

# Wavelet 基底を用いた境界要素解析の効率化のための wavelet 重み付き Gauss 積分公式

Wavelet-weighted Gauss quadrature formula  
for reduction of computational work in wavelet BEM

紅露一寛\*・阿部和久\*\*・平林秀之\*\*\*

Kazuhiro KORO, Kazuhisa ABE and Hideyuki HIRABAYASHI

\*学生員 修士(工学) 新潟大学大学院 自然科学研究科環境管理科学専攻(〒950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050 番地)

\*\*正会員 工博 新潟大学助教授 工学部建設学科(〒950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050 番地)

\*\*\*非会員 新潟大学学生 工学部建設学科(研究当時)

A wavelet-weighted Gauss quadrature formula is developed to reduce computational work in wavelet BEM. The non-orthogonal wavelet constructed by the authors is used as the basis. This wavelet is defined as a *spline*, which requires us to divide an interval into several subintervals in calculation of integrals corresponding to the basis. Besides, the number of the subintervals increases in proportion to the order of vanishing moments. The computational work for generating matrices thus is expensive, in particular, in application of numerical integration. The present formula enables us to carry out numerical integrations without division of the interval, since the wavelet is also employed as a weighting function of the formula. The number of integration points is determined *a priori* based on estimation of the integration error and a prescribed accuracy. In wavelet BEM, the error tolerance can be given by a threshold for matrix compression. Through numerical experiments, availability of the present method is verified.

**Key Words :** *wavelet BEM, non-orthogonal spline wavelet, weighted Gauss quadrature formula, numerical integration*

## 1. はじめに

Wavelet 基底を用いた境界要素法 (wavelet BEM) は、パネルクラスタリング法<sup>1)</sup>・高速多重極展開法<sup>2)</sup>と並ぶ境界要素解析の高速解法の一つとして、近年その実用化に向けた研究が進められている。Wavelet BEM の最大の特徴は、wavelet 基底のゼロモーメント性 (所定次数以下の多項式との直交性) によって積分方程式の核関数の距離減衰性を高めることにある。Wavelet 基底の適用により、遠方のソース点からの影響は通常用いられる基底を適用した場合に比べて小さなものとなる。その結果、微小な影響係数を切り捨てることにより、精度を損なうことなくスパースな係数行列を有する境界要素方程式を誘導することができる。

Wavelet BEM に関する既往の研究の大半において、係数行列のスパース化による使用メモリの削減と連立方程式の求解計算の高速化を中心にその有効性が論じられている<sup>3)4)5)6)7)</sup>。通常用いられる基底関数の下では密な係数行列を取り扱わなければならないことを鑑みると、この二点が達成されれば wavelet 基底を適用することの工学的な価値は十分見出すことができるが、計算効率は使用メモリと解析全体の計算時間の両面から総合的に議論する必要がある。特に計算時間の削減効果については、求解計算に関する検討だけでは不十分であり、係数行列の作成に要する計算量の影響も考慮しなければならない。

解析時の計算量のうち、連立方程式の求解に関するものが反復ソルバの適用により大幅に短縮されること

は前述の通りである。その結果、wavelet 基底を適用した場合には、解析全体の処理時間の大半が係数行列の作成に充てられることとなる。現在、境界要素解析において用いられる wavelet 基底<sup>7)8)9)10)</sup>は、一次元・二次元の基底を問わずスプラインに代表される区分多項式で与えられるものがほとんどである。さらに、wavelet BEM においては係数成分の距離減衰性を高める目的で Galerkin 法によって離散化される。そのため、解析の際には区分多項式からなる wavelet 基底を含む二重積分を評価することで係数行列を作成しなければならない。この境界積分は、基底を構成する多項式毎に細分割された区間上で実行しなければならない、係数行列成分の切り捨てをアプリオリに実行すること<sup>11)12)</sup>を前提としても多大な計算量を必要とする。特に数値積分によって係数計算を処理する場合には、より一層深刻となる。しかしながら、現在のところこの問題に対する具体的な解決策は、Schwab ら<sup>13)</sup>によって係数計算を並列処理する方法が示されているに過ぎない。

そこで本研究では、数値積分による境界積分の計算量を削減するために、wavelet 基底を重み関数とした Gauss 積分公式を構成し、その境界要素解析への適用を試みる。Wavelet 基底には、著者らが構成した非直交 wavelet<sup>6)</sup>を用いる。非直交 wavelet はスプラインで与えられるため、既存の数値積分法の下では前述のように積分区間を細分割して境界積分を実行する必要がある。しかしながら、基底関数を Gauss 公式の重み関数とした積分公式を新たに構成することで、積分実行時

に基底関数の評価が不要となり、基底のサポートを単一の積分区間として取り扱うことが可能となる。なお、数値積分の計算量を低減するために特別な重み関数を用いた積分公式を適用する方法は、主に対数特異性を有する積分の計算に対して用いられてきたが<sup>14)15)16)</sup>、近年3次元 Galerkin 境界要素法における正則な二重積分の計算量を削減する目的で、形状関数を重みとした積分公式を適用する試みが Hackbusch ら<sup>17)</sup>によってなされている。

数値積分は、所定の積分点数の下で実行される。境界要素解析を行う際には、積分点数の不足に伴う精度低下と過剰な積分点数の付与に伴う計算量の増加を回避するため、各々の係数を評価する度に適切な積分点数を与えねばならない。本研究では、文献<sup>18)19)</sup>と同様の観点に立ち、積分誤差を離散化誤差に見合う程度まで許容することにより、各係数単位で最適な積分点数を決定する。なお、本手法では数値積分の許容精度と積分誤差の事前評価値から積分点数を与える。積分誤差の評価方法としては、被積分関数の Taylor 展開を用いる方法<sup>20)</sup>と積分変数を複素変数に変換し誤差の上界を与える方法<sup>21)</sup>の2つの方法が考えられるが、本手法において重み関数として wavelet 基底が用いられることを考慮すると、後者の適用は困難である。そのため、以下においては文献<sup>20)</sup>に準ずる方法を用いて積分誤差を評価する。一方、wavelet BEM においては、積分誤差を係数の切り捨て誤差と同様に取り扱うことができる。そのため、数値積分誤差の許容値は、著者らが提案した手法で定められた最適な切り捨て基準値<sup>11)</sup>に基づき与えることができる。

以下においては、非直交 wavelet とその境界要素解析への適用方法について示した後、wavelet 基底を重み関数とした Gauss 積分公式の構成方法と積分誤差の事前評価に基づく積分点数の決定方法について詳細に論じる。なお、係数計算時の処理時間の短縮効果に関する本手法の有効性については、数値解析例を通して検討する。

## 2. 非直交 wavelet を用いた境界要素解析

本論文では、2次元ポテンシャル問題に対して wavelet BEM を適用する場合を例に考える。直接法により定式化して、次の境界積分方程式を得る。

$$c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})u(\mathbf{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})q(\mathbf{y}) d\Gamma_y = 0, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma). \quad (1)$$

ここで、 $u$ 、 $q$  は境界  $\Gamma$  上のポテンシャル、フラックスであり、 $u^*$ 、 $q^*$  は基本解である。また、 $c$  は点  $\mathbf{x}$  において境界のなす角の大きさに依存する定数である。

式(1)を離散化するために、 $u$  と  $q$  の近似関数  $\tilde{u}$ 、 $\tilde{q}$  を wavelet を基底に用いて構成する。Wavelet 基底は scaling 関数  $\phi$  と wavelet  $\psi$  の2種類の関数からなる。ここで、 $\phi$  と  $\psi$  のサポートがともに  $[0, 1]$  においてコンパクトであると仮定すると、 $\phi$  と  $\psi$  は次式で与えられる階層構造を有する増大列  $\{V_k\}$  とその補空間  $\{W_k\}$

の基底を生成する。

$$V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_k \subset \dots \subset L^2[0, 1], \quad (2)$$

$$V_{k+1} = V_k + W_k.$$

ここで、部分空間  $V_k$ 、 $W_k$  の基底はそれぞれ  $\phi_{k,j} = 2^{\frac{k}{2}}\phi(2^k x - j)$ 、 $\psi_{k,j} = 2^{\frac{k}{2}}\psi(2^k x - j)$  で与えられる。なお、式(2)において“+”は直和を表わす。

近似関数  $\tilde{u}$ 、 $\tilde{q}$  は、基底  $\phi_{0,j}$ 、 $\psi_{k,j}$  を用いた wavelet 展開によって次式で与えられる。

$$\tilde{u} := \sum_{j=1}^{n_s} \hat{u}_{0,j} \phi_{0,j} + \sum_{k=0}^{m_r} \sum_{j=1}^{n_k} \tilde{u}_{k,j} \psi_{k,j}, \quad (3)$$

$$\tilde{q} := \sum_{j=1}^{n_s} \hat{q}_{0,j} \phi_{0,j} + \sum_{k=0}^{m_r} \sum_{j=1}^{n_k} \tilde{q}_{k,j} \psi_{k,j}.$$

ここで、 $\hat{u}_{0,j}$ 、 $\tilde{u}_{k,j}$ 、 $\hat{q}_{0,j}$ 、 $\tilde{q}_{k,j}$  は展開係数であり、 $n_s$ 、 $n_k$  はそれぞれ基底関数  $\phi_{0,j}$ 、 $\psi_{k,j}$  の個数である。また、 $m_r$  は wavelet 展開における上限階層数である。

本研究においては、基底関数として非直交 wavelet<sup>7)</sup>を用いる。この場合、scaling 関数と wavelet はそれぞれ次式で与えられる。

$$\phi(x) := \phi^m(x) = \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \binom{m+1}{j} (x-j)_+^m,$$

$$\psi(x) := \psi_n^m(x) = \frac{\alpha_n^m}{m!} \sum_{j=0}^{m+n+1} (-1)^j \binom{m+n+1}{j} (2x-j)_+^m. \quad (4)$$

上式において、 $m$  は多項式次数であり、 $n$  はゼロモーメント次数である。また、 $\alpha_n^m$  は  $\psi$  を規格化するための定数であり、 $(\cdot)_+$  は切断べき関数であることを示す。 $\phi$  と  $\psi$  はそれぞれ  $(m+1)$ 、 $(m+n+1)$  個の区分多項式によって構成され、 $\psi$  については次式で与えられる  $n$  次のゼロモーメント条件を満足する。

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^p \psi(x) dx = 0, \quad (p = 0, 1, \dots, n-1). \quad (5)$$

なお、有限な区間上で与えられた非周期関数についての wavelet 展開を定義する場合、式(4)の基底だけでは展開の完備性が保障できなくなる。そのため、これらの基底の他に境界 scaling 関数と境界 wavelet が別途必要となる<sup>7)</sup>。

式(3)を式(1)へ代入し、Galerkin 法を適用すると、次の境界要素方程式を得る。

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{q}. \quad (6)$$

ここで、 $\mathbf{u}$ 、 $\mathbf{q}$  はそれぞれ  $\tilde{u}$ 、 $\tilde{q}$  の展開係数を成分とするベクトルであり、これらの既知成分は高速 wavelet 変換を用い  $O(N_e)$  ( $N_e$ : 近似関数の自由度) で評価することができる<sup>7)</sup>。また、 $\mathbf{G}$ 、 $\mathbf{H}$  はそれぞれ  $u^*$ 、 $q^*$  に関する境界積分によって与えられる係数行列であり、こ

これらの成分  $g_{ij}$ ,  $h_{ij}$  は次の二重積分を計算することで得られる。

$$\begin{aligned} g_{ij} &:= \int_{\Gamma} w_i \int_{\Gamma} u^* w_j d\Gamma^2, \\ h_{ij} &:= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} w_i w_j d\Gamma + \int_{\Gamma} w_i \int_{\Gamma} q^* w_j d\Gamma^2. \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、関数  $w_i$ ,  $w_j$  は  $\phi_{0,j}$ ,  $\psi_{k,j}$  のいずれかで与えられる。なお、 $\Gamma$  上のほとんどいたるところで境界が滑らかであるとすれば、式(1)における  $c(\mathbf{x})$  は式(7)の積分を評価する際には  $1/2$  とすることができる。

式(7)で与えられる係数成分  $g_{ij}$ ,  $h_{ij}$  の切り捨ては、切り捨て対象成分に関する不要な積分計算を回避するため、式(7)の計算の前後で二度実行する。係数計算前の切り捨ては、係数成分の事前評価値を用いて行なう。非直交 wavelet を用いる場合、事前評価式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} |g_{ij}| &\simeq \bar{g}_{ij} := C_{ij} \cdot \frac{(n_i + n_j - 1)!}{r_0^{n_i + n_j}}, \\ |h_{ij}| &\simeq \bar{h}_{ij} := C_{ij} \cdot \frac{(n_i + n_j)!}{r_0^{n_i + n_j + 1}}, \\ C_{ij} &:= \frac{\alpha_{n(i)}^m \alpha_{n(j)}^m A_{n_i} A_{n_j} G_x^{n_i + 1} G_y^{n_j + 1}}{n_i! n_j!} \\ A_n &:= \int_{-H/2}^{H/2} \xi^n w(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (8)$$

なお、 $G_x$ ,  $G_y$  はそれぞれ基底  $w_i$ ,  $w_j$  のサポート中央点における Jacobian の値であり、 $r_0$  は基底のサポート中央点間距離である。また、 $n_i$ ,  $n_j$  は  $w_i$ ,  $w_j$  のゼロモーメント次数であり、 $H$  は基底のサポート長である。 $\alpha_{n(i)}^m$ ,  $\alpha_{n(j)}^m$  は基底を規格化するための定数で、 $n = 0$  のとき  $1$  をとるものとする。

式(8)の事前評価値  $\bar{g}_{ij}$ ,  $\bar{h}_{ij}$  が次式の条件を満足する係数については、積分計算を実行せずにその影響を無視する。

$$\bar{g}_{ij} < \tau \cdot G_{max}, \quad \bar{h}_{ij} < \tau \cdot H_{max}. \quad (9)$$

ここで、 $G_{max}$ ,  $H_{max}$  はそれぞれ係数成分  $g_{ij}$ ,  $h_{ij}$  の絶対最大値であり、 $\tau$  は切り捨て基準値である。 $\tau$  の値は、境界要素解に含まれる切り捨てに起因する誤差が離散化誤差と同程度となるように設定する必要がある<sup>11)12)</sup>。本研究においては、境界要素方程式の残差に基づく文献<sup>11)</sup>の手法を用い、適切な  $\tau$  の値を設定する。

式(9)の条件を満足しない成分においては、式(7)の二重積分を評価した後、次式の条件を満たす成分について再度切り捨てを行なう。

$$|g_{ij}| < \tau \cdot G_{max}, \quad |h_{ij}| < \tau \cdot H_{max}. \quad (10)$$

上述の切り捨てを実行した後、式(6)において  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{q}$  の未知成分と既知成分を整理すると、最終的に次の連立方程式を得る。

$$\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{b}. \quad (11)$$

ここで、 $\mathbf{A}$  は係数行列であり、 $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{b}$  はそれぞれ未知ベクトル、既知ベクトルである。

### 3. Wavelet 重み付き Gauss 積分公式

#### 3.1 重み付き Gauss 積分公式

Wavelet 基底を重み関数に用いた積分公式を構成するために、次の積分について考える。

$$I := \int_{-h/2}^{h/2} f_{2N-1}(\xi) w(\xi) d\xi. \quad (12)$$

ここで、 $f_{2N-1}$  は任意の  $(2N-1)$  次多項式とする。また、重み関数  $w(\xi)$  は式(4)の基底  $\phi(\xi) = \phi^m(x+h/2)$  または  $\psi(\xi) = \psi_n^m(x+h/2)/\alpha_n^m$  をとるものとする。 $h$  は  $w(\xi)$  のサポート長であり、 $h = m+1$  (scaling 関数),  $(m+n+1)/2$  (wavelet) で与えられる。なお、整数  $N$  は  $N \geq 1$  (scaling 関数),  $N \geq n+1$  (wavelet) とする。

多項式  $f_{2N-1}$  は、 $N$  次多項式  $P_N$  と  $(N-1)$  次多項式  $Q_{N-1}$ ,  $R_{N-1}$  を用いて次のように表わすことができる。

$$f_{2N-1}(\xi) = P_N(\xi) \cdot Q_{N-1}(\xi) + R_{N-1}(\xi). \quad (13)$$

なお、 $P_N$  は  $(N-1)$  次以下の任意の多項式と  $w$  に関する次式の条件を満足するものとする。

$$\int_{-h/2}^{h/2} \xi^i P_N(\xi) w(\xi) d\xi = 0, \quad (i = 0, 1, \dots, N-1). \quad (14)$$

式(13)を式(12)へ代入すると、式(14)の条件より次式を得る。

$$I = \int_{-h/2}^{h/2} R_{N-1}(\xi) w(\xi) d\xi. \quad (15)$$

ここで、 $P_N(\xi) = 0$  の根を  $\xi_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) とする。 $\xi_i$  が区間  $(-h/2, h/2)$  において全て単根で与えられる場合、 $R_{N-1}$  は Lagrange 補間式によって表現できる<sup>14)</sup>。その結果、式(12)の積分は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=1}^N f_{2N-1}(\xi_i) \cdot \alpha_i, \\ \alpha_i &= \frac{1}{P'_N(\xi_i)} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{P_N(\xi)}{\xi - \xi_i} w(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (16)$$

上式において、 $\xi_i$  は積分点座標であり、 $\alpha_i$  は重み係数である。また、前出の整数  $N$  は積分点数となる。なお、 $P'_N(\xi) = dP_N/d\xi$  である。

式(16)の公式を用いて式(12)の形の積分を評価する場合、計算時に  $w(\xi_i)$  の評価を必要としないため、基底  $w$  が区分多項式であるにも関わらず積分区間の分割が不要となる。なお、本公式は他の Gauss 型積分公式同様、 $(2N-1)$  次の厳密性を有する。

#### 3.2 $N$ 次多項式 $P_N$ の構成

式(13)において導入された  $N$  次多項式  $P_N(\xi)$  は、次式のように形式的に表わすことができる。

$$P_N(\xi) = \xi^N + \sum_{j=0}^{N-1} a_j^{(N)} \xi^j. \quad (17)$$

なお、 $P_N$  は、式(17)の係数  $a_j^{(N)}$  が式(14)の条件を満たすような  $N$  次多項式として与えられる必要がある。そこで、式(17)を式(14)へ代入することで、多項式の係数  $a_j^{(N)}$  に関する次の連立一次方程式を得る。

$$\sum_{j=0}^{N-1} A_{i+j} a_j^{(N)} = -A_{N+i}, \quad (i = 0, 1, \dots, N-1)$$

$$A_s := (\xi^s, w(\xi)) = \int_{-h/2}^{h/2} \xi^s w(\xi) d\xi. \quad (18)$$

式(18)を  $a_j^{(N)}$  について解くことで多項式  $P_N$  を決定することができる。

### (1) Scaling 関数

$w(\xi) = \phi^m(\xi)$  とした場合、重み関数  $w(\xi)$  は積分区間  $(-h/2, h/2)$  で正値となる関数で与えられる。そのため、多項式  $P_N$  は一意に決定でき、 $P_N(\xi) = 0$  の根が常に  $N$  個の単根として与えられることとなる<sup>14)</sup>。よって、この場合には補間次数  $m$  によらず全ての積分点数において積分公式を構成できる。

なお、 $P_N$  は次の漸化式によって生成することが可能である。

$$P_N(\xi) = \xi P_{N-1}(\xi) + \lambda_N P_{N-2}(\xi), \quad (N \geq 1),$$

$$\lambda_N = -\frac{(P_{N-1}, P_{N-1} \phi^m)}{(P_{N-2}, P_{N-2} \phi^m)}, \quad P_{-1} = 0, \quad P_0 = 1. \quad (19)$$

### (2) Wavelet

$w(\xi) = \psi_n^m(\xi)$  とした場合、重み関数  $w$  は式(5)のゼロモーメント条件を満たすため、式(18)の解  $a_j^{(N)}$  は  $N \leq n$  において存在しない。そのため、積分点数が  $n$  点以下の積分公式を構成することはできない。

一方、 $N \geq n+1$  なる多項式  $P_N$  は、式(18)と  $w$  の偶奇性 ( $n$ : even のとき偶関数、 $n$ : odd のとき奇関数)を考慮し、次式を  $a_j^{(N)}$  について解くことで与えられる。

•  $n$ : odd,  $N$ : odd

$$a_{2i}^{(N)} = 0, \quad \sum_{j=0}^{\frac{N-3}{2}} A_{2(i+j)+1} a_{2j+1}^{(N)} = -A_{N+2i}, \quad (20)$$

$$(i = 0, 1, \dots, \frac{N-1}{2}).$$

•  $n$ : odd,  $N$ : even

$$a_{2i+1}^{(N)} = 0, \quad \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} A_{2(i+j)+1} a_{2j}^{(N)} = -A_{N+2i+1}, \quad (21)$$

$$(i = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1).$$

•  $n$ : even,  $N$ : odd

$$a_{2k}^{(N)} = 0, \quad \sum_{j=0}^{\frac{N-3}{2}} A_{2(i+j)} a_{2j+1}^{(N)} = -A_{N+2i+1}, \quad (22)$$

$$(k = 0, 1, \dots, \frac{N-1}{2}, i = 0, 1, \dots, \frac{N-3}{2}).$$

•  $n$ : even,  $N$ : even

$$a_{2i+1}^{(N)} = 0, \quad \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} A_{2(i+j)} a_{2j}^{(N)} = -A_{N+2i}, \quad (23)$$

$$(i = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1).$$

上式において、式(21), (22), (23)は方程式の数と未知数の数とが一致するため、これらの連立方程式を解くことで  $a_j^{(N)}$  を求めることができる。しかし、 $n$  と  $N$  がともに奇数となっている式(20)においては、方程式の数が未知数の数に対して過剰に与えられるため、連立方程式の解  $\{a_j^{(N)}\}$  は一般に存在しない。よって、 $n$  が奇数となる場合には奇数点数の積分公式を構成することができない。

Scaling 関数の場合と同様に、wavelet を重み関数とした場合においても  $P_N$  は次の漸化式によって決定できる。

•  $n$ : odd

$$P_N(\xi) = (\xi^2 + \beta_N) P_{N-2}(\xi) + \gamma_N P_{N-4}(\xi),$$

$$\beta_N = -\frac{(P_{N-2}, \xi^3 P_{N-2} \psi_n^m)}{(P_{N-2}, \xi P_{N-2} \psi_n^m)}, \quad (24)$$

$$\gamma_N = -\frac{(P_{N-2}, \xi^2 P_{N-2} \psi_n^m)}{(P_{N-4}, \xi P_{N-4} \psi_n^m)},$$

$$(N : \geq n+5, \text{ even}).$$

•  $n$ : even

$$P_N(\xi) = \xi P_{N-1}(\xi) + \lambda_N P_{N-2}(\xi),$$

$$\lambda_N = -\frac{(P_{N-1}, P_{N-1} \psi_n^m)}{(P_{N-2}, P_{N-2} \psi_n^m)}, \quad (N \geq n+3). \quad (25)$$

なお、 $\psi_n^m$  を重み関数とした場合、 $w$  は積分区間  $[-h/2, h/2]$  で非正値となり得る。そのため、上式によって  $P_N$  が一意に与えられた場合においても、开区間  $(-h/2, h/2)$  で  $N$  個の単根の存在が必ずしも保障できない。その場合、 $N$  点公式は構成できなくなる。

ここで、 $m = 2$  (区間2次)、 $m = 3$  (区間3次)の wavelet を重み関数とする際に適用可能である積分点数 ( $N \leq 24$ ) を表-1に示す。なお、積分公式を構成する際には4倍精度で計算を行ない、多項式  $P_N(\xi) = 0$  の根は二分法によって探索した。表-1に示すように、適用可能な積分点数は重みとして用いる wavelet の補間次数・ゼロモーメント次数に応じて異なることがわかる。特に高次のゼロモーメント性を有する wavelet を用いた場合には、利用できる積分点数が限定されるので注意を要する。

また、 $m = 2$ ,  $n = 3$  である wavelet  $\psi_3^2$  を重み関数とした積分公式を表-2に示しておく。

### 3.3 積分点数を選択する際に生じる制約の除去方法

前述のように、wavelet を重み関数とした場合、ゼロモーメント次数  $n$  と積分点数  $N$  がともに奇数となる組み合わせの下では多項式  $P_N$  を得ることができず、この場合には積分公式を構成できなくなる。また、wavelet の

表-1 適用可能な積分点数. ( $N \leq 24$ )

(a) 区間 2 次 ( $m = 2$ ).

$n$	積分点数 $N$
1	すべての偶数点数
2	3, 5, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 18, 20, 22, 23
3	4, 6, 12, 14, 18, 20
4	5, 7, 8, 14, 16, 21, 23, 24
5	8, 12, 16, 18, 22
6	7, 9, 18, 20, 21, 24

(b) 区間 3 次 ( $m = 3$ ).

$n$	積分点数 $N$
1	すべての偶数点数
2	3, 5, 8, 10, 12, 13, 15, 17, 20, 22, 24
3	4, 6, 8, 12, 14, 20, 22
4	5, 7, 8, 11, 14, 16, 17, 19, 20, 23
5	8, 10, 12, 18, 22
6	9, 12, 13, 20, 23, 24

非正值性により,  $P_N$  が一意に与えられても  $P_N(\xi) = 0$  が  $N$  個の単根を持たない場合があり, そのような積分点数についても積分公式の適用が不可能となる. その結果, 要求精度に対して必要以上の積分点を使用せざるを得なくなり, 計算効率の低下を招く恐れがある.

Wavelet 重み付き公式適用時に予想される上述の問題点を解消する方法の一つとして, wavelet 基底に一定値を加えた関数を新たな重み関数として積分公式を構成する方法が考えられる. すなわち, 積分区間において重み関数が正值となるように一定値  $\Delta$  を加え, 多項式  $P_N$  の一意性とその次数と同数の単根の存在を保障する. この場合, 前述のような制約はなくなり, 積分点数を自由に選択することができる.

まず, 式(12) の積分を次式のように表わす.

$$I = \int_{-h/2}^{h/2} f_{2N-1}(\xi)[w(\xi) + \Delta] d\xi - \Delta \int_{-h/2}^{h/2} f_{2N-1}(\xi) d\xi. \quad (26)$$

ただし,  $\Delta$  は  $w(\xi) + \Delta > 0$  となるように与えられる.

ここで, 新たな重み関数として  $\bar{w}(\xi) := w(\xi) + \Delta$  を導入すると, 次式を得る.

$$I = \int_{-h/2}^{h/2} f_{2N-1}(\xi)\bar{w}(\xi) d\xi - \Delta \int_{-h/2}^{h/2} f_{2N-1}(\xi) d\xi. \quad (27)$$

式(27)において, 第1項, 第2項の積分はそれぞれ  $\bar{w}$  を重み関数とした公式, 通常用いられる Gauss-Legendre 公式によって計算することができる. なお,  $\Delta = 0$  とした場合には式(15)の公式が得られる.

表-2 Wavelet 重み付き Gauss 積分公式. ( $m = 2, n = 3$ , 積分区間  $[-3/2, 3/2]$ , N/A: 適用不可).

$N_g$	$\xi_i$	$\alpha_i$
4	-0.1106561765295589 (+1) -0.1597531207391895 0.1597531207391895 0.1106561765295589 (+1)	0.1413258757418134 -0.9789217876883867 0.9789217876883867 -0.1413258757418134
5	N/A	
6	-0.1286403165427648 (+1) -0.9820913373978350 -0.3274538150424557 0.3274538150424557 0.9820913373978350 0.1286403165427648 (+1)	0.2432129130970694 (-1) 0.1651929651654679 -0.5909888885889830 0.5909888885889830 -0.1651929651654679 -0.2432129130970694 (-1)
7-11	N/A	
12	-0.1414459082716200 (+1) -0.1275861429321490 (+1) -0.1089631676414065 (+1) -0.8811106883444029 -0.4279049948772037 -0.2067087702707018 0.2067087702707018 0.4279049948772037 0.8811106883444029 0.1089631676414065 (+1) 0.1275861429321490 (+1) 0.1414459082716200 (+1)	0.1622002938828848 (-2) 0.1655518766920184 (-1) 0.6874527324124652 (-1) 0.1288218695636459 -0.3243094067964834 -0.353425355580658 0.353425355580658 0.3243094067964834 -0.1288218695636459 -0.6874527324124652 (-1) -0.1655518766920184 (-1) -0.1622002938828848 (-2)
13	N/A	
14	-0.1445269334716279 (+1) -0.1351534961730555 (+1) -0.1216917470792252 (+1) -0.1047682313562154 (+1) -0.8612193971328596 -0.4410314903265739 -0.2211292574618880 0.2211292574618880 0.4410314903265739 0.8612193971328596 0.1047682313562154 (+1) 0.1216917470792252 (+1) 0.1351534961730555 (+1) 0.1445269334716279 (+1)	0.4349965845651824 (-3) 0.5057099018081883 (-2) 0.2461113086536186 (-1) 0.7443061480269270 (-1) 0.1146988900902054 -0.296433863398246 -0.3773228761089384 0.3773228761089384 0.296433863398246 -0.1146988900902054 -0.7443061480269270 (-1) -0.2461113086536186 (-1) -0.5057099018081883 (-2) -0.4349965845651824 (-3)
15-16	N/A	

### 3.4 重み付き公式の計算効率

図-1 に示す幾何学的関係にある 2 つの要素を対象に, 次式で与えられる二重積分に対して本手法を適用した.

$$\int_{-1/2}^{1/2} w_i(s_i) \int_{-1/2}^{1/2} \ln r(s_i, s_j) w_j(s_j) ds_j ds_i. \quad (28)$$

ここで,  $s_i, s_j$  はそれぞれ基底関数  $w_i, w_j$  が展開されている要素の局所座標であり,  $s_i, s_j$  上の  $w_i, w_j$  のサポートはともに  $[-1/2, 1/2]$  としている. また,  $r = r(s_i, s_j)$  は  $s_i, s_j$  上に存在する 2 点間の距離であり, 図中  $r_0$  は  $w_i, w_j$  のサポート中央点間距離である. なお,  $\theta$  は case2 における 2 つの要素の結節点での開き角である.

解析においては, wavelet 重み付き公式 ( $\Delta = 0, \Delta = 4$ ), Gauss-Legendre 公式の 3 つの積分公式を適用した. なお,  $\Delta = 4$  は重み関数  $\bar{w}$  が正值となる値として選定したが, その条件を満たす  $\Delta$  の値に対しては同一の結果が得られることとなる. 基底  $w_i, w_j$  は  $w_i = w_j = \psi_3^2$  (区間 2 次・3 次ゼロモーメント性を有する wavelet) を用いている. 式(28)の二度の積分に要する積分点数は同数とした. そのため, ここでは各積分公式の計算効率を積分点数によって比較する. ただし, 1. で述べたよ

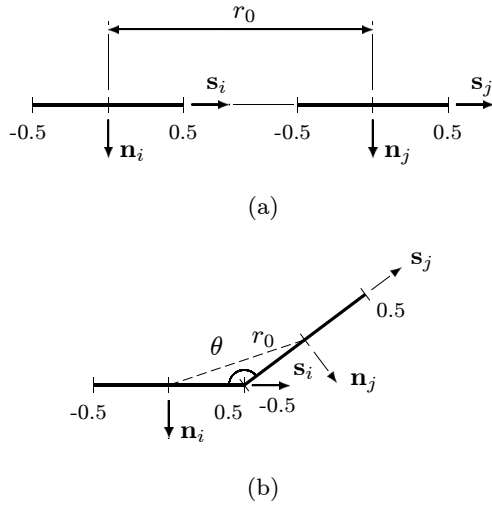


図-1 解析条件. ((a): case1, (b): case2).

表-3 3種類の積分公式の下で得られた最小積分数. ( $\varepsilon_q = 1.0 \times 10^{-8}$ , (a): case 1, (b): case 2).

(a)				
$r_0$	$N_G$	$N_\Delta$	$N_w$	
2.0	12	6	4	
1.8	12	6	4	
1.6	12	6	4	
1.4	18	6	4	
1.2	18	10	6	
1.0	24	16	12	

(b)				
$\theta$	$r_0$	$N_G$	$N_\Delta$	$N_w$
$\pi$	1.000	24	16	12
$5\pi/6$	0.966	24	16	6
$2\pi/3$	0.866	24	14	12
$\pi/2$	0.707	24	24	6
$\pi/3$	0.500	24	14	12
$\pi/6$	0.259	54	> 40	> 20

うに、積分数は所定の許容誤差を下回る最小の点数とすることが望まれる。そこで、3種類の積分公式の下での最小積分数を表-3に示し、各公式の計算効率について検討することとした。表中“ $N_w$ ”, “ $N_\Delta$ ”, “ $N_G$ ”はそれぞれ  $\Delta = 0$ ,  $\Delta = 4$  とした重み付き公式, Gauss-Legendre 公式を適用した際の積分数を示している。ただし,  $N_\Delta$  は重み付き公式と Gauss-Legendre 公式の双方で用いた積分数の和で与えられており,  $N_G$  は基底の区分多項式が定義されている一区分での積分数に区分数 ( $m + n + 1 = 6$ ) を乗じて算出されている。なお,  $\theta = \pi/6 \sim \pi$  とし, 許容誤差は  $\varepsilon_q = 1.0 \times 10^{-8}$  とした。

いずれの解析例においても,  $\Delta = 0$  とした重み付き公式 (一定値の加算なし) を用いた場合の計算回数が最も少なくなり, 以下  $\Delta = 4$  とした重み付き公式,

Gauss-Legendre 公式の順にその回数は次第に増加することがわかる。その際, 計算量が最小となった重み付き公式 ( $\Delta = 0$ ) と最大の Gauss-Legendre 公式とでその結果を比較すると, 本手法の適用によって積分数は  $1/2 \sim 1/3$ , 被積分関数の評価回数では  $1/4 \sim 1/10$  程度まで削減できることが確認できる。

先にも述べたように,  $\Delta = 4$  とした重み付き公式は, 採用する積分数についての制約が存在しない。そのため, 適用可能となる積分数に制限が課される一定値の加算のない ( $\Delta = 0$ ) 重み付き公式の欠点を補完する方法の一つとして考えてきた。しかし,  $\Delta \neq 0$  とする方法は Gauss-Legendre 積分の評価も付加的に必要とするため, 少なくとも今回の全ての解析において  $\Delta = 0$  とした場合の計算量を下回ることにはなかった。よって, 以下においては, 上記の解析結果と合わせて  $\Delta \neq 0$  とした積分公式の持つ補完的な役割も考慮し,  $\Delta = 0$  とした wavelet 重み付き公式について議論を進めることとする。

## 4. 積分数の決定

前節で示したように, wavelet 基底を含む積分は, 基底自体を重み関数とした Gauss 公式を適用することでその計算効率を大幅に改善できることがわかった。しかし, 積分評価時の計算量を削減できる本手法を適用しても, 妥当な積分数が与えられない場合には, 積分数の不足による精度低下や過剰な積分数の付与による計算量の増加といった問題が生じることとなる。そのため, 境界要素解析に本手法を適用する際には, 各々の積分計算に応じて適切な積分数を事前に決定することが求められる。数値積分数を事前に決定する試みは, 積分数の選定が特に大きく計算効率を左右する3次元問題において Sauter ら<sup>18)</sup>や Lachat ら<sup>20)</sup>によってなされているものの, 積分数は経験的に与えられているのが一般的である。

そこで本節では, wavelet 基底を含む二重積分を上述の重み付き積分公式によって評価する場合を対象に, 積分数を事前に決定する方法を示す。本研究においては, 要素の幾何情報と積分数から数値積分誤差を予測し, 積分誤差の許容値と誤差の予測値とから積分数を決定する。その際, 積分誤差の許容値は, 文献<sup>18)</sup>に示されているように, 境界要素解の離散化誤差が積分誤差と同程度となるように設定する。一方, 二重積分の誤差評価は Taylor 展開を用いる文献<sup>14)</sup>20)の方法に基づき行なう。

### 4.1 数値積分の許容精度

Wavelet BEM における係数成分の許容積分誤差について論じるために, 式(7)の境界積分について考える。式(7)を数値積分により処理することで得られる近似値を  $\tilde{g}_{ij}$ ,  $\tilde{h}_{ij}$  とし, これらの値は真値  $g_{ij}$ ,  $h_{ij}$  と積分誤差  $\Delta g_{ij}$ ,  $\Delta h_{ij}$  を用いて次式で表わすことができる。

$$\tilde{g}_{ij} := g_{ij} - \Delta g_{ij}, \quad \tilde{h}_{ij} := h_{ij} - \Delta h_{ij}. \quad (29)$$

式(29)より,  $\tilde{g}_{ij}$ ,  $\tilde{h}_{ij}$  は真値に含まれる微小成分  $\Delta g_{ij}$ ,  $\Delta h_{ij}$  の切り捨てによって得られると解釈できる。なお,

wavelet BEM においては、スパースな係数行列を生成するために微小な係数成分の切り捨てを実行する。そのため、数値積分誤差は係数成分の切り捨て誤差と同様に取り扱うことができ、その許容値  $\varepsilon_q^{(G)}$ ,  $\varepsilon_q^{(H)}$  は次式によって事前に設定できる。

$$\varepsilon_q^{(G)} = \tau \cdot G_{max}, \quad \varepsilon_q^{(H)} = \tau \cdot H_{max}. \quad (30)$$

ここで、 $\tau$  は式(9), (10) で用いられる切り捨て基準値であり、 $G_{max}$ ,  $H_{max}$  はそれぞれ  $g_{ij}$ ,  $h_{ij}$  の絶対最大値を代表する値である。

## 4.2 数値積分の誤差評価

以下においては、次式で与えられる二重積分  $J$  の数値積分誤差について考える。

$$\begin{aligned} J &:= \int_{\Gamma_x} w_x(x) \int_{\Gamma_y} f(x, y) w_y(y) dy dx \\ &= \int_{-h_x/2}^{h_x/2} w_x(\xi) \int_{-h_y/2}^{h_y/2} K(\xi, \eta) w_y(\eta) d\eta d\xi, \quad (31) \\ K(\xi, \eta) &= f(\xi, \eta) \frac{dx}{d\xi}(\xi) \frac{dy}{d\eta}(\eta). \end{aligned}$$

ここで、 $w_x$ ,  $w_y$  は基底関数であり、境界上の座標  $x$ ,  $y$  上のそれらのサポートをそれぞれ  $\Gamma_x$ ,  $\Gamma_y$  で表わす。また、座標  $x$ ,  $y$  は  $x = x(\xi)$ ,  $y = y(\eta)$  で与えられるものとし、 $h_x$ ,  $h_y$  はそれぞれ  $w_x$ ,  $w_y$  の  $\xi$ ,  $\eta$  上でのサポート長である。なお、 $w_x$ ,  $w_y$  はそれぞれ  $n_x$  次、 $n_y$  次のゼロモーメント性を有するものとする。

式(31)の積分は、 $w_x$ ,  $w_y$  を重み関数とした積分公式を用いて次のように近似評価できる。

$$J \simeq S := \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} K(\xi_i, \eta_j) \alpha_i \beta_j. \quad (32)$$

ただし、 $\xi_i$ ,  $\eta_j$  は積分点座標であり、 $\alpha_i$ ,  $\beta_j$  はそれぞれ  $\xi_i$ ,  $\eta_j$  に対応する重み係数である。また、 $N_x$ ,  $N_y$  は  $\xi$ ,  $\eta$  に関する積分点数である。

式(31), 式(32)より、数値積分誤差  $E = J - S$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} E &:= \left[ \int_{-h_y/2}^{h_y/2} F_1(\eta) w_y(\eta) d\eta - \sum_j^{N_y} F_1(\eta_j) \beta_j \right] \\ &\quad + \sum_j^{N_y} F_1(\eta_j) \beta_j + \sum_i^{N_x} F_2(\xi_i) \alpha_i. \end{aligned} \quad (33)$$

なお、 $F_1(\eta)$ ,  $F_2(\xi)$  は次式で定義される。

$$\begin{aligned} F_1(\eta) &:= \int_{-h_x/2}^{h_x/2} K(\xi, \eta) w_x(\xi) d\xi - \sum_i^{N_x} K(\xi_i, \eta) \alpha_i, \\ F_2(\xi) &:= \int_{-h_y/2}^{h_y/2} K(\xi, \eta) w_y(\eta) d\eta - \sum_j^{N_y} K(\xi, \eta_j) \beta_j. \end{aligned} \quad (34)$$

式(34)第1式の  $F_1(\eta)$  は、 $K(\xi, \eta) w_x(\xi)$  に関する積分誤差である。この誤差の主要項を評価するために、 $K(\xi, \eta)$  を  $\xi = 0$  で Taylor 展開しておく。

$$K(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k K(0, \eta)}{\partial \xi^k} \xi^k. \quad (35)$$

式(35)を式(34)第1式の各項へ代入すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} F_1(\eta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Omega_k}{k!} \frac{\partial^k K(0, \eta)}{\partial \xi^k}, \\ \Omega_k &:= \int_{-h_x/2}^{h_x/2} \xi^k w_x(\xi) d\xi - \sum_i^{N_x} \xi_i^k \alpha_i. \end{aligned} \quad (36)$$

ここで、新たに整数  $\hat{N}_x = 2N_x$  ( $n_x$ : even),  $2N_x + 1$  ( $n_x$ : odd) を導入する。式(36)において、wavelet の偶奇性と積分公式の厳密性を考慮すると、上式中の  $\Omega_k$  は  $k < \hat{N}_x$  で 0 となる。よって、 $F_1(\eta)$  は次式で近似できる。

$$\begin{aligned} F_1(\eta) &\simeq \frac{\Omega_{\hat{N}_x}}{\hat{N}_x!} \frac{\partial^{\hat{N}_x} K(0, \eta)}{\partial \xi^{\hat{N}_x}}, \\ \Omega_{\hat{N}_x} &:= \int_{-h_x/2}^{h_x/2} \xi^{\hat{N}_x} w_x(\xi) d\xi - \sum_i^{N_x} \xi_i^{\hat{N}_x} \alpha_i. \end{aligned} \quad (37)$$

一方、式(34)第2式の  $F_2(\xi)$  は、 $K(\xi, \eta) w_y(\eta)$  に関する積分誤差である。そのため、その主要項は  $F_1(\eta)$  と同様の方法によって評価でき、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} F_2(\xi) &\simeq \frac{\Omega_{\hat{N}_y}}{\hat{N}_y!} \frac{\partial^{\hat{N}_y} K(\xi, 0)}{\partial \eta^{\hat{N}_y}}, \\ \Omega_{\hat{N}_y} &:= \int_{-h_y/2}^{h_y/2} \eta^{\hat{N}_y} w_y(\eta) d\eta - \sum_j^{N_y} \eta_j^{\hat{N}_y} \beta_j. \end{aligned} \quad (38)$$

なお、 $\hat{N}_y = 2N_y$  ( $n_y$ : even),  $2N_y + 1$  ( $n_y$ : odd) である。

式(33)において、第1・2項は  $F_1(\eta) w_y(\eta)$  に関する積分誤差とみなせる。そのため、これらの項の影響は式(37)と同様に次式で近似できる。

$$\begin{aligned} &\int_{-h_y/2}^{h_y/2} F_1(\eta) w_y(\eta) d\eta - \sum_j^{N_y} F_1(\eta_j) \beta_j \\ &\simeq \frac{\Omega_{\hat{N}_x} \Omega_{\hat{N}_y}}{\hat{N}_x! \hat{N}_y!} \frac{\partial^{\hat{N}_x + \hat{N}_y} K(0, 0)}{\partial \xi^{\hat{N}_x} \partial \eta^{\hat{N}_y}}. \end{aligned} \quad (39)$$

一方、式(33)第3・4項は、 $F_1(\eta) w_y(\eta)$ ,  $F_2(\xi) w_x(\xi)$  の数値積分値であるから、これらの項は  $\eta$ ,  $\xi$  に関する積分によって置き換えることができる。その際、基底のゼロモーメント性を考慮すると、次の近似評価式を

得る.

$$\sum_j^{N_y} F_1(\eta_j) \beta_j \simeq \int_{-h_y/2}^{h_y/2} F_1(\eta) w_y(\eta) d\eta$$

$$\simeq \frac{A_{n_y} \Omega_{\hat{N}_x}}{n_y! \hat{N}_x!} \cdot \frac{\partial^{\hat{N}_x + n_y} K(0, 0)}{\partial \xi^{\hat{N}_x} \partial \eta^{n_y}}, \quad (40)$$

$$A_{n_y} := \int_{-h_y/2}^{h_y/2} \eta^{n_y} w_y(\eta) d\eta.$$

$$\sum_i^{N_x} F_2(\xi_i) \alpha_i \simeq \int_{-h_x/2}^{h_x/2} F_2(\xi) w_x(\xi) d\xi$$

$$\simeq \frac{A_{n_x} \Omega_{\hat{N}_y}}{n_x! \hat{N}_y!} \cdot \frac{\partial^{n_x + \hat{N}_y} K(0, 0)}{\partial \xi^{n_x} \partial \eta^{\hat{N}_y}}, \quad (41)$$

$$A_{n_x} := \int_{-h_x/2}^{h_x/2} \xi^{n_x} w_x(\xi) d\xi.$$

なお、式(39), (40), (41)に含まれる  $K$  の高次微係数は次式で近似できるものとする.

$$\frac{\partial^{s+t} K(\xi, \eta)}{\partial \xi^s \partial \eta^t} \simeq G_x^{s+1} G_y^{t+1} \frac{\partial^{s+t} f(x, y)}{\partial x^s \partial y^t}, \quad (42)$$

$$G_x := \left. \frac{dx}{d\xi} \right|_{\xi=0}, \quad G_y := \left. \frac{dy}{d\eta} \right|_{\eta=0}.$$

ここで、式(39), (40), (41), (42)を式(33)へ代入すると、数値積分誤差  $E$  の事前評価式は次式で与えられる.

$$E \simeq \frac{A_{n_y} \Omega_{\hat{N}_x} G_x^{\hat{N}_x+1} G_y^{n_y+1}}{n_y! \hat{N}_x!} \cdot \frac{\partial^{\hat{N}_x + n_y} f(x(0), y(0))}{\partial x^{\hat{N}_x} \partial y^{n_y}}$$

$$+ \frac{A_{n_x} \Omega_{\hat{N}_y} G_x^{n_x+1} G_y^{\hat{N}_y+1}}{n_x! \hat{N}_y!} \cdot \frac{\partial^{n_x + \hat{N}_y} f(x(0), y(0))}{\partial x^{n_x} \partial y^{\hat{N}_y}}$$

$$+ \frac{\Omega_{\hat{N}_x} \Omega_{\hat{N}_y} G_x^{\hat{N}_x+1} G_y^{\hat{N}_y+1}}{\hat{N}_x! \hat{N}_y!} \frac{\partial^{\hat{N}_x + \hat{N}_y} f(x(0), y(0))}{\partial x^{\hat{N}_x} \partial y^{\hat{N}_y}}. \quad (43)$$

積分点数  $(N_x, N_y)$  は、式(43)で与えられる誤差の絶対値が許容誤差  $\varepsilon_q$  を下回る  $(N_x, N_y)$  の組み合わせの中で、計算量が最小となるものを選択すればよい. なお、式(43)の第3項の影響を無視すれば、 $N_x$  と  $N_y$  はそれぞれ独立に設定することができる.

### 4.3 事前評価された積分点数の妥当性

本手法を用いて決定された積分点数を表-4に示す. 解析は図-1に示した case 1 を対象とし、 $f = \ln r = \ln(-s_i + s_j + r_0)$  としている. また、式(43)の第3項は高次項であるためその寄与は相対的に小さいものと考え、誤差評価には第1・2項を用いている. 表中  $N_{(i)}$ ,  $N_{(j)}$  はそれぞれ積分変数  $s_i$ ,  $s_j$  に関する積分点数を表わし、「事前評価」、「数値実験」はそれぞれ事前評価によって得られた積分点数、数値実験において実際に必要とされた積分点数であることを示す.

表-4 本手法によって事前評価された積分点数. (Case1,  $w_i = w_j = \psi_3^2$ ,  $\varepsilon_q = 1.0 \times 10^{-8}$ ,  $f = \ln r$ .)

$r_0$	数値実験		事前評価	
	$N_{(i)}$	$N_{(j)}$	$N_{(i)}$	$N_{(j)}$
2.0	4	4	4	4
1.8	4	4	4	4
1.6	4	4	4	4
1.4	4	4	4	4
1.2	6	6	6	6
1.0	12	12	6	6

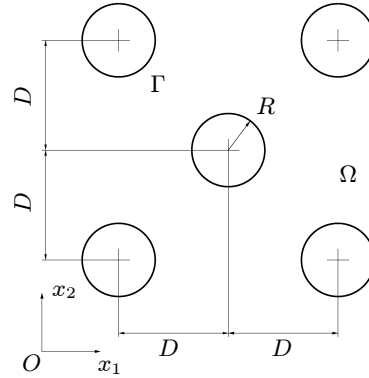


図-2 境界条件. ( $R = 1$ ,  $D = 3$ ,  $\bar{q} = 0$  (on  $\Gamma$ ),  $\bar{U}^\infty = x_1$ )

解析結果より、2つの要素が接近する場合には Taylor 展開による積分誤差の評価が十分でなく、事前に決定された積分点数は実際に必要とした点数に比べて小さな値に設定される傾向にある. これは、積分誤差の上界から積分点数を決定する文献<sup>20)</sup>の方法とは異なり、本手法が積分誤差の主要項を用いて積分点数を決定していることに起因していると考えられる. しかし、要素間距離がある程度確保されている場合には、積分点数の事前評価値は数値実験で得られた積分点数と一致した. なお、 $r_0$  や許容誤差  $\varepsilon_q$  を異なる値に設定した解析も行なったが、同様の結果を得た. このことから、要素が極端に近接した場合を除けば、本手法によって妥当な積分点数を事前に決定できることがわかった.

## 5. 境界要素解析への適用

図-2に示す無限領域  $\Omega$  における 2次元ポテンシャル問題に対して本手法を適用し、wavelet 重み付き積分公式を用いた係数行列作成方法の有効性について検討する. 対象としたのは、 $\Omega$  の内部に5個の円孔が存在する問題である. 円孔の半径  $R$  と間隔  $D$  はそれぞれ  $R = 1$ ,  $D = 3$  とした. 境界条件は全ての境界  $\Gamma$  上で Neumann 条件  $\bar{q} = 0$  により与えられ、無限遠方のポテンシャル値  $\bar{U}^\infty$  は  $\bar{U}^\infty = x_1$  としている. この場合、



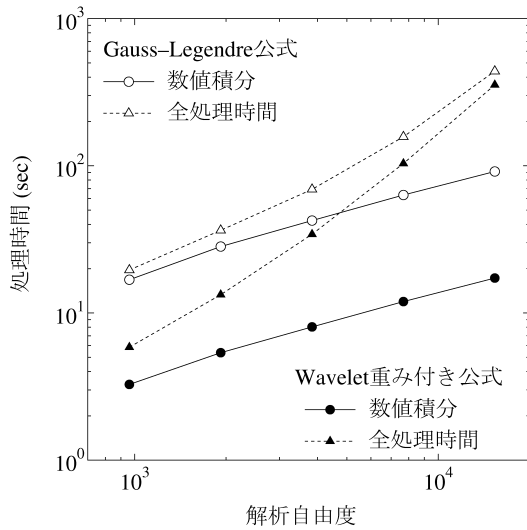


図-3 係数行列作成に関する計算時間の推移.

境界積分方程式は次式で与えられる.

$$c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})u(\mathbf{y}) d\Gamma_y = \bar{U}^{\infty}(\mathbf{x}), \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma). \quad (44)$$

式(44)に対し, 2. で示した wavelet BEM を適用すると, 境界要素方程式の係数行列は式(7)の係数成分  $h_{ij}$  のみで構成される.

$$h_{ij} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} w_i w_j d\Gamma + \int_{\Gamma} w_i \int_{\Gamma} q^* w_j d\Gamma^2. \quad (45)$$

なお, 解析においては,  $\phi(x) = \phi^2(x)$ ,  $\psi(x) = \psi_3^2(x)$  (補間次数  $m = 2$ , ゼロモーメント次数  $n = 3$ ) なる wavelet 基底を用いており,  $w_i, w_j$  は  $\phi_{0,j} = \phi(x)$  または  $\psi_{k,j} = 2^{\frac{k}{2}} \psi(2^k x - j)$  で与えられる. また, 式(45) 第2項に含まれる基本解  $q^*$  は, 境界上の点  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  が同一の円孔上に存在する場合  $q^* = 1/(4\pi R)$  (定数) となる. そのため,  $w_i$  と  $w_j$  が同一の円孔上にサポートを有する係数  $h_{ij}$  については, 式(45)の全ての積分を解析的に計算した. 一方, それ以外の係数成分については式(45) 第1項が0となり, 第2項を数値積分によって評価している. なお, 自由度  $N_e = 960 \sim 15,360$  の5ケースについて解析を行ない, 各々の自由度に対応する切り捨て基準値  $\tau$  は文献<sup>11)</sup>の方法によって設定されたものを用いた.

ここで, 係数行列作成に要した全計算時間 (図中「全処理時間」) とそれに含まれる数値積分の処理時間 (図中「数値積分」) を図-3 に示す. 比較のために Gauss-Legendre 公式を適用した場合についても解析を行なったので, その結果も併せて示した. なお, Gauss-Legendre 公式を適用する際にも wavelet 重み付き公式の場合と同様に, Taylor 展開に基づく誤差評価と許容誤差から積分点数を事前に与えている.

解析結果より, 係数行列の作成に関する処理時間は, 本手法を適用することにより Gauss-Legendre 公式を適用した場合と比べ最大 1/3 程度まで短縮できている

表-5 係数行列の圧縮率.

$N_e$	圧縮率 (%)
960	10.037
1,920	4.354
3,840	1.803
7,680	0.750
15,360	0.318

ことがわかる. しかし, 自由度の増加とともに両者の差は急速に解消されている. これは, 表-5 に示すように, 自由度の増加とともに係数行列のスパース性が向上し, 解析積分可能な同一円孔上の境界積分によって与えられる係数成分の割合が相対的に増加するためである. 一方, 数値積分だけに要した計算時間について見ると, 自由度によらず概ね 1/5 程度まで短縮されている. よって, 数値積分の計算量の削減に対しては本手法が有効に機能していることが確認できる.

## 6. おわりに

本研究では, wavelet BEM における係数行列成分を数値積分によって処理する際の計算量を削減するために, wavelet 基底を重み関数とした Gauss 積分公式を構成した. 一般に Galerkin 法によって離散化される wavelet BEM の係数行列成分は, 二重積分によって与えられる. また, wavelet 基底に非直交 wavelet を用いる場合, 基底がスプラインとして与えられる. そのため, 通常用いられる Gauss-Legendre 公式によって係数成分を評価する際には, 積分区間を細分割しなくてはならず, 積分計算時の計算量を増加させる一因となっていた. しかし, 本論文で示した wavelet 重み付き公式によって境界積分を処理することにより, 基底のサポートを一つの積分区間として取り扱うことが可能となった. その結果, ここに示した解析例においては, 数値積分実行時の計算量を 1/5 程度まで削減できることがわかった. なお, wavelet を重み関数として公式を構成する場合, 重み関数の非正値性によって積分公式が構成できない積分点数が存在する. 特にゼロモーメント次数が高い wavelet を用いる際には適用可能な積分点数が少数となるため, 本手法を境界要素解析に適用するには注意を要する.

境界積分を評価する際の計算回数は, 積分公式を適用する際に用いる積分点数に大きく依存する. そのため, 積分点数は各係数成分毎に積分誤差が許容値以下となる最小点数に予め設定することが望ましい. 本論文では, 積分誤差の事前評価式を導出し, 係数成分の切り捨て基準値に基づき与えられた許容誤差と併せて積分点数を決定する方法を示した. その結果, 要素間距離がある程度確保されている場合においては, 本手法によって積分点数を事前に決定できることが確認できた.

Wavelet を重み関数とした積分では, wavelet のゼロモーメント性のため, 特にゼロモーメント次数が高い

場合には数値積分の桁落ちが生じ易くなると思われる。しかし、wavelet 重み付き公式を用いる場合、Gauss-Legendre 公式を用いる場合のいずれにおいても、積分精度は式(30)に準拠して確保されていれば良く、それ以上の絶対精度を維持する必要はない。この意味において数値積分に要求される絶対精度は、通常の間数基底を用いる場合と何ら変わらず、特段問題とはならない。

なお、前節で解析の対象とした問題は特異積分の評価を必要としないものであるが、一般的な境界要素解析においては特異積分あるいは擬似特異積分を処理しなければならない。本手法をこれらの積分に適用するためには、被積分関数に対し何らかの正則化・平滑化を行なう必要がある。また、対象とする問題によっては高精度な積分評価が要求される場合もある。この場合、重み付き公式の下では積分区間の細分割ができないため、積分点数の増加によって対応せざるを得ず、積分実行時の計算効率の悪化が懸念される。これらの問題点への対応については今後の検討課題としたい。

#### 参考文献

- 1) Hackbusch, W. & Nowak, Z.P.: On the fast matrix multiplication in the boundary element method by panel clustering. *Numer. Math.*, Vol.54, pp.463–491, 1989.
- 2) Rokhlin, V.: Rapid solution of integral equations of classical potential theory. *J. Comput. Phys.*, Vol.60, pp.187–207, 1983.
- 3) Sabatfakhri, K. & Katehi, L.B.P.: Analysis of integrated millimeter-wave and submillimeter-wave waveguides using orthonormal wavelet expansions. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol.42, No.12, pp.2412–2422, 1994.
- 4) Wang, G.: A hybrid wavelet expansion and boundary element analysis of electromagnetic scattering from conducting objects. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol.43, No.2, pp.170–178, 1995.
- 5) Goswami, J.C., Chan, A.K. & Chui, C.K.: On solving first-kind integral equations using wavelets on a bounded interval. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol.43, No.6, pp.614–622, 1995.
- 6) 紅露一寛, 阿部和久, 田崎浩章: 離散 wavelet 変換による選点法境界要素解析の効率化. 応用力学論文集, Vol.2, pp.153–162, 1999.
- 7) Koro, K. & Abe, K.: Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis. *Engng. Anal. Bound. Elems.*, Vol. 25, 149–164, 2001.
- 8) Chui, C.K. & Wang, J.Z.: On compactly supported spline wavelets and a duality principle. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol.330, No.2, pp.903–915, 1992.
- 9) von Petersdorff, T., Schwab, C. & Schneider, R.: Multiwavelets for second-kind integral equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol.34, No.6, pp.2212–2227, 1997.
- 10) Rathsfield, A.: A wavelet algorithm for the boundary element solution of a geodetic boundary value problem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.157, pp.267–287, 1998.
- 11) Koro, K. & Abe, K.: Determination of optimal threshold for matrix compression in wavelet BEM. *Boundary Elements XXIII*, eds. Bescos, B.E., Brebbia, C.A., Katsikadelis, J.T. & Manolis, G.D., WIT Press, pp.475–484, 2001.
- 12) von Petersdorff, T. & Schwab, C.: Wavelet approximation for first-kind boundary integral equations on polygons. *Numer. Math.*, Vol.74, pp.479–519, 1996.
- 13) Lage, C. & Schwab, C.: Wavelet Galerkin algorithms for boundary integral equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol.20, No.6, pp.2195–2222, 1999.
- 14) Stroud, A.H. & Secrest, D.: *Gaussian quadrature formulas*, Prentice-Hall, 1966.
- 15) Smith, R.N.L.: Direct Gauss quadrature formulae for logarithmic singularities on isoparametric elements. *Engng. Anal. Bound. Elems.*, Vol.24, pp.161–167, 2000.
- 16) Ozgener, B. & Ozgener, H.A.: Gaussian quadratures for singular integrals in BEM with applications to the 2D modified Helmholtz equation. *Engng. Anal. Bound. Elems.*, Vol.24, pp.259–269, 2000.
- 17) Graham, I.G., Hackbusch, W. & Sauter, S.A.: Hybrid Galerkin boundary elements: theory and implementation. *Numer. Math.*, Vol.86, pp.139–172, 2000.
- 18) Sauter, S.A. & Krapp, A.: On the effect of numerical integration in the Galerkin boundary element method. *Numer. Math.*, Vol.74, pp.337–359, 1996.
- 19) Erichsen, S. & Sauter, S.A.: Efficient automatic quadrature in 3-d Galerkin BEM. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.157, pp.215–224, 1998.
- 20) Lachat, J.C. & Watson, J.O.: Effective numerical treatment of boundary integral equations: a formulation for three-dimensional elastostatics. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol.10, pp.991–1005, 1976.
- 21) Johnston, P.R. & Elliott, D.: Error estimation of quadrature rules for evaluating singular integrals in boundary element problems. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol.48, pp.949–962, 2000.

(2001年4月20日受付)