日本シミュレーション学会
第19回シミュレーション・テクノロジー・コンファレンス
－2000年6月－



# 彩色ネットワークにおけるリソース数の最小化について

# An optimization problem on Edge Colored Networks

星野忠之[1)]・田村　裕[2)]・間瀬憲一[3)]・仙石正和[3)]・篠田庄司[4)]
[1),3)]新潟大学・[2)]新潟工科大学・[4)]中央大学

**Abstract** The mobile terminal users get information from a base station which has communication ability. Hence it's important to assign the base station to give the information to all the users on the road. With in the networks this is called the location problem. The number of the base stations depends on the location points because the distribution of the users on the road is heterogeneous. In this paper we take in to consideration assigning the base station for the users on the road.

## 1．はじめに

ある都市において，資源を要求する利用者に対して施設から情報を供給したいと考える場合，その施設をどこに設置すべきかという問題が出てくる．店の広告や街の情報，交通情報などを移動端末に配信したい場合その分布により設置位置が異なってくる．ここでこの設置位置をどこにすれば設置数を最小限に抑えられるかと言う問題が出てくる．そこで本論文の目的として、特に道路網等に存在する利用者に対する基地局配置を考え、基本的な条件の下においてその解法を示す．

## 2．基本概念

はじめにモデルの定義を行なう．

**定義2．1　彩色ネットワークグラフ**

グラフ $G=(V, E)$の各辺に $n$ 色の色を用いて色をつける．色は関数 $c(e)=COL$ で与えられる．このとき，色付けされたネットワーク $N_c=(G, c)$を $n$-彩色ネットワークと定義する．■

図1に 3-彩色ネットワークの例を示す．ただし，色の違いを点線の種類で分類する．

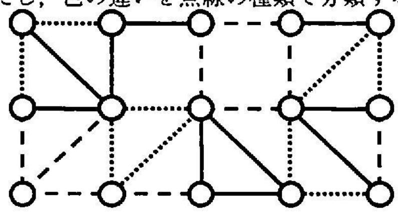


図1．3-彩色ネットワーク

**定義2．2　リソースの被覆範囲**

$N_c$ において $C_i$ を $c(e)=COL_i$ である全ての辺からなる $N_c$ の辺誘導部分グラフとする．また，$C_{i,v}$を $C_i$の成分のうち点 $v$ を含みかつ極大なものとする．ただし、$C_i$ の成分に点 $v$ を含んでいない場合，空集合とする．このとき，

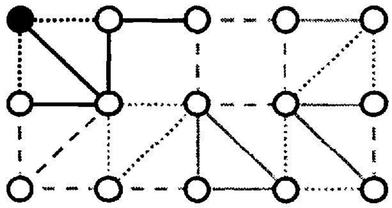
$$C(v)=\bigcup_{i=1}^{n} C_{i,v}$$

をリソース $v$ の被覆範囲とする．また任意のリソースを要素とする集合をリソース集合 $V_{cover}$ とする．■

図1の 3-彩色ネットワーク上のある点にリソースを置いた例を図2に示す．

---

[1)]新潟大学大学院自然科学研究科修士1年
新潟市五十嵐2の町8050
電話025－262－6751
[2)]新潟工科大学情報電子工学科
[3)]新潟大学工学部情報工学科
[4)]中央大学理工学部電気電子情報通信工学科



●：リソース　濃い線：被覆範囲

図２．リソースの被覆範囲

以上のことから次の問題を定義する．

**問題　$n$-彩色ネットワーク被覆問題**

全ての辺 $e\in E(N_c)$ が何らかのリソース $v\in V_{cover}$ の被覆範囲 $C(v)$ に含まれるものとする．このときリソース集合 $V_{cover}$ は $N_c$ を被覆するといい，$V_{cover}$ の要素を最小にする問題を $n$-彩色ネットワーク被覆問題と定義する． ■

解の存在範囲を示すために次の補題を用いる．

**補題２．１**

$|E|\ge 2$ で，かつ $V_{cover}$ により $N_c$ は被覆されているものとする．このときリソース集合 $V_{cover}$ は端点以外の点により構成することができる．ただし，$N_c$ は連続とする．

【証明】仮に端点 $t$ にリソースがあり $t$ に隣接する点を $s$ とすると，このリソース $t$ の被覆範囲はただ１色，辺 $st$ の色 $c(st)=COL_k$ なので $C_{k,t}$ 上なら $t$ 以外の点でも $C_{k,t}$ と同等またはそれ以上の被覆範囲を持つことになる．よって端点 $t$ の代りに $C_{k,t}$ 上の点 $s\left(\deg s\ge 2\right)$ にリソースを配置することができる． ■

この補題を用いることにより、解の存在範囲は次のようになる．

**命題２．１**

$n$-彩色ネットワーク被覆問題の最適解 $\min|V_{cover}|$ について次の式が成り立つ．

$$\max k\left(C_i\right)\le \min|V_{cover}| \le \lceil E\left(N_c\right)/2\rceil\ (i=1,\cdots,n)$$

ただし，$N_c$ は連続とし，$\lceil x\rceil$ は $x$ と等しいかまたはそれより大きい最小の整数を表し、$k(C_i)$ は $C_i$ の成分の個数を表す．

【証明】リソースの被覆範囲の定義から１つのリソースは同色な２つの成分は同時に被覆できない．よって少なくとも $k(C_i)$ 個以上のリソースは必要となる．そのとき $\min|V_{cover}|$ は最小値 $\max k\left(C_i\right)$ をとる．上限は補題２．１よりリソースの次数は２以上となるようにできるので，点に関する帰納法により証明可能である． ■

## ３．2-彩色ネットワーク被覆問題

２色で塗られた彩色ネットワークは１つのリソースが被覆できる成分の個数は高々２つである．そのことを利用して、彩色ネットワークを２部グラフに変換する．

**定義３．１　２部グラフ $H$**

$N_c$ に対し，$COL_1$, $COL_2$ からなる $N_c$ の辺誘導部分グラフの各成分に１対１に対応する点を考える．次に各成分が同じ点を共有している場合，対応する点を辺で結ぶ．このときグラフ $H$ は２部グラフとなる． ■

このグラフ $H$ を用いて，2-彩色ネットワーク被覆問題について次の定理が成り立つ．

**定理３．１**

$M_H$ を $H$ の最大マッチングとし，$m$ を $M_H$ の不飽和点の個数とすると，2-彩色ネットワーク被覆問題の最適解 $\min|V_{cover}|$ は次の式で与えられる．

$$\min|V_{cover}|=|M_H|+m$$ ■

【証明】$H$ の最大マッチングを $M_H$，$V_{M_H}$ を $M_H$ の辺に接続する点の集合とし，$m$ を $M_H$ の不飽和点の個数とする．このとき，次の２つの場合が考えられる．

（i）$V_{M_H}=V\left(H\right)$ のとき

この場合 $H$ のすべての点が $M_H$ の端点となり，$N_c$ は被覆されている．つまり，$M_H$ の辺に対応する $N_c$ の辺誘導部分グラフの共通点が解となり，$\min|V_{cover}|=|M_H|$ となる．

（ii）$V_{M_H}<V\left(H\right)$ のとき

この場合 $M_H$ にはいくつかの不飽和点が存在し，被覆されていない成分が存在する．この被覆されていない点を被覆するためには，不飽和点に接続している辺を選ぶ必要があり，$\min|V_{cover}|=|M_H|+m$ となる．

（i），（ii）から 2-彩色ネットワーク被覆問題の解 $\min|V_{cover}|$ は不飽和点の数を $m$ として

$$\min|V_{cover}|=|M_H|+m$$

で与えられる． ■

２部グラフの最大マッチングは多項式時間

で求められている．この事から 2-彩色ネットワーク被覆問題は多項式時間で求められる．

## 4．n-彩色ネットワーク

一般の場合，2色のときの様に容易に解を求めることができない．そこで，どのリソースがどの色の成分を被覆するのかを整理するため，成分集合 $S$，成分番号，被覆集合 $U_i$，被覆集合族 $W$ を定義する．

**定義4．1　成分集合 $S$　成分番号**

$N_c$ に対し，$COL_1,\cdots,COL_n$ からなる $N_c$ の辺誘導部分グラフ $C_1,\cdots,C_n$ 内の各成分に，昇順に1から番号をつけ，その成分の成分番号とする．成分集合 $S$ はこの成分番号を要素とする．■

図3に図1の 3-彩色ネットワークの各色の成分とその成分番号を示す．

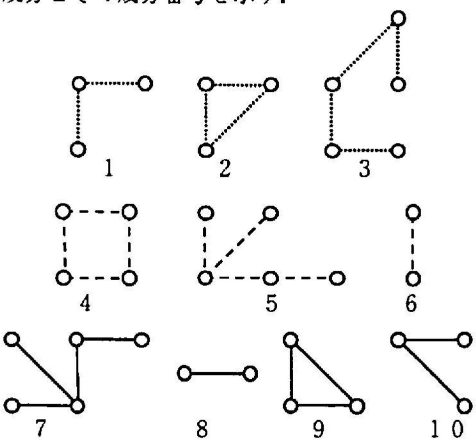



図3．各成分の成分番号

**定義4．2　被覆集合 $U_i$　被覆集合族 $W$**

被覆集合 $U_i$ とは，点 $v\in V$ にリソースを置いた場合に被覆される成分の成分番号を要素とする．被覆集合 $U_i\left(i=1,\cdots,|V|\right)$ を要素とする集合族を $W$ とする．■

3色以上のときの $n$-彩色ネットワーク被覆問題が NP 完全であることを証明するため，問題を判定問題に置き換える．つぎに $n$-彩色ネットワーク被覆問題（判定問題版）を示す．

**問題　n-彩色ネットワーク被覆問題（判定問題版）**

Instance：$n$ 色で塗られた彩色ネットワーク $N_c$，正整数 $M$.

Question：$M$ 個以下のリソースで $N_c$ を被覆できるか？

次に帰着する NP 完全である問題 SET PAKKING を示す．

【SET PAKKING】

Instance：有限集合 $S$，その部分集合を要素とする集合族 $C$，正整数 $K$.

Question：部分集合 $C'\in C$ を高々 $K$ 個選んで，それらの和集合を $S$ と等しくできるか？

この SET PAKKING の Instance を $n$-彩色ネットワーク被覆問題（判定問題版）の Instance に変換を行なう関数 $f$ を定める．

$f$ は以下のような変換を行なう．

SET PAKKING
- i　有限集合 $S$
- ii　部分集合 $C'\in C$
- iii　正整数 $K$

→$n$-彩色ネットワーク被覆問題（判定問題版）
- i　辺集合 $E(N_c)$
- ii　被覆集合 $U_i\in W\ \left(i=1,\cdots,|W|\right)$
- iii　正整数 $M$

この関数 $f$ は多項式時間アルゴリズムで計算可能であるから，次に，

$S$ は $K$ 個以下の集合の和で表される

⇔ $f(S)$ は $M$ 個以下のリソースで $N_c$ を被覆できる

を示せばよい．次にその証明を示す．

【証明】$S$ は $K$ 個以下の集合の和で表されるので，$S$ のすべての要素は $C$ の要素のいずれかに含まれることになる．すなわち，$f(S)$ のすべての成分は被覆集合族 $W$ の要素のいずれかに含まれている．逆も同様の理由により成り立つ．■

以上のことから $n$-彩色ネットワーク被覆問題は $NP$ 完全であるといえる．次にこの近似解を，貪欲法を改良したアルゴリズムにより求める．そのために必要な補題を2つ示す．

**補題4．1**

被覆集合 $U_i, U_j\in W$ に対して $U_i\subseteq U_j$ が成り立つとき，$U_i$ に対応する点 $v_i$ はリソース集合 $V_{cover}$ から取り除くことができる．

【証明】$U_i\subseteq U_j$ を満たすということは，点 $v_j$ をリソースとしたときの方が点 $v_i$ をリソースとしたとき以上の被覆範囲を持つことになる．つまり，点 $v_j$ をリソースとして選ぶことにより，点 $v_i$ をリソース集合 $V_{cover}$ から取り

除くことができる．■

補題４．２

成分集合 $S$ のある要素 $k$ が，ただ１つの被覆集合 $U_i \in W$ にのみ含まれていたとすると，点 $v_i$ はリソースとなる．

【証明】成分集合 $S$ のある要素 $k$ が，ただ１つの被覆集合 $U_i \in W$ にのみ含まれているということは，成分番号が $k$ である成分を被覆するためにリソースを置くべき点がただ１つ点 $v_i$ のみということになる．すなわち，点 $v_i$ はリソースとなる．■

以上のことから，次の定理を導くことができる．

定理４．１

$n$-彩色ネットワーク被覆問題 $N_c$ に対して次のアルゴリズムを用いることにより，$n$-彩色ネットワーク被覆問題の許容解を求めることができる．なお，$N_c$ が非連結の場合，連結成分ごとに考える．

アルゴリズム FindResource

ＳＴＥＰ１：すべての点 $v \in V(N_c)$ を $V_{\text{cover}}$ の要素とする．

ＳＴＥＰ２：補題２．１と補題４．１によりにより $V_{\text{cover}}$ の要素で次数が１の点があればその点を $V_{\text{cover}}$ から取り除き，$V_{\text{cover}}$ の要素でリソースとならない点があればその点を $V_{\text{cover}}$ から取り除く．

ＳＴＥＰ３：補題４．２を満たす成分番号があれば，それを被覆する点をリソースとする．リソースがあればＳＴＥＰ６へ

ＳＴＥＰ４：貪欲法により被覆する成分の数が最大となる点をリソースとする．

ＳＴＥＰ５：ＳＴＥＰ３またはＳＴＥＰ４でリソースとなった点の被覆する成分番号を Ｓ とすべての被覆集合 $U_i \in W$ から取り除く．また，被覆された被覆集合を $W$ から取り除く．

$S \neq \phi$ かつ被覆範囲を取り除いた $N_c$ が，

・連結であればＳＴＥＰ２へ．

・非連結であればＳＴＥＰ３へ．

ＳＴＥＰ６：終了 ■

このアルゴリズムを図１の 3-彩色ネットワークに適用する．命題２．１より最適解の存在範囲は，

$$4 \leq \min|V_{\text{cover}}| \leq 14$$

となる．つぎにアルゴリズムを用いてリソースを求めてみると，図４のようになる．

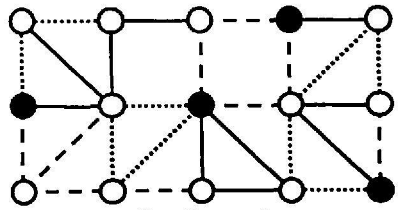



図４．求められたリソース

この場合，最適解が求められている．

## ５．おわりに

今回，都市などにネットワークを形成し，その与えられたネットワーク上の端末に情報を渡す場合を考察した．２色で塗られた彩色ネットワークでは，多項式時間で求められることを示した．次に一般の場合，問題が NP 完全であることを示し，貪欲法を用いたアルゴリズムを示した．今後の課題として，ここではリソースが同時にいくつもの成分を被覆できるものとして扱ったが，同時に被覆できる数に制限などを扱う必要がある．また，辺に距離の概念も入れる必要があり，これらの下でのリソース割当アルゴリズムを開発し，コンピュータシミュレーションにより検証する．

## ６．参考文献


（１）伊理，白川，梶谷，篠田，ほか，“演習グラフ理論—基礎と応用—”，コロナ社，１９８３

（２） Hiroomi Murahata, Hiroshi Tamura, Keisuke Nakano, Masakazu Sengoku, Shoji Shinoda, “A Covering Problem on mesh type graphs”, ITC-CSCC '99 vol.2, pp.880-883, 1999

（３）戸川，中嶋，杉原，野寺，“インターネット時代の数学”，共立出版，１９９７

（４）M．ベザット，G．チャートランド，L．レスニャック・ホスター著，秋山，西関訳，“グラフとダイグラフの理論”，共立出版，１９８１

（５） Michael R. Garey, David S. Johnson, “COMPUTERS AND INTRACTABILITY A Guide to the Theory of NP-Completeness”, W. H. FREEMAN AND COMPANY, 1979