

境界要素音場解析への Krylov 部分空間法の適用

反復解法を利用した大規模音場数値解析 その1

APPLICATION OF KRYLOV SUBSPACE METHODS
TO BOUNDARY ELEMENT SOUND FIELD ANALYSIS

Numerical analysis of large-scale sound fields using iterative solvers Part I

安田 洋介*¹, 小坂 慶之*², 岡本 則子*³, 大嶋 拓也*⁴佐久間 哲哉*⁵, 坂本 慎一*⁶Yosuke YASUDA, Yoshiyuki KOSAKA, Noriko OKAMOTO, Takuya OSHIMA,
Tetsuya SAKUMA and Shinichi SAKAMOTO

Iterative solvers are widely used for solving large systems of linear equations, and applied to the systems obtained with the acoustical FEM and BEM. In the present paper, the convergence behavior of the Krylov subspace iterative solvers towards the systems with the 3-D acoustical fast multipole BEM, an efficient BEM based on the fast multipole algorithm, is investigated through numerical experiments. The convergence behavior of solvers is much affected by the formulation of the BEM (basic form (BF), normal derivative form (NDF) and Burton-Miller formulation), the complexity of the shape of the problem, and the sound absorption property of the boundaries. In BiCG-like solvers, GPBiCG and BiCGStab2 converge more stable than others, and these solvers are useful when solving interior problems using BF. When solving exterior problems with greatly complex shape using Burton-Miller formulation, all solvers hardly converge without preconditioning, whereas the convergence behavior is much improved with ILU-type preconditioning. In these cases GMRes is the fastest, whereas CGS is one of the good choices, when taken into account the difficulty of determining the timing of restart for GMRes. As for calculation for thin objects using NDF, much more rapid convergence is observed than ordinary interior/exterior problems, especially using BiCG-like solvers.

Keywords : Large-scale sound field analysis, Boundary element method, Iterative solver, Krylov subspace method, Convergence, Preconditioning, Fast multipole algorithm

大規模音場解析, 境界要素法, 反復解法, Krylov 部分空間法, 収束, 前処理, 高速多重極アルゴリズム

1. はじめに

1.1. 研究の背景

近年の計算機の飛躍的進歩と相まって, 建築音響分野においても有限要素法 (FEM), 境界要素法 (BEM), 差分法 (FDM, FDTD) といった波動性を考慮した離散数値計算手法による音場予測が広く活用されるようになってきた。しかしながら, いずれの手法でも解析空間の大規模化及び解析周波数の上昇に伴い計算量・必要記憶容量が増大することから, 現状の計算機環境においても例えば数万 m^3 規模のコンサートホールを必要十分な上限周波数まで解析することは著しく困難である。特に FEM・BEM においては未知数 $N \times N$ の係数行列からなる連立方程式 $Ax = b$ (A : 既知正方行列, x : 未知ベクトル, b : 既知ベクトル) を解く必要があり, 連立方程式を解く必要のない FDM・FDTD に比べて計算量・必要記憶容量の増大はより深刻である。

一方, 大規模な連立 1 次方程式を解くための高速解法として, 反復解法, 中でも Krylov 部分空間法が近年確固とした地位を確立しつつある^{1,2)}。音響分野においても, 有限要素法 (FEM) では室内音場

解析^{3,4)}への適用等, 境界要素法 (BEM) では室内音場解析への適用⁵⁾のほか散乱・放射問題⁶⁾, 連成解析⁷⁾, 3次元大規模遮音壁⁸⁾への適用等が報告されており, その有効性が確認されている。また, 反復解法は大規模問題を解析するための様々な効率化手法の開発^{3,5)}と結びついており, そこでは計算の高速化のみならず, 反復解法の特徴を利用した必要記憶容量の低減も試みられている。筆者らも FEM⁹⁾, BEM⁵⁾のそれぞれで反復解法を利用した効率化手法を研究・開発している。

反復解法は, 初期近似解を基に反復解を逐次計算し, 真の解へと近づけていく方法である。そのため, 反復の収束性が計算時間に直接的に影響するという問題がある。反復解法の収束性に関しては, 例えば正定値エルミート行列に対する CG 法のように理論的に収束が保証されているものもあるが, FEM や BEM に基づく音場解析で得られるような非エルミート行列を持つ連立方程式への適用においては, 解法と収束性の関係は不明確であり, 与えられた問題の性質に大きく依存すると言われている^{9,10)}。従って, 解く問題の性質と各解法の適性を, 解法実行にあたっての適切な設定を含めて把握す

*¹ 東京大学生産技術研究所
日本学術振興会特別研究員 PD・博士(環境学)

*² 東京大学大学院新領域創成科学研究科
大学院生・修士(環境学)

*³ 大分大学大学院工学研究科 大学院生・修士(工学)

*⁴ 新潟大学工学部建設学科 助手・博士(環境学)

*⁵ 東京大学大学院新領域創成科学研究科 助教授・博士(工学)

*⁶ 東京大学生産技術研究所 助教授・博士(工学)

JSPS Research Fellow, Institute of Industrial Science, The University of Tokyo, Ph. D. Environ.

Graduate Student, Institute of Environmental Studies, The University of Tokyo, M. Environ.

Graduate Student, Graduate School of Engineering, Oita University, M. Eng.

Research Assoc., Faculty of Engineering, Niigata University, Ph. D. Environ.

Assoc. Prof., Institute of Environmental Studies, The University of Tokyo, Dr. Eng.

Assoc. Prof., Institute of Industrial Science, The University of Tokyo, Dr. Eng.

ることが重要であり、そのことが不適切な使用による解法の発散を防ぐのみならず計算時間の短縮・推定につながる。また、反復解法の収束性の把握は前述した様々な効率化手法^{3,5,9)}の効果的な運用のためにも不可欠であると言える。

1.2. 本稿の目的

以上の背景から、本研究ではFEM及びBEMによる音場解析へ反復解法を適切に適用するための各種検討、特にその収束性について詳細に検討する。「その1」として、本稿ではBEMによる音場解析への反復解法の適用性について扱う。

BEMにおける反復解法の収束性やその改善に関しては、音響分野においてもいくつか研究が行われているが^{7,11)}、数値実験としては、理論的に扱える単純形状の問題や比較的小規模な問題を対象としたものが多かった。近年Marburg *et al.*は、小ホール規模の3次元実空間を含む複数の音場を対象として、RBiCGStab, GMRes, CGNR, TFQMRの4つのKrylov部分空間法を詳細に比較検討しており、Arnoldi原理に基づくGMResが最もロバストな解法であると結論づけた¹²⁾。しかしながら、GMResに代表されるArnoldi原理に基づく解法は反復のたびに1反復あたりの計算量・必要記憶容量が増加するという欠点から、「リスタート版」(反復計算がある程度進んだところで反復過程で増加した情報を解放して計算をリスタートさせる)が使用されることが多く(GMRes(*l*)), リスタートする時点*l*によっては収束性の低下や発散を招く恐れのある扱いにくい側面を持つことが知られている⁹⁾。また、Marburg *et al.*の論文では、反復のたびに1反復あたりの計算量・必要記憶容量が増加しない解法群であるLanczos原理に基づく解法群についてはCGSやGPBiCGなどの著名な解法について検討がなされていない。収束性状が同様であれば、Lanczos原理に基づく解法の方が計算効率及び扱いやすさの点で優れていることから、同解法群の適用性についてより詳細に把握しておく必要がある。また、BEM解析において頻繁に行われる法線方向微分型(normal derivative form, 以下NDF)の積分方程式に基づく薄板問題の解析¹³⁾については、筆者らの知る限り収束性についての報告は見当たらない。

本稿では、BEMを用いた3次元音場解析に限定し、Krylov部分空間反復解法の収束性とその収束改善方法の効果について数値実験を通して検討する。解析対象として数万自由度の比較的大規模な問題を扱うことから、従来のBEMの効率化手法である高速多重極BEM(fast multipole BEM: FMBEM)⁵⁾を用いることとするが、得られた知見は従来のBEMにおいても、少なくとも定性的には適用可能と考えられる。反復のたびに計算量・必要記憶容量が増加しないLanczos原理に基づく反復解法の代表であるBiCG系反復解法群(BiCG法の算法に基づく解法群)の収束性とその改善について、頑健な手法とされるGMResとの比較を通して検討する。

第2章では、本稿で用いる反復解法や収束改善法について述べる。第3章では、解法をBiCG系解法群に絞り、内部・外部問題のそれぞれについて実モデルを含めた複数の解析対象を設定して比較検討を行う。BEMにおける3種の定式化、即ち通常用いる基本型(basic form, 以下BF)、法線方向微分型(NDF)、及び外部問題において見かけの固有周波数の問題を回避するための両者の線形結合型(Burton-Miller法, 以下BM)¹⁴⁾について、境界条件・形状・各種収束改善法が反復解法の収束性状に与える影響を整理する。第4章では、第3章にて収束性状が良好であった解法を用い、収束性状及び計算効率の観点からGMResと比較する。また、NDFによる薄板

解析についても取り扱う。

2. 反復解法について

2.1. Krylov部分空間反復解法とFMBEMについて

反復解法は、連立1次方程式 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ を解く際、初期近似解 \mathbf{x}_0 を基に反復解 \mathbf{x}_i を何らかの手順で繰り返し計算し、反復残差のノルム $\|\mathbf{r}_i\| = \|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}_i\|$ が十分小さくなった時点で計算を終了する方法である。本稿で用いるKrylov部分空間反復解法では系の係数行列 \mathbf{A} と何らかのベクトルとの積(行列ベクトル積)の反復計算が必要であり、この部分が全演算量の大部分を占める。BEMのように \mathbf{A} が $N \times N$ の密行列の場合、行列ベクトル積の演算量は $O(N^2)$ となることから、 N に比べて反復回数が十分小さければ直接法の演算量 $O(N^3)$ に比べて計算量が著しく低減される。さらにFMBEMでは、高速多重極アルゴリズム^{15,16)}を用いることで係数行列 \mathbf{A} を直接算出することなく行列ベクトル積を効率的に算出する。具体的には、行列 \mathbf{A} を近傍要素間の影響関数部分 \mathbf{A}_{near} と遠方要素間のそれ \mathbf{A}_{far} とに分け、行列ベクトル積 $\mathbf{Au} = \mathbf{A}_{\text{near}}\mathbf{u} + \mathbf{A}_{\text{far}}\mathbf{u}$ の $\mathbf{A}_{\text{far}}\mathbf{u}$ を多重極展開を用いて効率的に計算する。これにより、建築空間のように境界要素節点が空間内に2次元的に分布する場合、反復演算部の計算量は $O(N \log N)$ にまで低減される。また、行列全体を保持する必要がないことから、必要記憶容量も $O(N \log N)$ にまで低減される。FMBEMの更なる詳細については文献⁵⁾を参照。

2.2. 用いる反復解法の種類

本稿で用いるKrylov部分空間反復解法は以下のとおりである。

- ・ Lanczos原理に基づく解法: CGS¹⁷⁾, BiCGStab¹⁸⁾, BiCGStab2¹⁹⁾, GPBiCG²⁰⁾。いずれもBiCG系解法群。
- ・ Arnoldi原理に基づく解法: GMRes(*l*)²¹⁾。

なお、同じくLanczos原理に基づく解法であるQMRやBiCG、正規方程式に変形した上で適用するCGNRやCGNEについては、いずれも連立1次方程式の係数行列 \mathbf{A} の転置行列が必要であり、行列を生成しないFMBEMに適用できないことから扱わない。

2.3. 収束判定について

収束判定基準として以下の式を用いる。

$$\frac{\|\mathbf{r}_i\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2} = \frac{\|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}_i\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2} < \varepsilon \quad (1)$$

但し、 \mathbf{x}_i , \mathbf{r}_i : 反復*i*回での反復近似解とその残差、 ε : 収束判定値、 $\|\cdot\|_2$: 2ノルム。

Eq. (1)が満たされるまで反復演算を続けることとなる。本稿では $\varepsilon = 10^{-6}$ としている。

2.4. 反復回数について

個々の解法により反復1回あたりの演算量が異なるため、ここでは反復演算内で大部分を占める「行列ベクトル積」の演算の回数を計算時間の評価に用いる。

2.5. 収束改善について

(1) 前処理 連立1次方程式を反復解法で解く際、収束改善のために前処理を施すことが一般的である。前処理行列 \mathbf{M} を元の係数行列 \mathbf{A} を近似するように $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 \approx \mathbf{A}$ と与え、解くべき方程式を以下のように変換することで収束改善を図る。

$$\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{AM}_2^{-1}(\mathbf{M}_2\mathbf{x}) = \mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{b} \quad (2)$$

\mathbf{M}_1 , \mathbf{M}_2 のどちらかは単位行列であることも多い。前処理については、構築・適用のコストを抑えつつ優れた収束改善効果をあげるこ

とのできるものが理想となる。既に様々なものが提案されているが、本稿で扱う非エルミートな密行列に対して効果的に適用できるものは限られる。その上、FMBEMでは係数行列 A を直接算出しないことから適用可能な前処理はさらに限定される。以上の理由から、本検討では以下の2つの前処理のみを試みることとする。

対角化前処理⁹⁾ 前処理行列 M が係数行列 A の対角成分のみで構成されるものである。付加的な計算量・記憶容量が不要、並列化特性が高いなどの利点がある。熱問題・弾性問題のBEMに関してCGS, BiCGStab, GMResに有効との報告がある²²⁾。一方で音響問題のBEMに関しては効果が小さいという報告もある¹²⁾。

ILUT 前処理 (threshold based incomplete LU factorization²³⁾) 不完全LU (ILU) 分解に基づく前処理の1種であり、前処理行列の fill-in 要素 (0でない要素) の相対的な最小値 τ と1行あたりの最大の fill-in 要素数 p の2つの閾値で前処理の構築・適用のコストを制御する手法である。完全LU分解は $M_1 M_2 = LU = A$ を求めることに相当することから、完全LU分解に近づけるほど (ILUTでは p を大きく、 τ を小さくするほど) 前処理の効果が高まると予想されるが、完全LU分解は直接解法と同様の計算コストが必要となる。従ってILU分解に基づく前処理では、不完全さを高め行列分解のコストを低減しつつ、如何に前処理行列として十分な効果を発揮できるものを構築できるかが問題となる。一方、ILU分解に基づく前処理はFMBEMなどの係数行列を生成しない手法には直接的な適用ができない。Schneider *et al.* はFMBEMなどの効率化BEMにおいても近傍要素間の計算は従来のBEMと同様の方法で直接行われる点に注目し、この部分のみを要素に持つ疎行列 (A_{near}) についてILUT前処理を行っており、GMResとCGNRに対する有効性を確認している²⁴⁾。本検討でもこの方法に準じるものとする。パラメータに関しては、 $\tau = 10^{-5}$ に固定し²⁴⁾、記憶容量に大きく影響する p のみを変化させて影響を調べる。以下では $ILUT(p)$ として表示する。

(2) 初期シャドウ残差の扱い BiCG系解法はその算法の中に2つの残差ベクトルを持っている。初期近似解 x_0 から自動的に決定される初期残差 r_0 と異なり、初期シャドウ残差 r_0^* には与え方に任意性が残っている (通常 $r_0^* = r_0$ とされることが多い)。藤野ら²⁵⁾ は r_0^* に一様乱数を与えることにより収束性に著しい向上が見られることを数値実験により確認している。本報告ではその中で最も効果的であった「 $r_0 = b$ (即ち $x_0 = 0$) 及び $r_0^* =$ 擬似乱数」 (以下 $r_0^* = random$) の組み合わせを収束改善法の1つとして試みる。原理の詳細は文献²⁵⁾を参照されたい。

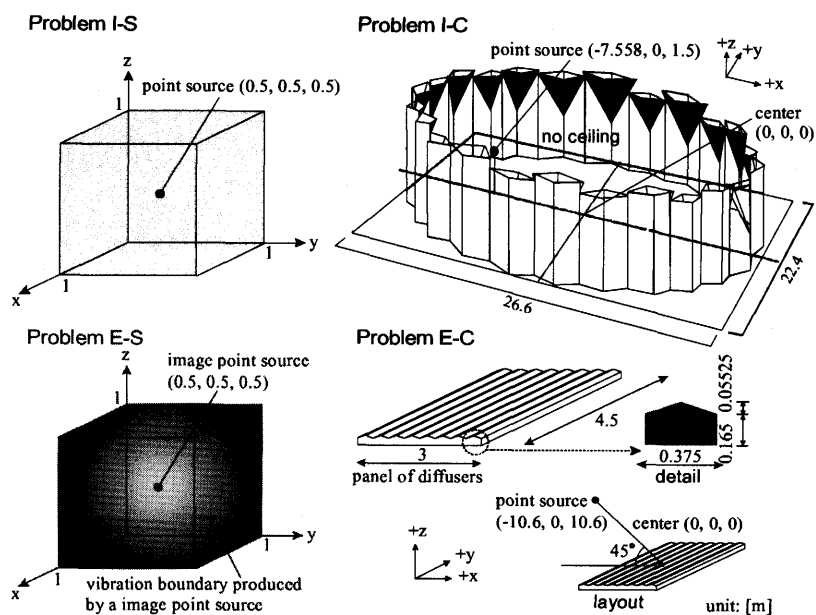


Fig. 1: Analysis models: a cube (I-S) and an auditorium (I-C) are interior problems, and a vibrating cube (E-S) and a diffuser (E-C) are exterior problems.

Table 1: Difference in calculation results for Problem I-S, between using the mode summation method and using the FMBEM with unpreconditioned iterative solvers.

DOF	Freq. [Hz]	Formulation	10 log ₁₀ ε _{ite} [dB]			
			CGS	BiCGStab	BiCGStab2	GPBiCG
1,536	500	BF	-10.95	-10.95	-10.95	-10.95
		NDF	-15.64	-15.64	-15.64	-15.64
6,144	1,000	BF	-16.26	-16.26	-16.26	-16.26
		NDF	-	-16.85	-16.85	-16.85
24,576	2,000	BF	-	-8.24	-8.24	-8.24
		NDF	-	-15.88	-15.88	-15.88
98,304	4,000	BF	-16.95	-16.95	-16.95	-16.95
		NDF	-	-17.85	-17.85	-17.85

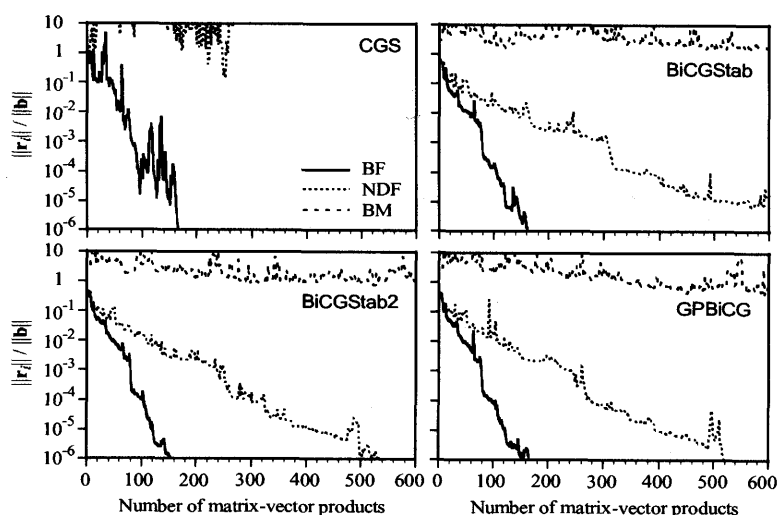


Fig. 2: Effect of kinds of iterative solver on the residual of iteration for Problem E-S at 4,000 Hz, using FMBEM in BF, NDF and BM. DOF is 98,304.

3. BiCG 系反復解法の検討

3.1. 数値実験方法

解析対象 内部・外部問題のそれぞれに対して単純・複雑形状の問題を設定し、計4問題とする。解析対象をFig. 1に示す。単純形状の問題 I-S、E-S は、境界条件によっては理論解が既知となることから、計算精度の検討が可能である。問題はいずれも AIJ 環境工学委員会音環境運営委員会音響数値解析小委員会のベンチマーク問題²⁶⁾から採用している。なお、境界条件については特に断らない限り以下のとおりとする²⁶⁾。問題 I-S、E-C：全面剛境界。問題 I-C：天井がない空間のため、仮想天井及び壁頂部・仮想天井間に仮想壁を設置し、垂直入射吸音率 1 に相当する吸音境界とする（音響インピーダンスは実数のみ）。他は剛境界。問題 E-S：全面振動境界（立方体中心に点音源を仮想的に置き、立方体のない自由空間を想定したときに点音源が立方体表面上に生み出す粒子速度を与える）。

定式化 基本型（BF）と法線方向微分型（NDF）を用いる。但し外部問題に対しては Burton-Miller 法（BM）も合わせて用いる。

境界条件 吸音率 α を変化させて影響を調べる。 α に相当する音響インピーダンスを実数として与えている。

収束改善法 ここでは対角化前処理と「 $\mathbf{r}_0^* = \text{random}$ 」を用いる。

計算条件・計算機環境 境界要素として、要素サイズが解析波長の 1/8 以下の一定要素を用いる。FMBEM の各種パラメータについては文献²⁷⁾に準ずる。反復解法の初期値としては、特に断らない限り音圧ベクトルの初期近似解 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{r}_0^* = \mathbf{r}_0$ としている。計算機は HITACHI SR8000/MPP (1.8 GFLOPS/processor)である。逐次計算のみとし、並列処理は行わない。

3.2. 結果と考察

(1) **計算精度** 内部問題で剛境界とした場合の、モード展開法による理論解（モード数は 3 次元の各軸について 210）と FMBEM による反復解の境界節点上での音圧分布の違いを Table 1 に示す。ここで、評価量として次式を用いた。

$$\varepsilon_{ite} = \frac{\sum_n \|p_{th}(\mathbf{r}_n)\|^2 - \|p_{ite}(\mathbf{r}_n)\|^2}{\sum_n \|p_{th}(\mathbf{r}_n)\|^2} \quad (3)$$

但し、 $p_{th}(\mathbf{r}_n)$, $p_{ite}(\mathbf{r}_n)$: それぞれ節点位置 \mathbf{r}_n での理論解音圧, FMBEM による反復解音圧。

CGS では丸め誤差の影響により収束しない場合があり、特に NDF で多く見られる。一方収束したものについては、CGS も含め解法の違いによる差は見られない。これは理論解が既知である外部問題 E-S でも同様であった。このことから、以下では専ら収束性状の評価のみにて反復解法と問題の適性を検討する。

(2) 収束性

定式化の影響 外部問題 E-S（単純形状）に対し各解法を前処理なしで用いた場合の反復残差の履歴を Fig. 2 に示す。解法によらず、BF に比べ NDF・BM の方が明らかに収束が遅い。この傾向は他の問題の解析においても同様であった。BM の方が BF に比べ収束が悪いことは文献¹²⁾においても指摘されている。これらのことから、一般に NDF で得られる係数行列が BF に比べ悪条件であり、BF と NDF の線形結合である BM にもその特徴が受け継がれているものと考え

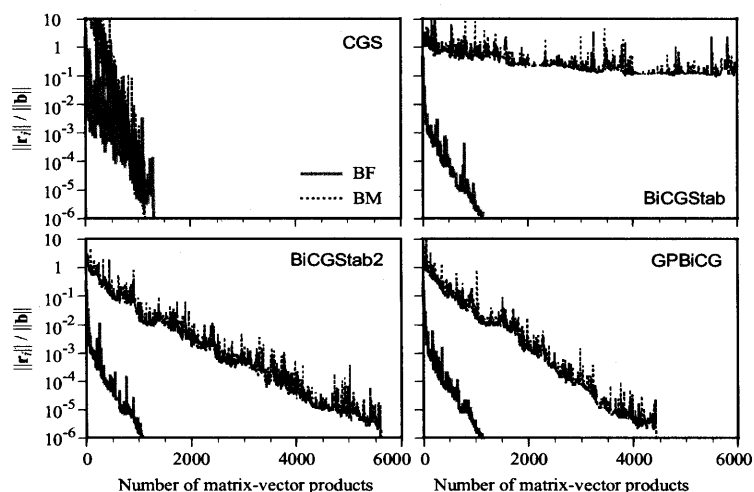


Fig. 3: Effect of kinds of iterative solver on the residual of iteration for Problem E-C at 1,000 Hz, using FMBEM in BF and BM. DOF is 24,616.

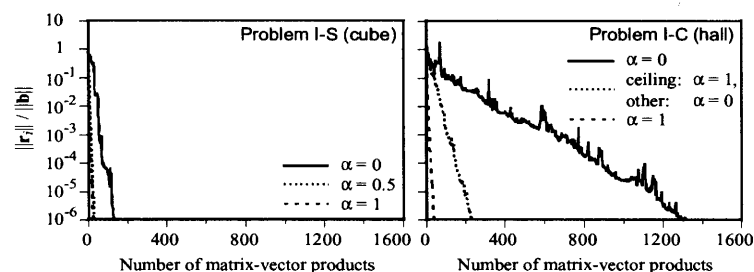


Fig. 4: Effect of shapes and boundary conditions on the residual of iteration, using FMBEM in BF with unpreconditioned GPBiCG. DOF are 24,576 (cube) and 24,514 (hall). α is the absorption coefficient on the surfaces.

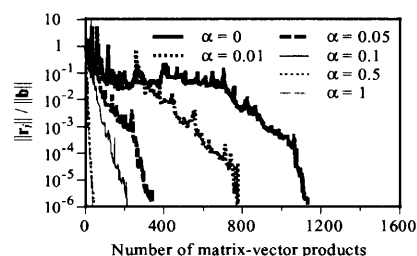


Fig. 5: Effect of absorption coefficients α on the residual of iteration for Problem I-C at 63 Hz, using FMBEM in BF with unpreconditioned BiCGStab. DOF is 6,110.

られる。また、BF に関しては手法間の差がほとんどない結果となっており、これは他の解析対象でも同様であった。

反復解法の種類の影響 Fig. 2 から、CGS の収束が不規則であり、NDF・BM で発散する傾向があることがわかる。他の 3 解法の傾向はほぼ同様であるが、NDF の場合には GPBiCG と BiCGStab2 の収束が BiCGStab より速い。外部問題 E-C（複雑形状）を解析した場合の反復残差の履歴を Fig. 3 に示す。BM では、BiCGStab の収束が他の手法に比べ著しく速い。一方 CGS では、単純形状の場合（Fig. 2）と対照的に BM における収束が他の解法と比べ著しく速い結果となっている。CGS は反復残差を決定する残差多項式が BiCG の残差多項式の二乗の形をしており、この二乗性が収束の加速性にも非収束

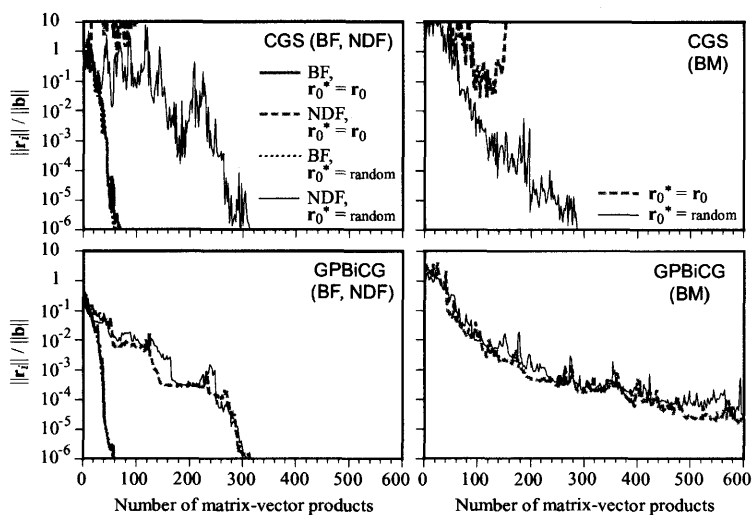


Fig. 6: Effect of initial shadow residual r_0^* on the residual of iteration for Problem E-S at 2,000 Hz, using FMBEM in BF, NDF and BM. DOF is 24,576.

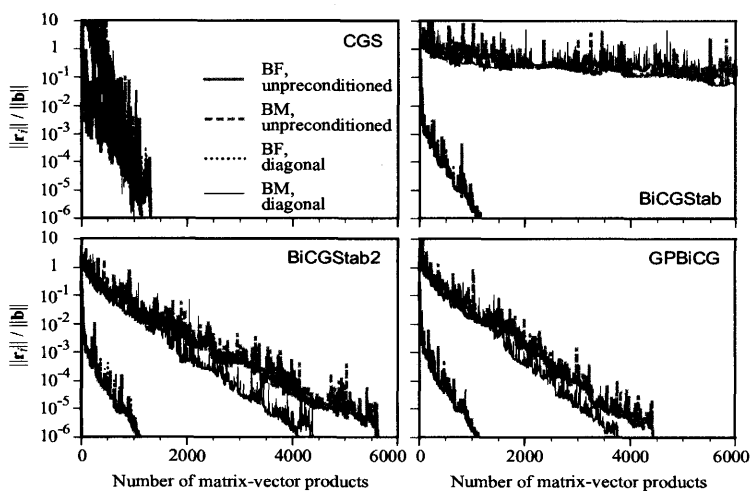


Fig. 7: Effect of diagonal preconditioning on the residual of iteration for Problem E-C at 1,000 Hz, using FMBEM in BF and BM. DOF is 24,616.

の拡散性にも寄与することが指摘されている²⁸⁾。このことからわかるように、CGSはその収束性が解く問題に大きく依存する不安定な解法であるが、ある種の問題に対して速く収束する可能性がある。なお、本4問題の解析において前処理なしのCGSが他の前処理なしのBiCG系解法と比べ著しく優れた収束性を見せたのは、複雑形状の外部問題にBurton-Miller法を適用した場合のみであった。この種の問題に対して速く収束するというCGSの特性は次章でも確認される。

境界形状の影響 境界形状・境界条件の違いが反復残差に及ぼす影響をFig. 4に示す。単純形状(I-S)と複雑形状(I-C)では問題の自由度をほぼ揃えている。境界条件が同じ場合、単純形状(I-S)の場合に比べ複雑形状(I-C)の方が収束が明らかに遅いことがわかる。これは反復解法及び内部・外部問題によらず同様であった。

境界条件の影響 Fig. 4から、問題によらず吸音率 α の増加に伴い収束が速くなることがわかる。 $\alpha=0$ の周辺で吸音率をより細かく変化させた場合の反復残差履歴の1例をFig. 5に示す。完全剛($\alpha=0$)の場合に比べると、わずかな吸音率でも収束改善に大きな効果があ

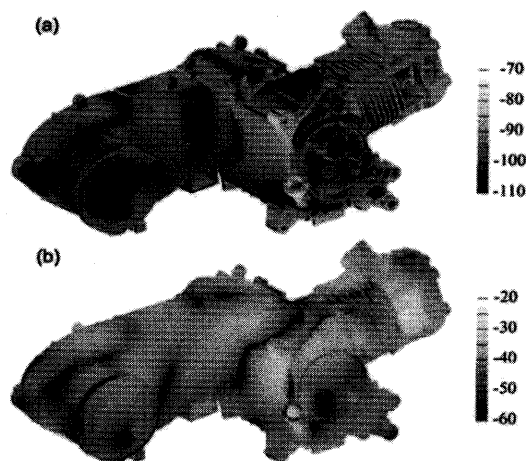


Fig. 8: An engine model (Problem E-C2): (a) relative vibration velocity level distribution, and (b) relative SPL distribution at 1,977 Hz, calculated using FMBEM based on Burton-Miller formulation (BM). DOF is 42,152.

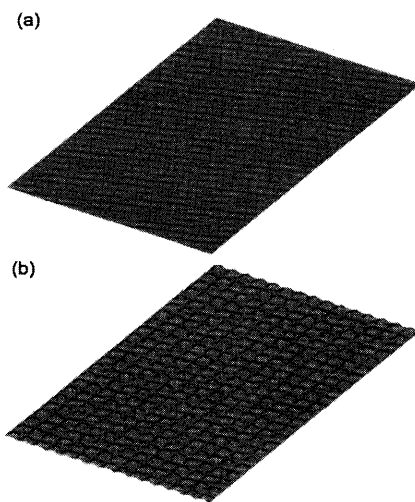


Fig. 9: Analysis models: (a) a plane rigid panel (Et-S), and (b) a 2-D sinusoidal-shaped rigid panel (Et-C). The size of the panels and the condition of incidence from a point source is the same as the problem E-C. DOF is 45,620 for both models.

ることが見て取れる。

収束改善法の効果 「 $r_0^* = \text{random}$ 」の設定が反復残差履歴に及ぼす影響をFig. 6に示す。「 $r_0^* = r_0$ 」では、解法によらずNDF・BMの収束が悪く、CGSでは発散している。一方「 $r_0^* = \text{random}$ 」の設定では、そのCGSにのみNDF・BMにて著しい収束改善が見られ、結果的にBMにおいては他の解法以上の優れた収束性を見せている。このことから、外部問題にBMを適用する場合にはCGS+「 $r_0^* = \text{random}$ 」の設定を用いることが良策の1つとなる可能性がある。CGSのみに収束改善効果が現れる点については以下のような原因が考えられる。即ち、CGSでは前述のとおり反復残差を決定する残差多項式がBiCGの残差多項式の二乗の形をしているのに対し、他のBiCG系解法では残差多項式に収束安定化を図るための項が導入されており、これが逆効果を及ぼし収束の加速を妨げている可能性がある。一方対角化前処理については、「外部問題」+「NDF or BM」+「要素サイズがばらつく場合」の組み合わせ時のみに若干の改善効果が見られた。改善効果の見られた解析対象の反復残差履歴をFig. 7に示す。これは、NDF及びBMでは行列要素が $1/r^2$ の強い特異性を持つ積分核よ

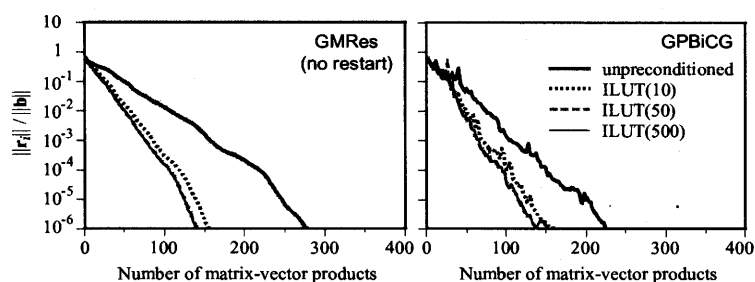


Fig. 10: Effect of the number of fill-in elements p for $ILUT(p)$ on the residual of iteration for Problem I-C at 125 Hz, using FMBEM in BF. DOF is 24,514.

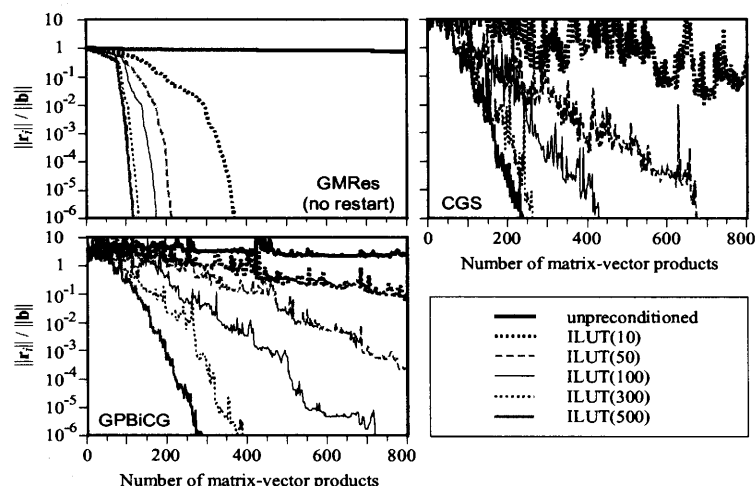


Fig. 11: Effect of the number of fill-in elements p for $ILUT(p)$ on the residual of iteration for Problem E-C2 at 3,000 Hz, using FMBEM in BM. DOF is 42,152.

り構成されていることから要素サイズのばらつきにより対角要素の値が変動しやすく、対角スケーリングの効果が出やすくなっていることが一因であると考えられる。

4. GMRes(l)法との比較・ILUTの適用

ここでは前章で総合的に安定した収束を見せた GPBiCG と、Burton-Miller 法に対し最速の収束を見せた CGS の収束性を、頑健な手法とされる GMRes と比較する。また、文献²⁹⁾で GMRes に効果的であった ILUT 前処理を GPBiCG と CGS にも適用し効果を調べる。さらに、NDF による厚み 0 の物体の解析 (薄板解析) の収束性についても検討する。

4.1. 数値実験方法

解析対象 内部問題として Fig. 1 の小ホール (I-C) を、外部問題としては、より複雑な形状としてエンジンモデル (E-C2) を扱う。エンジンモデルの境界条件は全面振動境界とし、構造解析を基に得られた法線方向振動速度を用いている。Fig. 8(a)にエンジンモデルの形状と、境界条件として用いた振動速度分布の 1 例を示す。また、薄板問題として Fig. 9 に示す 2 種の剛な厚み 0 の長方形の板 ((a) 平板 (Et-S), (b) 直交する 2 方向に sine 形状の断面を持つ波型板 (Et-C)) を扱う。

定式化 内部問題に対しては前章で常に収束が速かった基本型 (BF) を、外部問題に対しては Burton-Miller 法 (BM) を、薄板問題に対しては法線方向微分型 (NDF) を用いる。

収束改善法 ILUT(p)を用いる。なお「 $\mathbf{r}_0^* = \text{random}$ 」については前

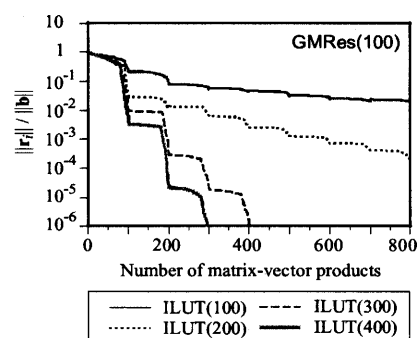


Fig. 12: Effect of restart number l for $GMRes(l)$ on the residual of iteration for Problem E-C2 at 3,000 Hz, using FMBEM in BM. $l = 100$, and DOF is 42,152.

章で効果のあった CGS にのみ適用し効果を調べたが、ここではいずれのケースでも通常の設定「 $\mathbf{r}_0^* = \mathbf{r}_0$ 」の場合とほとんど同様の収束性状であった。

計算条件・計算機環境 計算条件は前章と同様である。逐次計算のみとし、並列処理は行わない。計算機は VT64 Opteron Workstation (Opteron 2 GHz) である。

4.2. 結果と考察

(1) **解析結果** Fig. 8(a)の振動速度分布を用いて BM にて解析したエンジンモデルの解析結果の 1 例を Fig. 8(b)に示す。なお、反復解法及び前処理による音圧レベルの違いは最大でも 0.01 dB 程度であった。

(2) 収束性

内部問題 小ホール (I-C) を BF で解析した場合の反復残差の履歴を Fig. 10 に示す。前処理なしの場合、GPBiCG はロバストとされる GMRes(no restart) (以下 GMRes(∞)) よりも収束が速く、ILUT 前処理を施した場合でも GMRes(∞)と同様の収束性状となっている。なお、3.1. に記したように本問題は天井面付近が吸音境界であるが、より収束しにくいように仮想的に全面剛とした場合でも両者の収束性状は前処理の有無に関わらずほとんど同様であった。本計算例から判断して、内部問題の解析においてはリスタートする必要のない GPBiCG の方が GMRes よりも扱いやすさの点で優良と言える。

外部問題 エンジンモデル (E-C2) を BM で解析した場合の反復残差の履歴を Fig. 11 に示す。前処理なしの場合、どの解法でも全く収束しておらず、BM が非常に収束しにくいことがここでも確認できる。一方 ILUT(p)を施した場合、解法によらず収束性が大きく改善している。 p の影響としては、値が大きいくほど ILU 分解が完全 LU 分解に近づくことから改善効果が大きくなっている。特に GMRes(∞)では小さな p の値でも改善が大きく、内部問題の場合と対照的に解法間で最も速い収束を示している。BiCG 系解法間では CGS が GPBiCG よりも収束が速くなっており、「CGS が問題によっては他の BiCG 系解法より速く収束する」という前章での傾向がこの解析結果からも再確認できる。以上の結果から、反復解法の収束性だけを考慮した場合、Burton-Miller 法による外部問題の解析においては ILUT 前処理つき GMRes(∞)が最良であり、ついで ILUT 前処理つき CGS となる。次に GMRes(l)のリスタート l が収束性状に及ぼす影響を Fig. 12 に示す。リスタートの度に停滞が起こることがわかる²⁹⁾。また、リスタートなし (Fig. 11) では ILUT(p)の $p \geq 100$ では p によ

る収束性状の大きな変化がないのに対し、リスタートした場合はその後の収束性状が全く異なり、 p が小さいほど収束が遅い。その結果、他の解法（ここでは CGS）よりも収束が遅くなる場合があることがわかる。このことから、GMRes(l)においてはリスタートをできるだけ避けることが計算時間短縮の面から重要であること、計算機の記憶容量による制限からリスタートが止むを得ない場合は適切に前処理をした CGS 等の BiCG 系解法の方が収束が速い可能性があると言える。

薄板問題 平板 (Et-S) 及び波型板 (Et-C) を NDF で解析した場合の反復残差の履歴をそれぞれ Figs. 13, 14 に示す。全体的に、ほぼ同自由度 (Fig. 11) またはそれ以下の自由度 (Fig. 3) の外部問題と比べて著しく収束が速い。これらの外部問題と本薄板問題とで大きく異なる点は内部空間の有無であることから、薄板問題では解の一意性の問題が発生しないことが速い収束と関係している可能性が示唆される。解法間で比較すると、前処理なしの場合 CGS と GPBiCG が GMRes(∞)より収束が速いこと、ILUT 前処理を施した場合でも GMRes(∞)と同様かそれより速い収束性状となっていることがわかる。これらのことから、薄板解析で得られる連立 1 次方程式は内部問題の場合と同様比較的収束しやすいと考えられ、収束性状と扱いやすさから考えて BiCG 系解法が GMRes より適した解法であると考えられる。

(3) 計算効率 エンジンモデル (E-C2) を BM で解析した場合の計算時間の内訳を解法ごとに Fig. 15 に示す。どの解法でも ILUT(p)の p の増加に伴い反復計算部の計算時間は減少しているが、反面 ILUT 前処理のための計算時間が増加するため、全計算時間を最小にする p を計算実行前に判断するのは難しい。ILUT 前処理のための付加的な必要記憶容量に関しては、本計算例では、例えば $p = 100$ で 170 MB (全体の 6%)、 $p = 500$ で 844 MB (全体の 25%) であり、 p によっては無視できない量となった。GMRes(l)における必要記憶容量のうち反復ごとに増加する部分 (BiCG 系解法の必要記憶容量との差の部分) に関しては、例えば $l = 200$ (ILUT(100)適用時にリスタートなしで計算を終了できる) では 136 MB (全体の 5%) であったが、安全側の設定、例えば問題の自由度 42,152 の 1 割程度の $l = 5,000$ に設定した場合では 3.8 GB (全体の 60%) にまで達した。計算時間と記憶容量の兼ね合いを見ながら適切な l を計算実行前に決定するにはある程度の経験が必要であり、この点を考慮すると、最適化された GMRes には及ばないものの、Burton-Miller 法においては「CGS+ILUT 前処理」も十分に利用価値が高いと思われる。

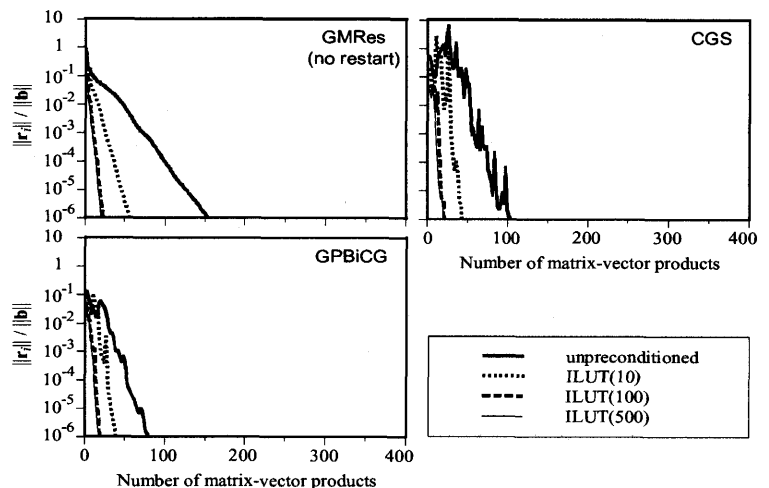


Fig. 13: Effect of the number of fill-in elements p for ILUT(p) on the residual of iteration for Problem Et-S at 2,000 Hz, using FMBEM in NDF. DOF is 45,620.

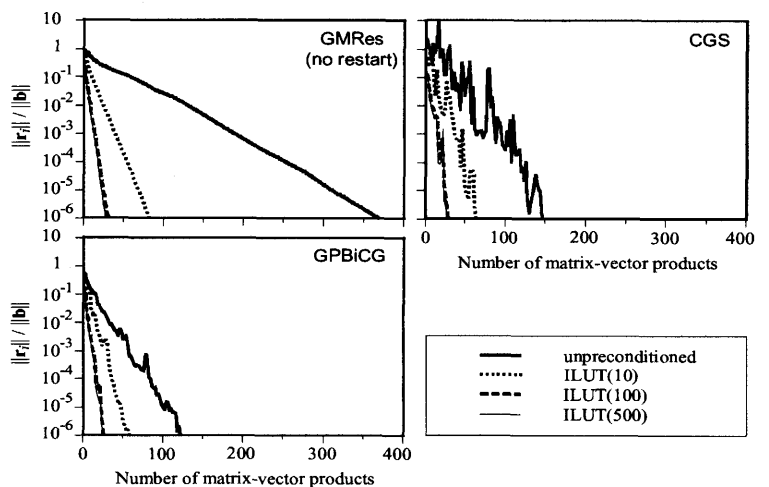


Fig. 14: Effect of the number of fill-in elements p for ILUT(p) on the residual of iteration for Problem Et-C at 2,000 Hz, using FMBEM in NDF. DOF is 45,620.

5. まとめ

高速多重極 BEM を用いた 3 次元音場解析における Krylov 部分空間反復解法の収束性とその収束改善方法の効果について、数値実験を通して検討した。得た知見を要約すると以下のとおりである。

1. BEM 解析の場合、全ての音響問題に対して収束の良好な解法は存在しない。扱う問題により解法を使い分ける必要がある。
2. 解析対象や解法を固定した場合、BF に比べ NDF・Burton-Miller

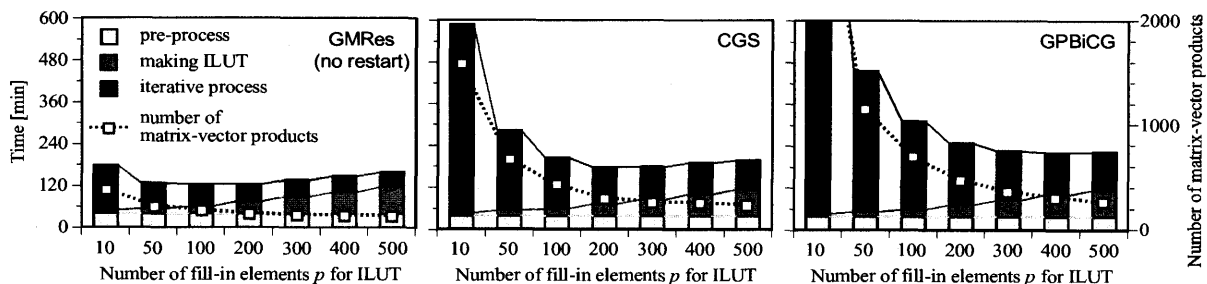


Fig. 15: Effect of the number of fill-in elements p for ILUT(p) on total calculation time for Problem E-C2 at 3,000 Hz, using FMBEM in BM. DOF is 42,152.

法の収束が遅いこと、境界の吸音率が高いほど収束が速いことを確認した。また、解法を固定した場合、同程度の自由度の問題であれば形状の複雑な方が収束が遅いことを確認した。

3. BiCG 系解法群では、全体的に GPBiCG と BiCGStab2 が安定した収束を見せた。内部問題の BF での解析においては有力な解法と言える。
4. CGS は不安定な解法であるが、ある種の問題に対して他の BiCG 系解法より速い場合がある。特に外部問題を Burton-Miller 法で解く場合には有効である可能性が高い。
5. 「初期シャドウ残差=擬似乱数」の設定は本検討では CGS へのみ収束改善効果があった。
6. 対角化前処理は多くの場合効果が微小であるが、要素サイズがばらついている場合、NDF や Burton-Miller 法による解析で若干の改善効果が見られた。
7. ILUT 前処理は、エンジンモデルのような非常に複雑な形状を持つ問題の解析では解法によらず著しい収束改善効果を見せた。複雑形状を持つ外部問題の Burton-Miller 法による解析においては、頑健な GMRes も含めどの解法でも収束しない場合があったが、いずれも ILUT 前処理の適用により著しく収束が改善した。その場合 GMRes(リスタートなし)が最速であったが、計算機の必要記憶容量の制限からリスタートが止むを得ない場合は、CGS も選択肢の 1 つとなり得る。
8. 法線方向微分型による薄板解析においては、同自由度の外部問題と比べて著しく収束が速かった。特に GPBiCG や CGS などの BiCG 系解法が速く、GMRes に対する扱いやすさの点からも推奨される。

謝辞

日本建築学会環境工学委員会音環境運営委員会音響数値解析小委員会の各位に記して謝意を表す。本研究には日本学術振興会科学研究費補助金（特別研究員奨励費 No. 16-10186 ならびに基盤研究(A) (1) 15206064）の助成を頂いた。

参考文献

- 1) Saad, Y. and van der Vorst, H. A.: "Iterative solution of linear systems in the 20th century," *J. Comp. and Appl. Math.*, Vol. 123, pp. 1-33, 2000.
- 2) Cipra, B. A.: "The best of the 20th century: editors name top 10 algorithms," *SIAM News*, Vol. 33, No. 4, pp. 1-2, 2000.
- 3) Otsuru, T., et al., "Basic concept, accuracy and application of large-scale finite element sound field analysis of rooms," *Proc. ICA 2004 (Kyoto)*, pp. I-479-482, 2004. 4.
- 4) 岡本則子, 大鶴徹, 富来礼次, "有限要素法による室内音場解析における COCG 法の収束性", 日本音響学会建築音響研究会資料, AA2005-13, 2005.
- 5) Sakuma, T. and Yasuda, Y., "Fast multipole boundary element method for large-scale steady-state sound field analysis. Part I: setup and validation," *Acta Acustica united with Acustica*, Vol. 88, pp. 513-525, 2002.
- 6) Schneider, S., "Application of fast methods, for acoustic scattering and radiation problems," *J. Comp. Acoust.*, Vol. 11, No. 3, pp. 387-401, 2003.
- 7) Chen, S. and Liu, Y., "A unified boundary element method for the analysis of sound and shell-like structure interactions. II. Efficient solution techniques," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 108, No. 6, pp. 2738-2745, 2000.
- 8) 高村紀行, 佐久間哲哉, 安田洋介, "3 次元 FMBEM による遮音壁先端部の減衰補正量の計算", 日本音響学会講演論文集, pp. 869-870, 2004. 9.

- 9) Barret, R., et al., *Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, USA, 1994.
- 10) 藤野清次, 張紹良, 応用数値計算ライブラリ 反復法の数理, 朝倉書店, 1996.
- 11) Amini, S. and Maines, N. D., "Preconditioned Krylov subspace methods for boundary element solution of the Helmholtz equation," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 41, pp. 875-898, 1998.
- 12) Marburg, S. and Schneider, S., "Performance of iterative solvers for acoustic problems. Part I. Solvers and effect of diagonal preconditioning," *Engng. Anal. Bound. Elem.*, Vol. 27, pp. 727-750, 2003.
- 13) Terai, T., "On calculation of sound fields around three dimensional objects by integral equation methods," *J. Sound Vib.*, Vol. 69, pp. 71-100, 1980.
- 14) Burton, A. J. and Miller, G. F., "The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary value problems," *Roy. Soc. London, Ser. A*, Vol. 323, pp. 201-210, 1971.
- 15) Rokhlin, V., "Rapid solution of integral equation of classical potential theory," *J. Comput. Phys.*, Vol. 60, pp. 187-207, 1983.
- 16) Greengard, L., *The rapid evaluation of potential fields in particle systems*, The MIT press, 1987.
- 17) Sonneveld, P., "CGS, a fast Lanczos-type solver for nonsymmetric linear systems," *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 10, pp. 36-52, 1989.
- 18) van der Vorst, H. A., "Bi-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems," *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 13, No. 2, pp. 631-644, 1992.
- 19) Gutknecht, M. H., "Variations of BiCGSTAB for matrices with complex spectrum," *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol. 14, No. 5, pp. 1020-1033, 1993.
- 20) Zhang, S.-L., "GPBi-CG: Generalized product-type methods based on Bi-CG for solving nonsymmetric linear systems," *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol. 18, No. 2, pp. 537-551, 1997.
- 21) Saad, Y. and Scultz, M. H., "GMRes: a generalized minimum residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems," *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 7, No. 3, pp. 856-869, 1986.
- 22) Prasad, K. G., et al., "Preconditioned Krylov solvers for BEA," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 37, pp. 1651-1672, 1994.
- 23) Saad, Y., "ILUT: a dual threshold incomplete LU factorization," *Numer. Linear Algebra*, Vol. 1, No. 4, pp. 387-402, 1994.
- 24) Schneider, S. and Marburg, S., "Performance of iterative solvers for acoustic problems. Part II. Acceleration by ILU-type preconditioner," *Engng. Anal. Bound. Elem.*, Vol. 27, pp. 751-757, 2003.
- 25) 藤野清次, 阿部邦美, "BiCG 系統の反復法に対する効果的な収束改善法について", ハイパフォーマンスコンピューティングと計算科学シンポジウム, HPCS2002, pp. 51-58, 2002. 1.
- 26) AIJ 環境工学委員会音環境運営委員会音響数値解析小委員会, "Benchmark platform on computational methods for architectural/environmental acoustics," <http://gaoust.hwe.oita-u.ac.jp/AIJ-BPCA/index.html>.
- 27) Yasuda, Y. and Sakuma, T., "Fast multipole boundary element method for large-scale steady-state sound field analysis. Part II: examination of numerical items," *Acta Acustica united with Acustica*, Vol. 89, pp. 28-38, 2003.
- 28) 張紹良, 藤野清次, "丸め誤差の分離に基づく共役勾配系統の解法の収束特性の考察", 日本応用数理学論文誌, Vol. 3, No. 3, pp. 135-146, 1993.

(2005年12月2日原稿受理, 2006年3月15日採用決定)