'$ となり，M' は N の距離行列のネットワーク表現である． □

補題1とほぼ同様の証明で，次の補題3が示せる．

[補題3] M を距離実現可能ネットワークとし，M から枝 (x_0, y_0) をD削除したネットワークを M' とする．すると，M の距離行列と M' の距離行列は等しい． □

[補題4] M を N の距離行列のネットワーク表現とし，M から枝 (x_0, y_0) をD削除したネットワークを M' とする．すると M' も N の距離行列のネットワーク表現となる．

(証明) M' が M の部分ネットワークとなることから，明らかである． □

以上より，D削除がD付加の逆の操作であることを示すことができる．

[補題5] M を距離実現可能ネットワークとし，$(x, y)\notin E(M)$，$M'=M+(x, y)$ とする．このとき，M における枝 (x, y) のD付加により M' が得られたのであれば，M' における枝 (x, y) のD削除により M が得られる．

(証明) M にD付加が可能であることから，$d_M(z, x)+d_M(x, y)+d_M(y, z')=w_M(z, z')$ なる枝 (z, z') が存在する．また，補題1から $d_{M'}(x, y)=d_M(x, y)$，$d_{M'}(z, x)+d_{M'}(x, y)+d_{M'}(y, z')=w_{M'}(z, z')$ となり，補題2から M' は距離実現可能ネットワークであるので，M' において枝 (x, y) のD削除が可能となる． □

次の補題は，補題3，4を用いて補題5とほぼ同様の証明が可能である．

[補題6] M を距離実現可能ネットワークとし，$(x, y)\in E(M)$，$M'=M-(x, y)$ とする．このとき，M における枝 (x, y) のD削除により M' が得られたのであれば，M' における枝 (x, y) のD付加により M が得られる． □

3.3 閉包，簡約形の一意性

定義1，2において，M の閉包 $C(M)$，簡約形 $R(M)$ を定義した．この節では，$C(M)$，$R(M)$ がそれぞれ枝の付加，削除の順序に関係なく，M から一意に決定されることを示す．

[定理4] M を距離実現可能ネットワークとする．(x, y) が M の閉包の枝であるための必要十分条件は，(x, y) が M の枝であるか，M において枝 (x, y) のD付加が可能なことである．

(証明) 十分性：M において枝 (x, y) のD付加が可能であれば，(x, y) が $C(M)$ の枝であることを示せばよい．(x, y) が $C(M)$ の枝でなかったとする．M においてはD付加が可能であるので，$w_M(z, z')=d_M(z, x)+d_M(x, y)+d_M(y, z')$ となる枝 (z, z') が存在する．補題1から，$w_{C(M)}(z, z')=d_{C(M)}(z, x)+d_{C(M)}(x, y)+d_{C(M)}(y, z')$ となり，$C(M)$ において枝 (x, y) のD付加が可能となり，閉包の定義に矛盾する．

必要性：(x, y) が M に付加された枝であるとき，式(2)を満たす M の枝 (z, z') が存在することを示せばよい．$M(=M_0$ とする$)$ からD付加を繰り返すことで，順に，$M_1, M_2, \cdots, M_k(=C(M))$ が得られたとし，また $M_i(i=0, \cdots, k-1)$ に枝 (x_i, y_i) を付加して M_{i+1} が得られたとする．よって，各 (x_i, y_i) に対して，式(2)を満たす M の枝が存在することを示せばよい．証明は，帰納法による．

$\boldsymbol{i=0}$ のとき，$M_0=M$ なので明らかである．

$\boldsymbol{i<h}$ のとき，各 (x_i, y_i) に対して，式(2)を満たす M の枝が存在すると仮定する．

D付加の定義から，M_h において，

$$w_{M_h}(z, z')=d_{M_h}(z, x_h)+d_{M_h}(x_h, y_h)+d_{M_h}(y_h, z') \quad (6)$$

なる M_h の枝 (z, z') が存在する．(z, z') が M の枝であれば，補題1より，(z, z') が M において式(2)を満足する枝である．(z, z') が M の枝でないときは $(z, z')=(x_j, y_j)$(但し，$j<h$) である．よって帰納法の仮定から，

$$w_M(z_j, z_j')=d_M(z_j, x_j)+d_M(x_j, y_j)+d_M(y_j, z_j') \quad (7)$$

なる M の枝 (z_j, z_j') が存在する（図5参照，なお同図において，点線は道を表すものとする）．補題1より式(6)は，

$$d_M(x_j, y_j)=d_M(x_j, x_h)+d_M(x_h, y_h)+d_M(y_h, y_j) \quad (8)$$

となるので，式(7)に式(8)を代入すると，

$$w_M(z_j, z_j')=d_M(z_j, x_j)+d_M(x_j, x_h)+d_M(x_h, y_h)+d_M(y_h, y_j)+d_M(y_j, z_j')$$

となる．$d_M(z_j, x_j)+d_M(x_j, x_h)>d_M(z_j, x_h)$，または

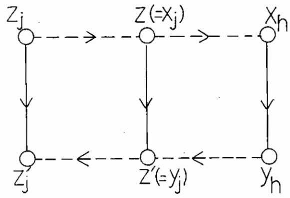

図 5　定理 4 の証明のための図
Fig. 5　Explanation for the proof of Theorem 4.

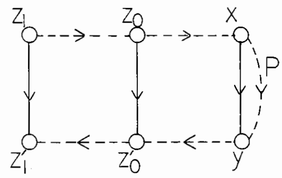

図 6　定理 5 の証明のための図
Fig. 6　Explanation for the proof of Theorem 5.

$d_M(y_h, y_j)+d_M(y_j, z_j')>d_M(y_h, z_j')$ であると，$w_M(z_j, z_j')>d_M(z_j, z_j')$ となり，定理 2 より，M が距離実現可能ネットワークであることに矛盾する．よって，

$$w_M(z_j, z_j')=d_M(z_j, x_h)+d_M(x_h, y_h)+d_M(y_h, z_j')$$

となり，(z_j, z_j') が式(2)を満足することがわかる．

以上より，帰納法から必要性が証明された．□

［定理 5］　M を距離実現可能ネットワークとする．(x, y) が M の簡約形の枝であるための必要十分条件は，(x, y) が M の枝であり，かつ M において枝 (x, y) の D 削除ができないことである．

（証明）　十分性：(x, y) が M の枝であり，M において D 削除ができないとする．つまり，$d_{M'}(x, y)>d_M(x, y)$（但し，$M'=M-(x, y)$），または，M の任意の枝 (z, z') に対して，$w_M(z, z')<d_M(z, x)+d_M(x, y)+d_M(y, z')$ である．

M から D 削除を繰り返し，順に $M, M_1, M_2, \cdots, M_k(=R(M))$ が得られたとし，$M_i'=M_i-(x, y)$ とする．

$d_{M'}(x, y)>d_M(x, y)$ とする．補題 3 より，$d_{M_i}(x, y)=d_M(x, y)$ となり，M_i' は M' の部分ネットワークであるので，$d_{M'}(x, y)\leqq d_{M_i'}(x, y)$ となる．以上より，$d_{M_i}(x, y)=d_M(x, y)<d_{M'}(x, y)\leqq d_{M_i'}(x, y)$ となるので，$d_{M_i}(x, y)<d_{M_i'}(x, y)$ である．

M の任意の枝 (z, z') に対して，$w_M(z, z')<d_M(z, x)+d_M(x, y)+d_M(y, z')$ であるとする．補題 3 より，$w_{M_i}(z, z')<d_{M_i}(z, x)+d_{M_i}(x, y)+d_{M_i}(y, z')$ となる．以上のことから，M において枝 (x, y) が D 削除できないならば，(x, y) が M_i から D 削除されることはない．つまり枝 (x, y) は M の簡約形 $R(M)$ の枝である．

必要性：M において D 削除が可能であれば，(x, y) が $R(M)$ の枝でないことを示せばよい．D 削除が可能であるので，$d_M(x, y)=d_{M'}(x, y)$ である（但し，$M'=M-(x, y)$）．よって，$d_M(x, x_0)+d_M(x_0, y)=d_M(x, y)$ なる点 $x_0(\neq x, y)$ が存在する．補題 3 より

$$d_{R(M)}(x, y)=d_{R(M)}(x, x_0)+d_{R(M)}(x_0, y) \tag{9}$$

である．

また，(x, y) の D 削除が可能なことから，式(3)を満たす枝 (z, z') が存在する．その中で重み最大の枝を (z_0, z_0') とする．すると，(z_0, z_0') は $R(M)$ の枝である．なぜなら，(z_0, z_0') が $R(M)$ の枝でないと仮定すると，先に示した十分性から，M において，枝 (z_0, z_0') の D 削除が可能である．よって，

$$w_M(z_1, z_1')=d_M(z_1, z_0)+d_M(z_0, z_0')+d_M(z_0', z_1') \tag{10}$$

なる M の枝 (z_1, z_1') が存在する（図 6 参照）．枝 (z_0, z_0') は式(3)を満たすことより，$d_M(z_0, z_0')=w_M(z_0, z_0')=d_M(z_0, x)+d_M(x, y)+d_M(y, z_0')$ となるので，式(10)は，

$$w_M(z_1, z_1')=d_M(z_1, z_0)+d_M(z_0, x)+d_M(x, y)+d_M(y, z_0')+d_M(z_0', z_1') \tag{11}$$

となる．$d_M(z_1, z_0)+d_M(z_0, x)>d_M(z_1, x)$，または $d_M(y, z_0')+d_M(z_0', z_1')>d_M(y, z_1')$ であると，$w_M(z_1, z_1')>d_M(z_1, z_1')$ となり，定理 2 より M が距離実現可能ネットワークであることに矛盾する．よって式(11)は，

$$w_M(z_1, z_1')=d_M(z_1, x)+d_M(x, y)+d_M(y, z_1')$$

となり，枝 (z_1, z_1') は式(3)を満たす．しかし，$(z_1, z_1')\neq(z_0, z_0')$ であるので，$d_M(z_1, z_0)>0$ または，$d_M(z_0', z_1')>0$ である．よって，式(10)から，$w_M(z_1, z_1')>d_M(z_0, z_0')$ となり，$d_M(z_0, z_0')=w_M(z_0, z_0')$ であるので，(z_0, z_0') の重みの最大性に矛盾する．

以上より，(z_0, z_0') は $R(M)$ の枝である．また，枝重みが正なので，式(9)より，$R(M)$ において枝 (x, y) を通らない x から y への最短路 P が存在する．つまり，$R(M)'=R(M)-(x, y)$ とすると，$d_{R(M)'}(x, y)=d_{R(M)}(x, y)$．よって，$(x, y)$ が $R(M)$ の枝であると，$R(M)$ において，(x, y) の D 削除が可能となり，簡約形の定義に矛盾する．従って，(x, y) は $R(M)$ の枝ではない．□

定理 4, 5 より，点対 (x, y) が閉包や簡約形の枝であるかどうかは，M における枝重みと点間の距離の関係

から決定され，D付加やD削除の順番によらない．よって，M の閉包，簡約形は，それぞれ M から一意に決まることがわかる．

3.4 閉包，簡約形と実現集合

この節では，先に定義した実現集合と，D付加，D削除の関係について考察し，実現集合が $S(M)$ と等しくなるような距離実現可能ネットワークの中で，$C(M)$，$R(M)$ がそれぞれ，枝数最大，枝数最小であることを示す．

［補題7］ M を距離実現可能ネットワークとし，$M'=M+(x, y)$ とする．このとき，$S(M)=S(M')$ であるための必要十分条件は，(x, y) がD付加であることである．

（証明） 十分性：M は M' の部分ネットワークであるので，M' が N の距離行列のネットワーク表現であれば，M も N の距離行列のネットワーク表現となる．よって，$S(M')\subset S(M)$ である．また，$N\in S(M)$ であったとすると，補題2から $N\in S(M')$ となり，$S(M)\subset S(M')$ となる．以上より十分性の証明終了．

必要性：$S(M)=S(M')$ となることより，M' も距離実現可能ネットワークである．$E_M(x, y)=\phi$ であると定理3より，任意の正の実数 $k(\leqq d_M(x, y))$ に対して，$d_N(x, y)=k$ であるネットワーク $N\in S(M)$ が存在する．しかし $S(M')$ の要素においては，x から y への距離は1通りであるので，$S(M)=S(M')$ であることに矛盾する．よって $E_M(x, y)\neq\phi$ である．$e_M(x, y)<d_M(x, y)$ であると，上と同様の理由で $S(M)=S(M')$ であることに矛盾する．よって，$e_M(x, y)=d_M(x, y)$ であり，$w_M(z, z')=d_M(z, x)+d_M(x, y)+d_M(y, z')$ なる枝 (z, z') が存在する．これは，(x, y) がD付加されたことを意味する． □

［補題8］ M を距離実現可能ネットワークとし，$M'=M-(x, y)$ とする．このとき，$S(M)=S(M')$ であるための必要十分条件は，(x, y) がD削除であることである．

（証明） 十分性：補題6から M' への (x, y) のD付加により，M が得られたと考えられる．よって補題7より，$S(M)=S(M')$ である．

必要性：$S(M)=S(M')$ であるので，M' も距離実現可能ネットワークである．$M=M'+(x, y)$，$S(M)=S(M')$ であることから，補題7より，(x, y) は M' にD付加されたものと考えられる．よって補題5より，(x, y) は M からD削除されたものである． □

［補題9］ M，M' を距離実現可能ネットワークとする．このとき，$S(M)=S(M')$ であるための必要十分条件は，$C(M)=C(M')$ であることである．

（証明） 十分性：補題7より，$S(M)=S(C(M))$，$S(M')=S(C(M'))$ である．また，$C(M)=C(M')$ であるので，$S(M)=S(M')$ である．

必要性：対偶を証明するものとする．今，$C(M)\neq C(M')$ であったとする．$C(M)$ と $C(M')$ において，同じ点間に重みの異なる枝が存在すれば，明らかに，$S(C(M))\neq S(C(M'))$ となる．

$(x, y)\in E(C(M))$，$(x, y)\notin E(C(M'))$ とする．(x, y) は $C(M')$ にD付加できないので，$E_{C(M')}(x, y)=\phi$ または，$e_{C(M')}(x, y)<d_{C(M')}(x, y)$ である．よって，$S(C(M'))$ の要素で，x から y への距離が等しくないネットワークが存在する．しかし，$S(C(M))$ の要素においては，x から y への距離は1通りであるので，$S(C(M))\neq S(C(M'))$ である．$(x, y)\notin E(C(M))$，$(x, y)\in E(C(M'))$ の場合も $S(C(M))\neq S(C(M'))$ である．

よって，いずれの場合も $S(C(M))\neq S(C(M'))$ となる．$S(M)=S(C(M))$，$S(M')=S(C(M'))$ であるので，$S(M)\neq S(M')$ となり，対偶が証明された． □

［定理6］ M を距離実現可能ネットワークとすると，$C(M)$ は実現集合が $S(M)$ となるネットワークの中で枝数最大である．

（証明） M^* を実現集合が $S(M)$ となるネットワークの中で，枝数最大とする．$S(M^*)=S(M)$ であるので，補題9より $C(M^*)=C(M)$ である．M^* にD付加が可能であると，補題7より，枝を付加したネットワークの実現集合も $S(M)$ と等しくなり，枝数最大であることに矛盾する．よって $C(M^*)=M^*$ となり，$M^*=C(M)$ となる． □

［定理7］ M を距離実現可能ネットワークとすると，$R(M)$ は実現集合が $S(M)$ となるネットワークの中で枝数最小である．

（証明） M^* を実現集合が $S(M)$ となるネットワークの中で，枝数最小とする．$S(M^*)=S(M)$ であるので，補題9より $C(M^*)=C(M)$ である．$C(M)$ から，D削除を何回か繰り返すことで M が得られ，また簡約形は一意に定まるので，$R(C(M))=R(M)$，同様に，$R(C(M^*))=R(M^*)$ である．よって，$R(M^*)=R(M)$ となる．$R(M^*)$ からD削除が可能であると，補題8より枝を削除したネットワークの実現集合も $S(M)$ と等しくなり，枝数最小であることに矛盾する．よって，$R(M^*)=M^*$ となり，$M^*=R(M)$ となる． □

4. アルゴリズム

4.1 距離実現可能ネットワークの閉包を求めるアルゴリズム

定理4から，(x, y) が M において，枝であるか，枝 (x, y) のD付加が可能であることが，(x, y) が M の閉包の枝であるための必要十分条件であった．よって，次のような，M の閉包を求めるアルゴリズムが得られる．なお，M の点数を n，枝数を m とする．

procedure CLOSURE
begin
C1　点集合，枝集合，枝重みがともに M と等しいネットワーク $C(M)$ を構成する；
C2　**for** any　$(x, y) \notin E(M)$　**do**
　begin
C3　　$s := 0$；
C4　　**for**　any　$(z, z') \in E(M)$　**do**
　　begin
C5　　　**if**　$d_M(z, x) + d_M(x, y) + d_M(y, z') = w_M(z, z')$
　　　then　$s := 1$
　　end；
C6　　**if**　$s = 1$　**then**
　　begin
C7　　　add　(x, y)　to　$E(C(M))$；
C8　　　$w_{C(M)}(x, y) := d_M(x, y)$
　　end
　end
end

M の距離行列が，あらかじめ求められているならば(距離行列を求める手間は，**3.1** で述べたように，$O(nm + n^2 \log n)$)，M の閉包は，このアルゴリズムを用いることで，$O(n^2 m)$ の手間で得られる．なぜなら，C2の手間が $O(n^2)$ であり，その各々について，C3-C4で $O(m)$ の手間がかかるからである．

4.2 距離実現可能ネットワークの簡約形を求めるアルゴリズム

定理5からは，次のような M の簡約形を求めるアルゴリズムが得られる．なお，M の点数を n，枝数を m とする．

procedure REDUCTION
begin
R1　点集合，枝集合，枝重みがともに M と等しいネットワーク $R(M)$ を構成する；
R2　**for**　any　$(x, y) \in E(M)$　**do**
　begin
R3　　$s := 0$；$s' := 0$；
R4　　**for**　any　$z'' \in V(M) - \{x, y\}$　**do**
　　begin
R5　　　**if**　$w_M(x, y) = d_M(x, z'') + d_M(z'', y)$
　　　then　$s := 1$
　　end；
R6　　**for**　any　$(z, z') \in E(M) - \{(x, y)\}$
　　do begin
R7　　　**if**　$d_M(z, x) + d_M(x, y) + d_M(y, z') = w_M(z, z')$
　　　then　$s' := 1$
　　end；
R8　　**if**　$s = 1$　**and**　$s' = 1$
　　then delete (x, y)　from　$E(R(M))$
　end
end

$d_M(x, y) = d_{M'}(x, y)$(但し，$M' = M - (x, y)$)であるかどうかは，各枝の重みが正の実数であるので，R4-R5のように，$d_M(x, z'') + d_M(z'', y) = w_M(x, y)$ となる x, y 以外の点 z'' が存在するかどうかを調べればよい．M の距離行列が，あらかじめ求められているならば，M の簡約形は，このアルゴリズムを用いることで，$O(m(n+m))$ の手間で得られる．なぜなら，M の各枝について，R4-R5で $O(n)$，R6-R7で $O(m)$ の手間がかかるからである．

5. 補　　足

本論文では，与えられた部分距離集合を，ネットワークを用いて表したが，ネットワークの枝重みとしては，∞ と0の場合を除いていた．本章では，枝重みとして ∞ または0を含む場合について，言及しておく．

M の枝重みとして ∞ を認めた場合，定理2, 3は同様に成り立つ．D付加に関しては，(x, y) への到達可能枝集合 $E_M(x, y)$ の要素であり，式(2)を満たすような枝 (z, z') が存在する場合に，(x, y) を付加するものとする(D削除も同様)．このようにD付加，D削除を定義しても，本論文とほとんど同様の結果が得られるが，簡約形は一意に定まるとは限らず，簡約形を求めるアルゴリズムも修正する必要がある．例えば，図7における距離実現可能ネットワークにおいて，枝 (x_1, x_3) のD削除も，枝 (x_2, x_3) のD削除も可能であるが，両

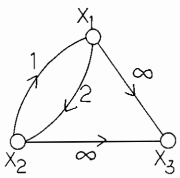

図 7　ネットワーク M
Fig. 7　A network M.

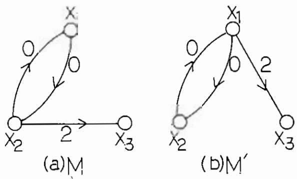

図 8　ネットワーク
Fig. 8　Networks.

方の枝を削除することはできない．但し，枝重みとして∞を認めた場合でも，簡約形は枝数最小となる．

次に，本論文で扱わなかった，重み 0 の枝も認める場合を考える．この場合，実現集合が等しくなるネットワークの中で，枝数最大，最小のものを求める際に，D 付加，D 削除以外の操作が必要になる．例えば，$(x, y)\notin E(M)$，$d_M(x, y)=0$ のとき，枝 (x, y) を付加し，重みを 0 とする操作である．また，枝数最小のものが，一意に定まらない場合も生じる．例えば，図 8 におけるネットワーク M，M' において，$S(M)=S(M')$ であり，M，M' とも枝数最小である．よってこれらのように，枝重みの範囲を拡張した場合は，本論文で展開した理論の一部を修正する必要がある．

なお，枝に容量の重みをもつネットワークの 2 点間の最大流量に関して，本論文の距離と同様の議論を行った場合，実現集合が等しくなるネットワークの中で，枝数最小のものが 1 通りに定まるとは限らないことがわかっている[5]．

6. む　す　び

本論文では，一部の 2 点間の距離（部分距離集合）が与えられた場合の，有向ネットワーク上への実現について考察した．まず，与えられた部分距離集合が有向ネットワーク上に実現可能であるための必要十分条件を与えた．次に，与えられていない 2 点間の距離のとり得る範囲が，部分距離集合から決定されることを示した．更に，与えられた部分距離集合の実現となるネットワークの集合を与え，その集合が等しくなる部分距離集合の中で，要素数が最も大きいものおよび小さいものを求めるアルゴリズムを提案した．

本論文では，距離は「x から y への距離」という形で与えられたが，これを「x，y 間の距離」という形で与えて，無向ネットワーク上へ実現する問題も考えられる．この場合は，2 点 x，y 間の距離を有向ネットワークを用いて表現する際に，x，y 間の対称枝で表現することで，本論文と同様の議論が可能である．

実際のネットワーク設計の際には，与えられた部分距離集合を実現するネットワークの中で，枝数が最小となるものや，枝重みの総和が最小となるものが重要である．これらの構成については今後の課題である．

文　　献

（1）田村　裕，仙石正和，篠田庄司，阿部武雄："一部の最大流量が与えられた場合の無向フローネットワークの実現"，信学技報，**CAS 88-39**（1988-07）．

（2）伊理正夫，白川　功，梶谷洋司，篠田庄司ほか："演習グラフ理論"，コロナ社（昭 58）．

（3）S. L. Hakimi and S. S. Yau："Distance Matrix of a Graph and its Realizability", Quart. Appl. Math., **22**, pp. 305-317（1965）．

（4）M. L. Fredman and R. E. Tarjan："Fibonacci heaps and their uses in improved network optimization algorithms", Proc. 25-th Ann. IEEE Symp. Fundations of Computer Science, pp.338-346（1984）．

（5）田村　裕，仙石正和，篠田庄司，阿部武雄："一部の最大流量からの無向フローネットワークの実現"，信学論（A），**J72-A**，8，pp. 1316-1326（平 1-08）．

（平成元年 4 月 11 日受付，6 月 13 日再受付）

田村　　裕

昭 57 新潟大・教育卒．昭 61 同大大学院理学研究科修士課程了．現在，同大学院自然科学研究科博士課程在学中．グラフ理論とその応用，計算幾何学とその応用の研究に従事．

後藤　聡子

平成元年新潟大・工・情報卒．現在，（株）日立製作所中条工場商品設計部勤務．在学中，グラフ，ネットワークの研究に従事．

仙石　正和

昭42新潟大・工・電気卒．昭47北大大学院博士課程了．工博．同年北大・工・電子助手．昭53新潟大・工・情報助教授を経て，現在，同教授．回路網理論，グラフ・ネットワーク理論，情報伝送特に移動通信の研究に従事．著書「演習グラフ理論」（共著）．

篠田　庄司

昭39中大・理工・電気卒．昭48同大大学院博士課程了．工博．昭40中大研究助手．現在，同大理工学部電気工学科教授．グラフネットワーク構造をもつシステムの解析，設計，制御の研究に従事．著書「最新回路理論」,「回路解析」ほか．

阿部　武雄

昭24東工大・工・電気卒．電気試験所，千葉工大，東工大工業教員養成所を経て，現在，新潟大・工・教授．工博．この間，高周波標準，レーザ光の降雪中の伝搬，マイクロ波素子，損失媒質中の伝搬，および移動通信，ネットワークなどの研究に従事．著書「電気・電子計測」（共著）など．