

チェス盤ひずみを伴わない2分割QMFバンクとそのラティス構成

原田 康裕[†] 村松 正吾[†] 貴家 仁志[†]

Two-Channel QMF Bank without Checkerboard Effect and Its Lattice Structure

Yasuhiro HARADA[†], Shogo MURAMATSU[†], and Hitoshi KIYA[†]

あらまし フィルタバンクは、多くの場合、完全再構成条件を満たすように設計されるが、実際の使用においては、必ずしもこの条件は満足されない。このとき、フィルタバンクは時変システムとして動作し、この時変性の影響によりチェス盤ひずみが発生する。本論文では、2分割フィルタバンクにおいて、有限語長実現の影響や完全再構成条件を満たさない場合も含めチェス盤ひずみの考察を行い、チェス盤ひずみを回避するための条件を一般的に定式化する。また、その条件を満足するパラユニタリ QMF バンクの設計法およびそのラティス構成による実現法を示す。更に、有限語長で実現する際に、このラティス構成を用いることにより回転角に補正角を加えることでチェス盤ひずみを極力抑えることが可能であることを示す。

キーワード チェス盤ひずみ、フィルタバンク、サブバンド符号化、レギュラリティ

1. ま え が き

画像や音声信号のデータ圧縮の分野において、フィルタバンクを用いたサブバンド符号化方式が検討されている [3],[4],[6]。また、このフィルタバンクは、ウェーブレット基底の設計や、ウェーブレットの実行においても重要な役割を果たしている。本論文では、このフィルタバンクを使用する際に問題となるチェス盤ひずみについて考察し、2分割フィルタバンクにおいてチェス盤ひずみが発生しない条件を定式化する。更に、その条件を満足する2分割の実係数パラユニタリ QMF (quadrature mirror filter) バンクの設計法およびそのラティス構成による実現法を示す。また、有限語長の影響を考察し、有限語長の下でもチェス盤ひずみを極力抑えることが可能であることを示す。

フィルタバンクは、多くの場合、入力信号と出力信号が一致するという完全再構成条件を満たすように設計される。しかし、実際の使用では、必ずしもこの条件は満足されていない。例えば、それは、サブバンド符号化方式における量子化や、アナライザとシンセサイザを異なる語長で実現した場合、また、多重解像度

表現において最終出力以外のデータを使用した場合には信号は完全再構成しない。このとき、フィルタバンクは時不変なシステムとはならず、時変システムとして動作する。この時変性の影響によりチェス盤ひずみは、発生する。

チェス盤ひずみに関する研究は、既にいくつか試みられている [2],[3]。文献 [2] では、フィルタバンクではなくレート変換器の場合について考察し、ひずみの発生しないチェビシェフフィルタの近似法を与えている。また、文献 [3] では、完全再構成条件を満たす場合についてこのひずみを回避するための条件を紹介している。しかしながら、フィルタバンクを実現する際の有限語長の影響や非完全再構成フィルタバンクに対しては、チェス盤ひずみの問題は言及されていない。

このような背景を踏まえて、本論文では、2分割フィルタバンクに対し有限語長実現の影響や完全再構成条件を満たさない場合も含めチェス盤ひずみの発生について考察する。まず最初に、チェス盤ひずみを回避するための条件を一般的に定式化する。次に、その条件を満たす実係数のパラユニタリ QMF バンクを、回転行列を用いた要素分解法 [5],[7]~[9] に基づき設計する方法を示す。次に、導出されたチェス盤ひずみの回避条件に基づき、その有限語長の影響について考察する。最後に、具体的な設計例を示し、提案法の有効性

[†] 東京都立大学大学院工学研究科電気工学専攻, 東京都 Graduate Course of Electrical Engineering, Graduate School of Engineering, Tokyo Metropolitan University, Tokyo, 192-03 Japan

を確認する。

2. 2分割フィルタバンク

準備として、まず、2分割フィルタバンクについて説明する。次に、フィルタバンクにおいてチェス盤ひずみとそれが発生する理由を述べる。

2.1 2分割フィルタバンクの概要

2分割フィルタバンクの構成を図1に示す。ここで、 $H_k(z)$ はアナリシスフィルタ、 $F_k(z)$ はシンセシスフィルタである。下向きの矢印はダウンサンプラ、上向きの矢印はアップサンプラである。2分割フィルタバンクはアナライザにより信号の帯域を2分割し、シンセサイザにより信号の復元を行うシステムである。

図1の構成は、図2のように等価表現することができる[4],[5]。ここで、ポリフェーズフィルタ $E_{lk}(z)$, $R_{lk}(z)$ は、 $H_k(z)$, $F_k(z)$ と次式の関係にある。

$$\begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \end{bmatrix} = \mathbf{E}(z^2) \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} F_0(z) \\ F_1(z) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} z^{-1} \\ 1 \end{bmatrix}^T \mathbf{R}(z^2) \quad (2)$$

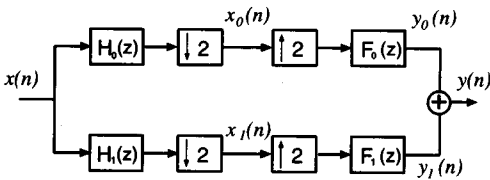


図1 2分割フィルタバンク
Fig.1 Two channel filter bank.

但し、

$$\mathbf{E}(z) = \begin{bmatrix} E_{00}(z) & E_{01}(z) \\ E_{10}(z) & E_{11}(z) \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{R}(z) = \begin{bmatrix} R_{00}(z) & R_{01}(z) \\ R_{10}(z) & R_{11}(z) \end{bmatrix} \quad (4)$$

である。 $\mathbf{E}(z)$, $\mathbf{R}(z)$ はポリフェーズ行列と呼ばれる。また、上付きの T は転置を意味する。

フィルタバンクの完全再構成条件は、 $\mathbf{E}(z)$, $\mathbf{R}(z)$ を用いて以下のように表せる。

$$\mathbf{R}(z)\mathbf{E}(z) = z^{-m_0} \mathbf{I} \quad (5)$$

但し、 \mathbf{I} は、サイズ 2×2 の単位行列、 m_0 は任意の整数である。式(5)の完全再構成条件は、図1に示す四つのフィルタが、以下のエリアジングの除去条件とオールパス条件を同時に満たすことと等価である。

エリアジングの除去条件：

$$F_0(z) = H_1(-z)$$

$$F_1(z) = -H_0(-z) \quad (6)$$

オールパス条件：

$$H_0(z)H_1(-z) - H_0(-z)H_1(z) = 2z^{-L} \quad (7)$$

但し、 L は整数である。式(5)、または式(6)と式(7)を同時に満たすフィルタバンクを完全再構成フィルタバンク、あるいは完全QMFバンクと呼ぶ。

一方、ポリフェーズ行列が以下の二つの式を同時に満たすとき、そのフィルタバンクはパラユニタリフィルタバンク[5]、あるいはパラユニタリQMFバンクと呼ばれる。

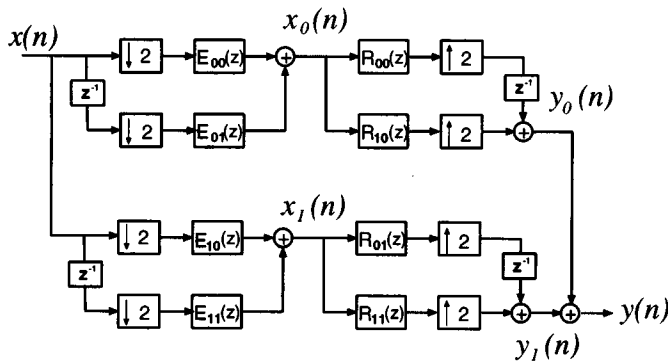


図2 ポリフェーズ構成
Fig.2 Polyphase representation.

$$E_*^T(z^{-1})E(z) = I \quad (8)$$

$$R(z) = cz^{-\lfloor K/2 \rfloor} E_*^T(z^{-1}) \quad (9)$$

ここで、 c は非零の定数であり、 K は、図 1 のフィルタの次数である。 $\lfloor x \rfloor$ は、 x を超えない最大の整数を表す。下付きの $*$ は、係数の複素共役を意味する。フィルタ係数が実数の場合は、下付きの $*$ は必要なく、直交フィルタバンクとも呼ばれる。

式 (8)、式 (9) の条件は、シンセシスフィルタとアナリシスフィルタが係数共役、時間反転の関係で与えられることと等価である。すなわち、

$$F_0(z) = cz^{-K} H_{0*}(z^{-1}) \quad (10)$$

$$F_1(z) = cz^{-K} H_{1*}(z^{-1}) \quad (11)$$

となる。式 (8) および式 (9) から、パラユニタリフィルタバンクでは、独立なフィルタは一つであり、同一チャネルのアナリシスフィルタとシンセシスフィルタは同じ振幅特性をもち、 $H_0(z)$ と $H_1(z)$ は、

$$H_1(z) = -z^K H_0(-z^{-1}) \quad (12)$$

と関係する。以上のようなパラユニタリフィルタバンクは、完全再構成フィルタバンクとなる。

2.2 ステップ応答とチェス盤ひずみ

ここでは、チェス盤ひずみが発生する理由をステップ応答を用いて説明する。

図 1 の構成を再び考える。フィルタバンクでは、アナライザにおいて二つのデシメータ、シンセサイザにおいて二つのインタポレータをもつ。デシメータ、インタポレータは共に周期的時変システムであり、時不変システムとは異なる特性をもつ。チェス盤ひずみは、インタポレータのもつ時変性が起因して発生するひずみである [1], [2]。

いま、図 2 の表現を用いて、低域側のインタポレータの入出力である $x_0(n)$ と $y_0(n)$ の関係を調べる。ポリフェーズフィルタ $R_{00}(z)$ 、 $R_{10}(z)$ のインパルス応答を $r_{00}(n)$ 、 $r_{10}(n)$ と表すと、畳み込みとアップサンブラの処理により、

$$y_0(n) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\lfloor K/2 \rfloor} r_{00}(m)x_0((n-1)/2-m) & (n : \text{odd}) \\ \sum_{m=0}^{\lfloor K/2 \rfloor} r_{10}(m)x_0(n/2-m) & (n : \text{even}) \end{cases} \quad (13)$$

となる。

次に、デシメータの入出力関係である $x(n)$ と $x_0(n)$ の関係を考える。フィルタ $H_0(z)$ とポリフェーズフィルタ $E_{00}(z)$ 、 $E_{01}(z)$ のインパルス応答を $h_0(n)$ 、 $e_{00}(n)$ 、 $e_{01}(n)$ と表すと、畳み込みとダウンサンブラの処理により、

$$x_0(n) = \sum_{m=0}^K h_0(m)x(2n-m) \quad (14)$$

$$= \sum_{l=0,1} \sum_{m=0}^{\lfloor K/2 \rfloor} e_{0l}(m)x(2n-2m-2l) \quad (15)$$

となる。

式 (13) より、インタポレータは、 n が偶数と奇数の場合で、周期 2 の異なる入出力特性をもち周期的な時変性をもつことがわかる。一方、式 (14) より、デシメータはそのような場合分けを必要としないことがわかる。

ここで、入力信号がステップ信号である場合を考える。インタポレータにおけるステップ応答は、式 (13) に $x_0(n) = u(n)$ を代入すると、

$$s_0(n) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{(n-1)/2} r_{00}(m) & (n : \text{odd}) \\ \sum_{m=0}^{n/2} r_{10}(m) & (n : \text{even}) \end{cases} \quad (16)$$

となる。式 (16) で与えられるインタポレータの出力は、 n が十分に大きいとき ($n \geq K$)、 n が偶数であるか、奇数であるかで異なる一定値をとる。この一定値をステップ応答の定常値と呼ぶことにする。

また、デシメータのステップ応答は式 (14) に $x(n) = u(n)$ を代入すると、

$$\acute{s}_0(n) = \sum_{m=0}^{2n} h_0(m) \quad (17)$$

となる。式 (17) は、 n が十分に大きいとき ($2n \geq K$)、一定値となる。

従って、フィルタバンクにおける低域側のステップ応答の定常値 s_0 は、式 (16)、式 (17) を用いて次式のように与えられる。

$$s_0 = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} h_0(m) \sum_{k=0}^{\infty} r_{00}(k) \\ = H_0(1)R_{00}(1) & n : \text{odd} \\ \sum_{m=0}^{\infty} h_0(m) \sum_{k=0}^{\infty} r_{10}(k) \\ = H_0(1)R_{10}(1) & n : \text{even} \end{cases} \quad (18)$$

ここで、 $H_0(1)$ は $H_0(e^{j\omega})|_{\omega=0}$ に相当し、フィルタ $H_0(z)$ の直流利得を表す。

高域におけるステップ応答の定常値 s_1 は、同様に次式で与えられる。

$$s_1 = \begin{cases} H_1(1)R_{01}(1) & n : \text{odd} \\ H_1(1)R_{11}(1) & n : \text{even} \end{cases} \quad (19)$$

式 (18)、式 (19) が示すとおり、低域、高域での各ステップ応答は周期 2 で異なる値となり、線形時不変システムのように一定値とはならない。ステップ応答が一定値となるためには、用いるシンセシスフィルタの各ポリフェーズフィルタの直流利得が等しいか、若しくは、周期性が問題とならないような制約を満たす信号が、シンセサイザに入力される必要がある。

完全再構成条件が満たされるもとでフィルタバンクを用いるなら、低域、高域でのこの周期性は互いに相殺される。従って、最終的な出力は一定値となり周期性はあらわれない。しかしながら、サブバンド符号化で量子化を行う場合や、完全再構成を満たさないフィルタバンクを用いた場合、また、ウェーブレット変換を用いた多重解像度解析といった各帯域の途中経過を必要とする応用などにおいては、低域、高域での周期性が互いに相殺されない。従って、周期的なひずみ（チェス盤ひずみ）が生じる。

3. チェス盤ひずみを発生しない 2 分割フィルタバンク

ここでは、一般的な 2 分割フィルタバンクに対し、チェス盤ひずみが発生しない条件を定式化する。更に、この条件がウェーブレット変換における 1 次のレギュラリティ条件と等価であることを示す。

3.1 設計条件

低域、高域での周期的なステップ応答は、シンセサイザの周期的な時変性によるものである。従って、この問題を解決するためには、シンセシスフィルタを考

慮するか、若しくは、シンセサイザに入力されるサブバンド信号が制約されている必要がある。

A. シンセシスフィルタに対する条件

前章で述べたように、シンセシスフィルタの各ポリフェーズフィルタの直流利得が等しければ一様なステップ応答が得られる。従って、低域側の応答が一定となるための条件は、

$$R_{00}(1) = R_{10}(1) \quad (20)$$

と与えられる。

同様に、高域においても以下の条件を満たせば一様なステップ応答が得られる。

$$R_{01}(1) = R_{11}(1) \quad (21)$$

しかし、式 (21) の条件を満たす高域フィルタは設計することができない。なぜならば、式 (21) で与えられる条件が、周波数 $\omega = \pi$ で利得をもたないことと等価だからである。この証明に関しては、後述のレギュラリティとの関係において示す。つまり、この条件は高域フィルタとしては矛盾する条件であり、この条件を満たす高域フィルタは存在しない。従って、高域においては、シンセサイザ側で周期性の問題を回避することはできない。

B. アナリシスフィルタに対する条件

上述の高域側に対する問題は、アナライザ側の高域フィルタ $H_1(z)$ に直流利得をもたないフィルタを用いることにより解決できる。このとき式 (19) から、シンセサイザに入力される高域のサブバンド信号 $x_1(n)$ の直流値は、常に 0 の信号となる。従って、シンセサイザでの周期性は問題とならず、高域でのステップ応答の定常値は n が偶数の場合、奇数の場合共に 0 となる。

C. 完全再構成フィルタバンク

ここで、完全再構成フィルタバンクを考える。このとき、シンセサイザの低域フィルタが決定された場合、式 (6) で示すエリアジングの除去条件により、アナライザの高域フィルタは一意に決定される。

いま、シンセサイザの低域フィルタが、式 (20) の条件を満たしているとする。その際、アナライザの高域フィルタの直流利得は、エリアジングの除去条件である式 (6) から、

$$\begin{aligned} H_1(1) &= E_{10}(1) + E_{11}(1) \\ &= -R_{00}(1) + R_{10}(1) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

となる。つまり、アナライザの高域フィルタは直流利得をもたない。従って、完全再構成フィルタバンクにおいて式 (20) を考慮すれば、低域、高域ともにステップ応答の周期性の問題を回避することができる。この特徴は、式 (6) を満たすすべてのフィルタバンクについて成立する。

D. レギュラリティ

ここでは、式 (20) の条件が連続時間のウェーブレット関数を生成する際に望まれる 1 次のレギュラリティの条件と等価であることを示す。

レギュラリティ [3] の次数は、フィルタ $F_0(z)$ が $\omega = \pi$ にいくつ零点をもつかに相当する。従って、1 次のレギュラリティの条件は、

$$F_0(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} = F_0(-1) = 0 \quad (23)$$

と表せる。この条件は、式 (2), 式 (4) を用いて以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} F_0(-1) &= -R_{00}(1) + R_{10}(1) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

式 (24) は前節で示した一定のステップ応答を与える条件と等価である。従って、1 次のレギュラリティ条件を満たすフィルタを用いることにより、チェス盤ひずみを回避できる。

E. 非完全再構成フィルタバンク

ここまでの議論から、フィルタバンクが各チャンネルでチェス盤ひずみが発生しないためには、

条件 A: アナライザの高域フィルタが直流利得をもたない。

条件 B: シンセサイザの低域フィルタが $\omega = \pi$ で利得をもたない。

の二つの条件を同時に満たさなければならないことがわかった。完全再構成フィルタバンク（厳密には式 (6) を満たすフィルタバンク）において、上述の二つの条件は等価であり、一方の条件を満たすことにより、他方の条件は自動的に満たされる。

しかし、多くの場合、フィルタバンクは有限語長などの影響により完全再構成条件を満たさない。従って、そのような場合には上述の二つの条件を独立に考慮してフィルタバンクを設計しなければならない。以下で述べる設計法および実現法では、この場合も含め、チェス盤ひずみが回避可能である。

4. パラユニタリ QMF バンクの設計と実現

ここでは、チェス盤ひずみを伴わない実係数のパラユニタリ QMF バンクの設計法およびそのラティス構成による実現法を示す。更に、有限語長演算の影響を考察し、有限語長の下でもチェス盤ひずみを極力抑えることができることを示す。

4.1 パラユニタリ QMF バンクとそのラティス構成

実係数のパラユニタリ QMF バンクは、ポリフェーズ行列の要素分解に基づき、図 3 に示すラティス構成で実現できる [5]。いま、ポリフェーズ行列 $R(z)$ を次数 $N-1$ をもつシンセサイザのポリフェーズ行列とすると、以下のように要素分解される。ここで、ポリフェーズ行列の次数とは、ポリフェーズフィルタの次数に相当する。

$$R(z) = \alpha M R_0^T \Gamma(z) \cdots R_{N-2}^T \Gamma(z) R_{N-1}^T \quad (25)$$

但し、 α は、任意の定数であり、

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\Gamma(z) = \begin{bmatrix} z^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$R_k = \begin{bmatrix} \cos \theta_k & \sin \theta_k \\ -\sin \theta_k & \cos \theta_k \end{bmatrix} \quad (28)$$

である。

図 3 の要素分解は、2 分割の実係数パラユニタリ QMF バンクに対し完備な表現である。従って、回転行列 R_k の回転角 $\theta_k, k = 0, \dots, N-1$ の選択で、あらゆる 2 分割パラユニタリ QMF バンクを設計することができる。また、このパラメータ θ_k を任意の実数に選んでも完全再構成する 2 分割のパラユニタリ QMF バンクとなる。更にこの要素分解に基づく構成を用いた設計は、制約なしの最適化問題として実行される。また、この構成は各要素の係数を有限ビットで丸めた場合にもパラユニタリ条件が保持されるという利点ももつ。

本論文では、以上のような優れた特徴をもつ上述の方法に基づきチェス盤ひずみの発生しないパラユニタリ QMF バンクを設計し、それを構成する。

4.2 チェス盤ひずみの発生しないパラユニタリ QMF バンク

前述の議論をふまえ、チェス盤ひずみを伴わない 2

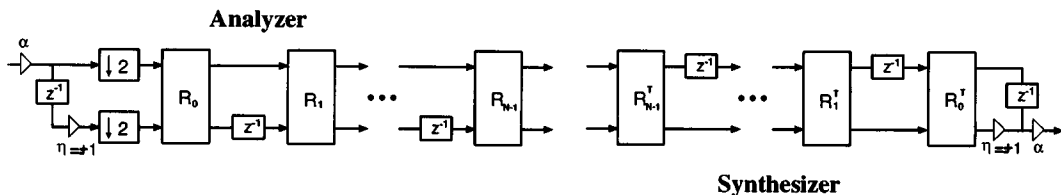


図3 QMFバンクのラティス構成
Fig.3 Lattice structure for QMF bank.

分割のパラユニタリ QMF バンクを設計するための条件を示す。

直交 QMF バンクのポリフェーズフィルタの直流利得は、式 (25) に $\omega = 0$ を代入すると、 $\mathbf{I}(z)$ が単位行列となるため次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} R_{00}(1) & R_{01}(1) \\ R_{10}(1) & R_{11}(1) \end{bmatrix} &= \alpha \mathbf{M} \mathbf{R}_0^T \mathbf{R}_1^T \cdots \mathbf{R}_{N-1}^T \\ &= \alpha \mathbf{M} \begin{bmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\Theta = \theta_0 + \theta_1 + \cdots + \theta_{N-1} \quad (30)$$

ここで、式の整理において、回転行列の積が、回転角の総和を回転角としてもつ一つの回転行列と等価であるという性質を用いている [3],[6]。従って、低域側のポリフェーズフィルタ $R_{00}(1)$, $R_{10}(1)$ の直流利得が一致するための条件は、以下ようになる。

$$\Theta = \pi/4 + k\pi \quad (31)$$

k は、任意の整数である。この条件は、例えば図 3 の構成の回転行列 \mathbf{R}_{N-1} を以下のようにおくことにより達成される。

$$\mathbf{R}_{N-1} = \pm \begin{bmatrix} \cos \theta_{N-1} & \sin \theta_{N-1} \\ -\sin \theta_{N-1} & \cos \theta_{N-1} \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\theta_{N-1} = \pi/4 - (\theta_0 + \theta_1 + \cdots + \theta_{N-2}) \quad (33)$$

ここで、式 (32) の行列に正負の符号がかかっているが、この符号はどちらに選んでも一般性は保証される。

従って、式 (8) および式 (9) のパラユニタリ条件と式 (20) の条件を満たす、チェス盤ひずみを伴わない 2 分割パラユニタリ QMF バンクは、回転行列 \mathbf{R}_{N-1} における回転角を式 (33) のように与えることで、制約なしの最適化問題として設計することができる。

ここで導かれた条件式 (33) は、前述の議論から明らかとなっており、先に研究された 1 次のレギュラリティ条

件を満たす 2 分割のパラユニタリ QMF バンクの設計条件 [3],[6] と一致する。

以上の議論は無限語長での演算を仮定している。従って、有限語長での実現を考える場合は、以下の議論が必要となる。

- アナライザ、シンセサイザを同じ語長で実現し構成中の行列が共役転置の関係を満たしているとき。パラユニタリ条件は保持されるが、チェス盤ひずみの回避条件式 (33) は満たされとは限らない。

- アナライザ、シンセサイザを異なる語長で実現した場合。チェス盤ひずみの回避条件式 (33) のみではなく完全再構成条件も保持されない。

以下では、上述のすべての場合について検討する。

4.3 有限語長を考慮した設計

4.1 で紹介した設計法は、無限語長での演算を仮定している。従って、設計時に式 (33) の条件を満たしていたとしても、実現の際に構成中の回転行列を有限ビットで丸めた場合には、式 (33) の条件は保証されない。

ここでは、まず、アナライザとシンセサイザを同じ語長で実現した場合を考える。ラティス構成は、アナライザとシンセサイザを同じ語長で丸めた場合は、パラユニタリ条件が保持され完全再構成するという利点ももつ。従って、アナライザまたはシンセサイザについて前述の条件 A, B のどちらか一方を考慮して実現すればチェス盤ひずみを回避することができる。以下では、先のラティス構成に基づくことにより、有限語長の影響によるチェス盤ひずみの発生を抑えられることを示す。

ここで、回転行列 \mathbf{R}_i を有限ビットで丸めたことによって生じる回転角のずれ $\Delta\theta_i$ を考える。回転角のずれ $\Delta\theta_i$ は次式のように与えられる。

$$\Delta\theta_i = \theta_i - \tan^{-1}(b/a) \quad (34)$$

$$\text{round}(\mathbf{R}_i) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad (35)$$

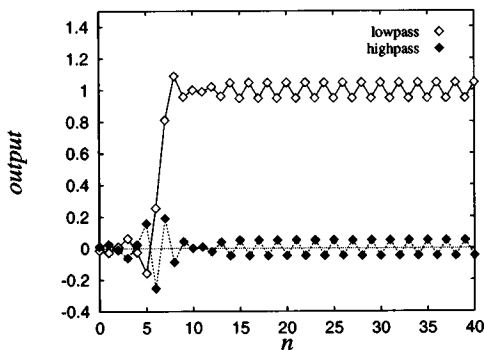
$\text{round}(\mathbf{R}_i)$ は、 \mathbf{R}_i を有限ビットで丸めた行列である。

従って、例えば各回転行列の回転角のずれを構成中の最終段の回転行列 \mathbf{R}_{N-1} に補正角として加えた行列 \mathbf{R}'_{N-1} を行列 \mathbf{R}_{N-1} の代りに用いることにより、有限ビットに丸めた場合においても、式 (33) を近似的に満足させることができる。ここで、 \mathbf{R}'_{N-1} は次式で与えられる。

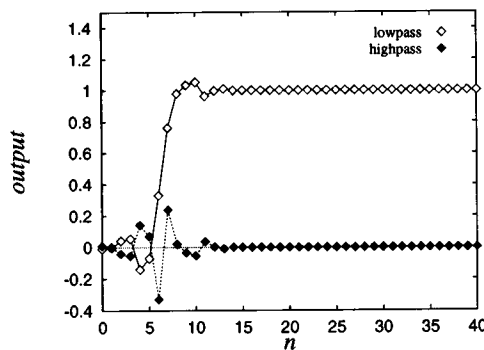
$$\mathbf{R}'_{N-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{N-1} + \Delta\theta) & \sin(\theta_{N-1} + \Delta\theta) \\ -\sin(\theta_{N-1} + \Delta\theta) & \cos(\theta_{N-1} + \Delta\theta) \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\Delta\theta = \sum_{i=0}^{N-2} \Delta\theta_i \quad (37)$$

以上の議論は、補正角を加える行列は \mathbf{R}_{N-1} に限られたものではなく、任意の行列に拡張することができる。



(a) Step response of the conventional QMF bank



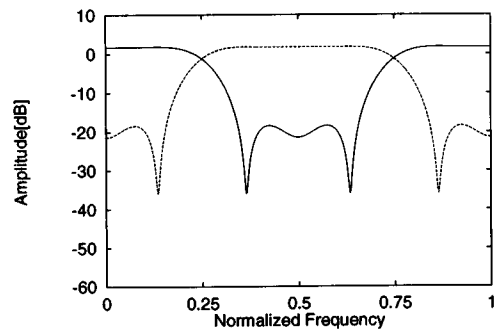
(b) Step response of the QMF bank which satisfies Eq. (33)

図4 設計例1 (ステップ応答)
Fig.4 Design example 1 (Step response).

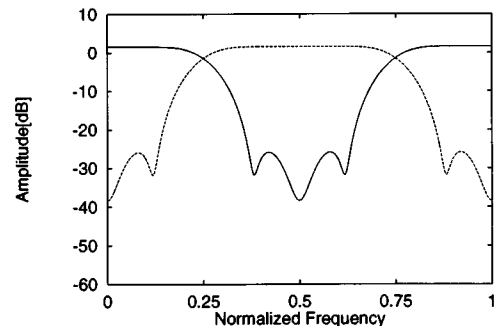
4.4 非完全再構成フィルタバンク

ここでは、アナライザとシンセサイザを異なる語長で実現する場合を考える。この条件は、データ通信の応用において受信側でハードウェア量を低減する場合や、受信側と送信側の実現条件が異なる場合に生じる。この場合、式 (33) の条件が満たされないのに加え、完全再構成条件も満たされない。従って、チェス盤ひずみを回避するためには、前述の条件 A、条件 B を独立して考慮しなければならない。このような場合においても、ラティス構成を用いることでチェス盤ひずみを回避することができる。具体的には、アナライザ、シンセサイザのそれぞれに対し、独立して先の補正法を用いることで条件 A、条件 B を近似的に満足させることが可能となる。

ここで、以上のような有限語長実現に対する補正は、先に示したラティス構成を用いることにより可能となることに注意してほしい。ラティス構成のもつこのような特徴の指摘は、本論文で初めて行った。このよう

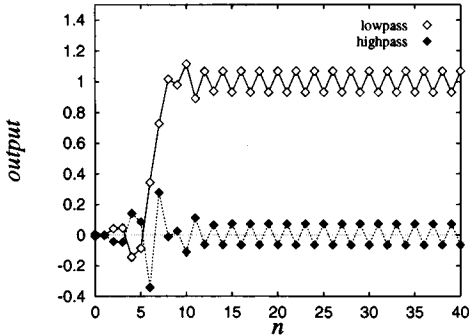


(a) The implementation of the QMF bank with finite word length

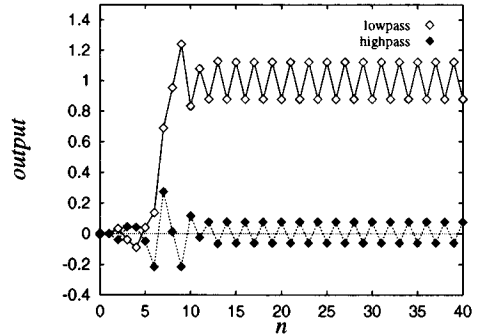


(b) The proposed implementation of the QMF bank with finite word length

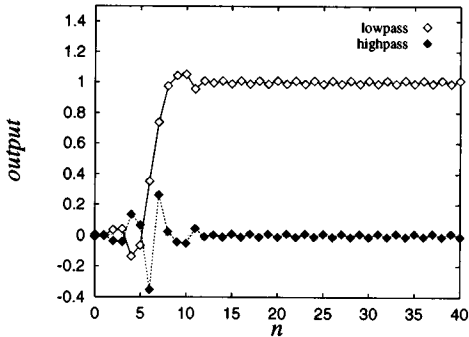
図5 設計例2 (振幅特性)
Fig.5 Design example 2 (Magnitude response).



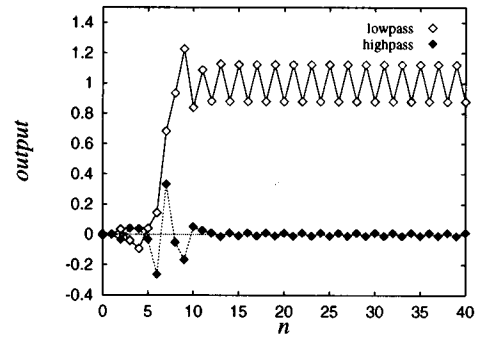
(a) Step response of the QMF bank shown in Fig.5(a)



(a) Step response of the no perfect reconstruction filter bank



(b) Step response of the QMF bank shown in Fig.5(b)



(b) Step response of the no perfect reconstruction filter bank

図6 設計例2 (ステップ応答)
Fig.6 Design example 2 (Step response).

にラティス構成では、有限語長による実現、また、完全再構成条件が満たされないような場合でもチェス盤ひずみの発生を極力抑えることができることがわかる。以上のようなラティス構成の特徴は、3.の定式化による結論に基づいている。

5. 設計例

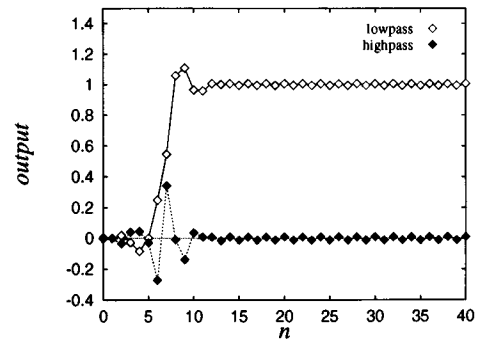
ここでは、具体的な設計例と処理例を示し、本提案法の有効性を確認する。

5.1 設計例

設計の際の評価関数は、目的に応じ選択される[5],[7]~[9]。本論文では、最適化の際の評価関数として、阻止域における振幅の最大値を評価関数とした場合について設計例を示す。設計例では、更に有限語長の演算および、非完全再構成フィルタバンクについて述べる。

設計例1 (阻止域減衰量の最大値を最小)

- フィルタ ($F_0(z)$, $H_0(z)$) のタップ数: 8
- フィルタの通過域端角周波数を $\pi/2$, 阻止域端



(c) Step response of the no perfect reconstruction filter bank

図7 設計例3 (ステップ応答)
Fig.7 Design example 3 (Step response).

周波数を $4\pi/5$

とし、以下で示す阻止域減衰量の最大値 J を評価関数として、 J が最小となるように設計。

$$J = \max_{k \in N_s} \{|F_{0,N}(k)|\} \tag{38}$$

但し、 $|F_{0,N}(k)|$ はフィルタ $F_0(z)$ の N 点 DFT 係数の絶対値、 N_s は DFT 係数において、阻止域に相当する点の集合である。

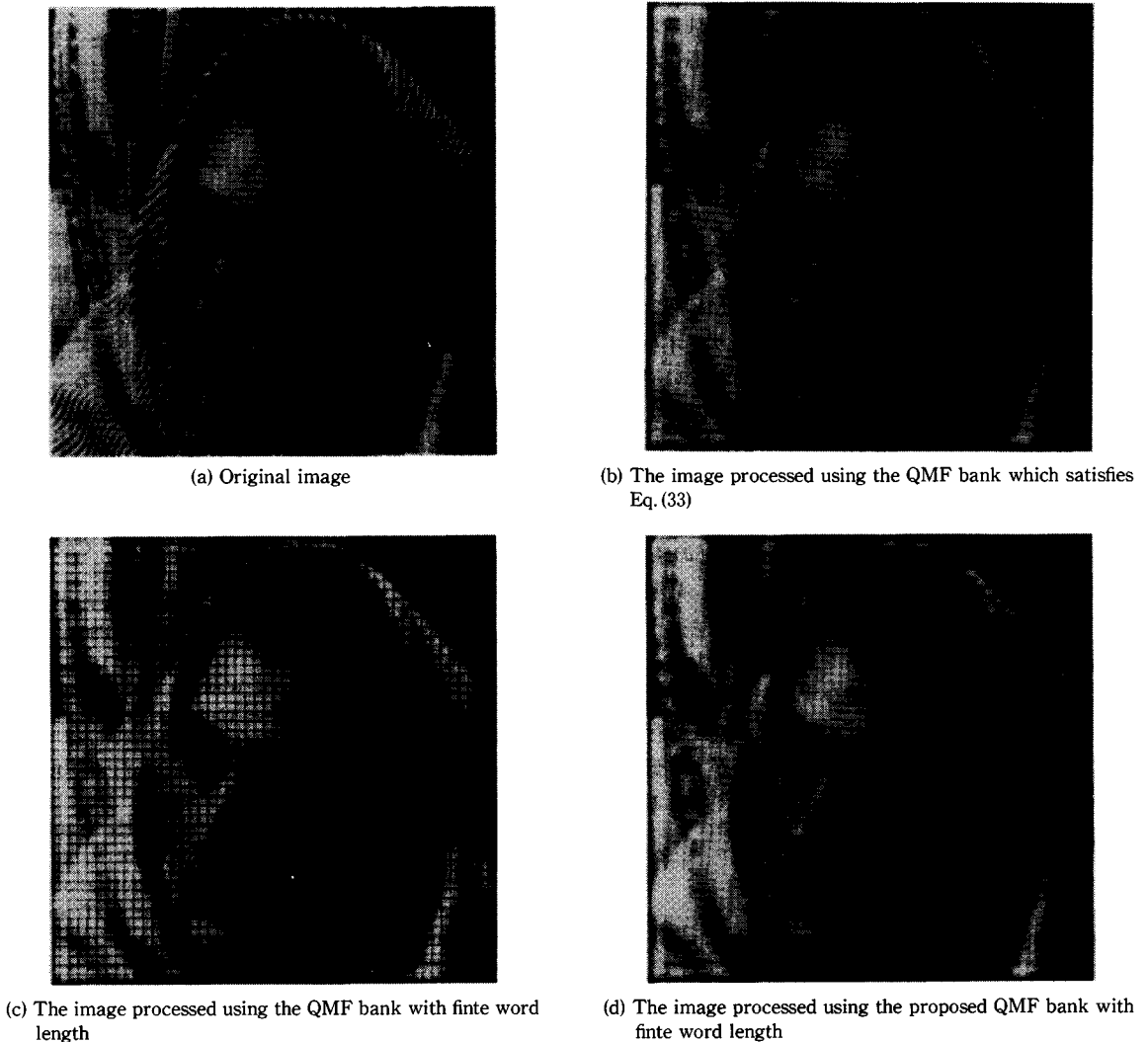


図8 処理例
Fig.8 Example of processed image.

以上の設計条件のもとで得られたフィルタに対して、入力 $x(n)$ としてステップ信号を加えた場合のフィルタバンクの各帯域における出力 $y_0(n)$, $y_1(n)$ を図4に示す。(a)は、式(33)を満たしていない場合、(b)は、式(33)を満たしているチェス盤ひずみを考慮した場合である。

図4より、 n が十分大きい場合のステップ応答が、(a)の式(33)を満たしていないフィルタを用いた場合は周期2で激しく変動しているのに対し、(b)の式(33)を満たしているフィルタを用いた場合は、一定のステップ応答が得られることが確認できる。

設計例2 (有限語長での実現)

- 設計例1で式(33)を満たすように設計したフィルタの回転行列 R_k を固定小数点4bitで表現

以上の条件によって得られたフィルタの振幅特性を図5に示す。(a)は、無限語長を仮定している設計例1のフィルタを有限語長で単純に丸め実現した場合、(b)は、補正角を加えて有限語長に丸める提案法を用いた場合である。また、図1の構成でそれらのフィルタを用い、入力 $x(n)$ をステップ信号とした場合の、各帯域における出力 $y_0(n)$, $y_1(n)$ を図6に示す。

図6より、無限語長のもとでチェス盤ひずみが発生

しないフィルタであっても、有限語長で単純に丸めた場合には (a) で示されるように、ステップ応答が周期 2 で激しく変動しているのが確認できる。これに対し、今回示した補正を行った場合は、ステップ応答の変動が小さく抑えられていることが確認できる。

設計例 3 (非完全再構成フィルタバンク)

ここでは、非完全再構成フィルタバンクについて設計例を示す。条件は、設計例 1 で設計したチェス盤ひずみを伴わない 2 分割のパラユニタリ QMF バンクのアナライザフィルタを 4 bit、シンセサイザフィルタを 3 bit で実現し、完全再構成条件が満たされない場合を考える。図 7 は、(a) 補正などを行わずそのまま用いた場合、(b) アナライザフィルタを適切に補正した場合、(c) アナライザフィルタに加えシンセサイザフィルタも適切に補正した場合のステップ応答を示す。図 7 より、補正を行わずそのまま用いた場合、前述の条件 A、条件 B とともに満たされていないため低域、高域共にチェス盤ひずみが発生している。また、アナライザを適切に補正した場合は条件 B を近似的に満たすことができるので高域ではチェス盤ひずみを小さく抑えられている。また、シンセサイザに対しても補正を行うことにより、条件 A を近似的に満たすことができ低域においてもチェス盤ひずみの発生を極力抑えられることが確認できる。

5.2 処理例

実際の処理例として、2 段のトリプル構成をとったフィルタバンクを用いて画像の帯域分割を行う。この際、低域の情報のみを用いて合成を行う。使用するフィルタは、前述の設計例で得られたフィルタとする。2 次元の処理は、1 次元の分離処理で実現している。原画像としては画素数 192×192 の標準画像 Barbara を使用している。

図 8 の画像は、(a) 原画像、(b) は有限語長で回転行列を丸める前のフィルタを用いた場合、(c) は単純に有限語長で丸めた場合、(d) は提案法を用いて有限語長で実現した場合のフィルタを用いた画像である。

図 8 の結果より、無限語長を仮定するならば、提案された設計法によりチェス盤ひずみの発生を完全に抑えられることが確認できる。しかし、その結果を単純に有限語長で丸めた (c) の場合においてチェス盤ひずみが発生してしまうことがわかる。一方で、本提案法を用いた (d) においては、このチェス盤ひずみが改善されていることがわかる。

6. むすび

本論文では、2 分割フィルタバンクに対し有限語長実現の影響や完全再構成条件を満たさない場合も含めチェス盤ひずみの考察を行い、チェス盤ひずみを回避するための条件を一般的に定式化した。また、その条件を満たすパラユニタリ QMF バンクの設計法およびそのラティス構成による実現法を示した。更に、有限語長で実現する際に、このラティス構成を用いることにより回転行列に補正角を加えるという形でチェス盤ひずみの発生を極力抑えることが可能であることを示した。最後に、実際の設計例と処理例を示し、提案法の有効性を確認した。

文 献

- [1] 原田康裕, 村松正吾, 貴家仁志, “チェス盤ひずみを伴わない 2 分割 QMF バンクについて,” 信学技報, CAS96-52, Sept. 1996.
- [2] 加藤正輝, 吉田俊之, 西原明法, “時間応答を考慮したマルチレートフィルタの設計,” 信学技報, DSP96-24, June 1996.
- [3] G. Strang and T. Nguyen, *Wavelets and Filter Banks*, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, 1996.
- [4] 貴家仁志, *マルチレート信号処理*, 昭晃堂, 1995.
- [5] P.P. Vaidyanathan, *Multirate Systems and Filter Banks*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1993.
- [6] M. Vetterli and J. Kovačević, *Wavelet and Subband Coding*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1995.
- [7] S. Muramatsu and H. Kiya, “A new factorization technique for the generalized linear-phase LOT and its fast implementation,” *IEICE Trans.*, vol.E79-A, no.8, pp.1173–1179, Aug. 1996.
- [8] R.L. Queiroz, T.Q. de, Nguyen, and, K.R. Rao, “Generalized linear-phase lapped orthogonal transforms,” *Proc. IEEE ISCAS'94*, London, 2, pp.277–280, May 1994.
- [9] 原田康裕, 村松正吾, 貴家仁志, “改良 GenLOT を用いた直線位相正規直交 M 帯域 DTWT の評価,” 信学'96 春大, SA-4-5, March 1996.
- [10] A.K. Soman and P.P. Vaidyanathan, “Coding gain in paraunitary analysis/synthesis systems,” *IEEE Trans. SP*, vol.41, no.5, pp.1824–1835, May 1993.
- [11] R. Fletcher, *Practical Methods of Optimization*, vol.1, *Unconstrained Optimization*, John Wiley and Sons, New York, 1980.

(平成 8 年 12 月 2 日受付, 9 年 4 月 21 日再受付)



原田 康裕 (学生員)

平8都立大・工・電子・情報卒。現在、同大大学院修士課程在学中。マルチレート信号処理に関する研究に従事。



村松 正吾 (正員)

平5都立大・工・電気卒。平7同大大学院修士課程了。平8同大大学院博士課程中退。現在、同大大学院・工学研究科・電気工学専攻助手。マルチレート信号処理、多次元信号処理に関する研究に従事。IEEE会員。



貴家 仁志 (正員)

昭55長岡技科大・工・電気電子システム卒。昭57同大大学院修士課程了。同年都立大・工・電気助手。現在、同大大学院・工学研究科・電気工学専攻助教授。平7年10月～平8年3月シドニー大(オーストラリア)客員研究員。工博。マルチレート信号処理、適応信号処理および画像処理に関する研究に従事。著書「高速フーリエ変換とその応用」、「デジタル信号処理」、「マルチレート信号処理」(昭晃堂)、「よくわかるデジタル画像処理」(CQ出版)。電子画像学会、映像情報メディア学会、IEEE各会員。