

学 阿 部 昇 栄 (新 潟 大)
正 原 利 昭 (新 潟 大)

学 大 林 直 人 (新 潟 大)
正 高 野 英 資 (新 潟 大)

1 緒 言

環状孔を有する剛体床の上に置かれた無限弾性厚板の表面を半無限剛体パンチでねじる問題を三次元弾性論に基づいて解析した。解析にあたっては、孔部における厚板下面変位をフーリエ級数で表わし、この問題を無限連立一次方程式を解く問題に帰着させる方法を用いた。数値計算を行い、孔部近傍の応力状態や孔が及ぼす応力状態への影響等を明らかにした。

2 応力関数と解析方法

本研究では、円柱座標 (r, θ, z) における弾性基礎方程式の解である Boussinesq の調和応力関数 $\lambda_3(r, z)$ を用いる。 λ_3 による変位と応力はつぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} 2Gv_\theta &= -\partial\lambda_3/\partial r, u_r = w_z = 0 \\ \tau_{\theta z} &= -\partial^2\lambda_3/(2\partial r\partial z), \tau_{r\theta} = \partial^2\lambda_3/(2\partial z^2) + \partial\lambda_3/(r\partial r) \\ \sigma_r &= \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{rz} = 0 \end{aligned} \right\} \text{---(1)}$$

ここで、 G は横弾性係数である。

いま、 λ_3 を

$$\lambda_3 = G\omega_0 z(2z^2 - 3r^2)/(3h) \text{---(2)}$$

とおけば、式(1)より

$$v_\theta = \omega_0 r z/h, \tau_{\theta z} = G\omega_0 r/h, \tau_{r\theta} = 0 \text{---(3)}$$

となり、 z 軸まわりに $(v_\theta)_{z=h} = \omega_0 r$ のねじり変位を生ずる応力状態が得られる。図1に示す様な内半径 r_i 、外半径 r_o の環状孔を有する剛体床に密着して置かれた厚さ h の無限弾性厚板上面を剛体パンチで微小角度 ω_0 だけねじる場合の応力状態は式(3)の結果に次の境界条件

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad (v_\theta)_{z=0} &= 0 \quad (0 \leq r \leq r_i, r_o \leq r) \\ \text{(ii)} \quad (v_\theta)_{z=h} &= 0 \quad (0 \leq r \leq \infty) \\ \text{(iii)} \quad (\tau_{\theta z})_{z=0} &= -G\omega_0 r/h \quad (r_i < r < r_o) \\ \text{(iv)} \quad &\text{無限遠方で全ての応力は消失。} \end{aligned} \right\} \text{---(4)}$$

を満足する応力状態を求めて重ね合わせればよい。そこで、式(4)を満たす応力状態を求めるために λ_3 を次のように選ぶ。

$$\lambda_3 = \int_0^\infty [\cosh\lambda z - \sinh\lambda z \cdot \coth\lambda h] A(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \text{---(5)}$$

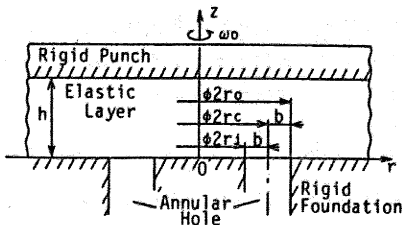


図1 ねじりを受ける有孔剛体床上的厚板

ここで、 $J_n(\lambda r)$ は n 次の第一種ベッセル関数である。式(5)と(1)による変位と応力は既に条件(ii)と(iv)を満足しており、残りの条件(i)と(iii)を適用すれば次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} 2G(v_\theta)_{z=0} &= \int_0^\infty \lambda A(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda = 0 \quad (0 \leq r \leq r_i, r_o \leq r) \\ (\tau_{\theta z})_{z=0} &= -(1/2) \int_0^\infty \lambda^2 A(\lambda) \coth\lambda h J_1(\lambda r) d\lambda \\ &= -G\omega_0 r/h \quad (r_i < r < r_o) \end{aligned} \right\} \text{---(6)}$$

本問題は式(6)の連立積分方程式の解 $A(\lambda)$ を求める問題になる。しかしながら、式(6)を直接解いて精度良く $A(\lambda)$ を決定することは極めて煩雑になるようであり、ここでは厚板下面の $(v_\theta)_{z=0}$ を級数表示する方法を用いる。

$$\left. \begin{aligned} (v_\theta)_{z=0} &\text{は孔の両端}(r=r_i, r=r_o)\text{で零、} r_i \leq r \leq r_o \text{で有限かつ連続であることおよび} \\ 2rc &= r_o + r_i, 2b = r_o - r_i \\ r &= (r_c^2 + b^2 - 2r_c b \cos\phi)^{1/2} \quad (0 \leq \phi \leq \pi) \end{aligned} \right\} \text{---(7)}$$

によって変数変換を行えば変域 $r_i \leq r \leq r_o$ は変域 $0 \leq \phi \leq \pi$ ($r=r_i$ で $\phi=0$ 、 $r=r_o$ で $\phi=\pi$) に対応することを考慮して、 $(v_\theta)_{z=0}$ を次のような未知係数 a_n' ($n=0, 1, \dots$) を含むフーリエ級数で表すことができる。

$$(v_\theta)_{z=0} = -r \sum_{n=0}^\infty a_n' \sin(n+1)\phi / (G\pi r c b) \quad (r_i \leq r \leq r_o) \text{---(8)}$$

いま、 $Z_n(\lambda)$ と $F_n(\lambda)$ を

$$\left. \begin{aligned} Z_n(\lambda) &= \partial(J_n(\lambda r_c) J_n(\lambda b)) / \partial \lambda \\ F_n(\lambda) &= Z_n(\lambda) - Z_{n+2}(\lambda) \end{aligned} \right\} \text{---(9)}$$

によって定義し、次の積分公式⁽¹⁾

$$\int_0^\infty \lambda F_n(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda = \begin{cases} -2rs \sin(n+1)\phi / (\pi r c b) & (r_i \leq r \leq r_o) \\ 0 & (0 \leq r \leq r_i, r_o \leq r) \end{cases} \text{---(10)}$$

を考慮するとともに式(8)の第一式と式(8)によりハンケル逆変換すれば、次式を得る。

$$A(\lambda) = \sum_{n=0}^\infty a_n' F_n(\lambda) \text{---(11)}$$

式(11)で与えられる $A(\lambda)$ は任意の a_n' に対しての条件を満たしている。そこで、係数 a_n' を決定するために式(11)を式(6)の第二式に代入すれば次式を得る。

$$\sum_{n=0}^\infty a_n' \int_0^\infty \lambda^2 F_n(\lambda) \coth\lambda h J_1(\lambda r) d\lambda = 2G\omega_0 r/h \quad (r_i < r < r_o) \text{---(12)}$$

式(12)は $r_i < r < r_o$ で常に成立しなければならず、ゲーゲンbauerの加法定理⁽²⁾より得られる次の結果

$$-r J_1(\lambda r) = Z_0(\lambda) + 2 \sum_{m=1}^\infty Z_m(\lambda) \cos m\phi \quad (r_i \leq r \leq r_o) \text{---(13)}$$

を式(12)に代入し、両辺の ϕ に関する係数を等置し

$$\sum_{n=0}^\infty a_n' \int_0^\infty \lambda^2 F_n(\lambda) Z_m(\lambda) \coth\lambda h d\lambda = \delta_{0m} + k \delta_{1m} \quad (m=0, 1, \dots) \text{---(14)}$$

を得る。ここで、 σ_{1j} はクロネッカーデルタであり、
 $k=-rcb/(rc^2+b^2)$, $a_n=-a_n'h/(2G(rc^2+b^2)\omega_0)$ ---(15)
 である。式(14)を解くに当たって第 m 番目から第 $m+2$ 番
 目を順次差し引けば

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \lambda^2 \coth \lambda h F_m(\lambda) F_n(\lambda) d\lambda \\ = \delta_{0m} + k \delta_{1m} \quad (m=0,1,\dots) \end{aligned} \right\} \text{-----(16)}$$

となって数値計算上有利になる。従って、本問題は式
 (16)の無限連立一次方程式を解く問題になる。また、
 式(11)と(15)より $t=-(rc^2+b^2)/h$ とおけば $A(\lambda)$ は

$$A(\lambda) = 2G\omega_0 t \sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(\lambda) \text{-----(17)}$$

となり、変位と応力は式(3)の結果を重ね合わせて次の
 ように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} v_{\theta}/(\omega_0 r_0) &= rz/(r_0 h) + (t/r_0) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} [\cosh \lambda z - \sinh \lambda z] \\ &\quad \times \coth \lambda h J_1(\lambda r) J_1(\lambda r) d\lambda \\ \tau_{\theta z}/(G\omega_0) &= r/h + t \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} [\sinh \lambda z - \cosh \lambda z \cdot \coth \lambda h] \\ &\quad \times \lambda^2 F_n(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda \\ \tau_{r\theta}/(G\omega_0) &= t \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} [\sinh \lambda z \cdot \coth \lambda h - \cosh \lambda z] \\ &\quad \times \lambda^2 F_n(\lambda) J_2(\lambda r) d\lambda \end{aligned} \right\} \text{(18)}$$

3 厚板下面の変位と応力

厚板下面 ($z=0$) における変位と応力は、 λ が十分に
 大きい場合 $\coth \lambda h \rightarrow 1$ であることおよび

$$\left. \begin{aligned} \lambda^2 F_n(\lambda) &= 2(n+1)(rcb)^{-3/2} \\ &\quad \times \{(-1)^n r_0^2 \sin \lambda r_0 - r_1^2 \cos \lambda r_1\} / \pi \end{aligned} \right\} \text{-----(19)}$$

であることを考慮し、 $(\tau_{\theta z})_{z=0}$ について示せば次の様
 に表示できる。

$$\begin{aligned} (\tau_{\theta z})_{z=0}/(G\omega_0) &= r/h - t \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} (\coth \lambda h - 1) \lambda^2 F_n(\lambda) \\ &\quad \times J_1(\lambda r) d\lambda - t \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} [\lambda^2 F_n(\lambda) - 2(n+1)(rcb)^{-3/2} \\ &\quad \times \{(-1)^n r_0^2 \sin \lambda r_0 - r_1^2 \cos \lambda r_1\} / \pi] J_1(\lambda r) d\lambda \\ &\quad - 2tr_0^3 H(r-r_0) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) a_n / (\pi(rcb)^{3/2} r/\sqrt{r^2-r_0^2}) \\ &\quad + 2tr_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n (H(r-r_1)/r - (r_1 - \sqrt{r_1^2-r^2}) \\ &\quad \times H(r_1-r)/(\sqrt{r_1^2-r^2})) / (\pi(rcb)^{3/2}) \end{aligned} \text{-----(20)}$$

ここで、 $H(x)$ はヘビサイドのステップ関数である。式
 (20)より $(\tau_{\theta z})_{z=0}$ は環状孔の内外径線において特異性
 を有する。そこで、き裂問題の応力拡大係数と同様な
 考え方を導入し、特異性の強さを表す係数を

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\theta 1} &= \lim_{r \rightarrow r_1-0} \sqrt{2(r_1-r)} (\tau_{\theta z})_{z=0} \\ \alpha_{\theta 0} &= \lim_{r \rightarrow r_0+0} \sqrt{2(r-r_0)} (\tau_{\theta z})_{z=0} \end{aligned} \right\} \text{-----(21)}$$

によって定義すれば、式(20)と(21)より

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\theta 1}/(G\omega_0 \sqrt{r_0}) &= -2tr_1 (r_1/r_0)^{1/2} (rcb)^{-3/2} \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n / \pi \\ \alpha_{\theta 0}/(G\omega_0 \sqrt{r_0}) &= -2tr_0 (rcb)^{-3/2} \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) a_n / \pi \end{aligned} \right\} \text{-----(22)}$$

となる。

4 数値結果

図2は $\tau_{\theta z}$ の分布を示した図であり、一点鎖線と破
 線はそれぞれの孔の無い場合の結果と孔の両縁を示す。

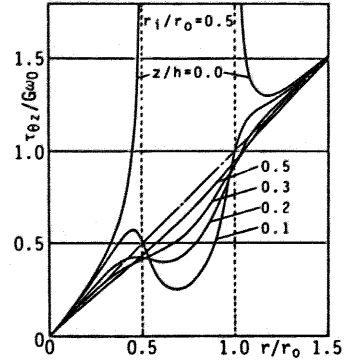


図2 $\tau_{\theta z}$ の分布

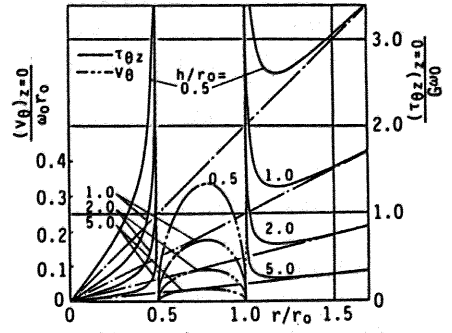


図3 $(v_{\theta})_{z=0}$, $(\tau_{\theta z})_{z=0}$ の分布

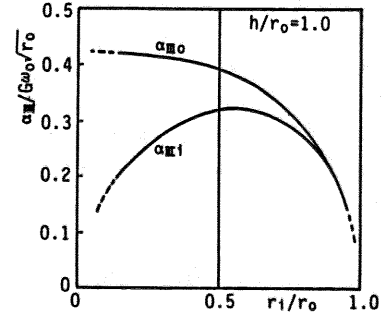


図4 α_{θ} と r_1/r_0 の関係

図3は板厚を変化させた場合の $(v_{\theta})_{z=0}$ と $(\tau_{\theta z})_{z=0}$
 を示した図である。板厚の増加とともにこれらに及ぼ
 す孔の影響は急激に小さくなり、部分的になる。 r_1/r_0
 ≥ 1.5 で孔の影響はほぼ消失することがわかる。

図4は、板厚を一定にした場合、式(21)によって定
 義された係数 α_{θ} が孔の内外径比によってどのように
 変化するかを示した図である。 $\alpha_{\theta 0} > \alpha_{\theta 1}$ であるが、孔
 の幅が小さくなる程両者は漸近し、 $r_1/r_0 \approx 0.8$ でほぼ
 一致する。

文献

- (1) Erdelyi, A., Tables of Integral Transforms (1965), McGraw-Hill.
- (2) 森口、他2名、数学公式(昭38)、岩波書店。