新潟大学教育学部数学教室，『数学教育研究』，第 46 巻，第 1 号，96-114，2011.

算数的活動・数学的活動における主体性に関する研究

～子どもの困難と見通しに焦点を当てて～

新潟大学　教育人間科学部　数学教育専修　和田ゼミナール　4 年
橋本善貴・大坂睦・笠原未来・日下部友大
高橋翔・宮森かおる・村山佳宏

第 1 章．はじめに

「子ども自ら算数・数学を学んでいってほしい」という思いが教育実習を通して私たちの中に生まれた。その実現のためには，授業において子どもが自ら進んで活動をしていく必要がある。そこで，算数的活動・数学的活動に焦点を当てて研究を進めていくこととした。また，永田(2008)が述べている算数的活動・数学的活動の重要性は以下のようにまとめられる。

・基礎的・基本的な知識及び技能を確実に身に付けるため
・数学的な思考力，判断力，表現力等を高めるため
・数学を学ぶことの楽しさや意義を実感するため

これらのように，算数的活動・数学的活動が算数・数学教育において求められていることがわかる。よって本研究では，主体的な算数的活動・数学的活動のために必要な，教材開発の視点と教師の手立ての有効性を検証することを目的とする。

そこで本稿では，算数的活動・数学的活動の特徴の一つである主体性を定義する。次に，数学的モデル化の過程に現れる数学的な考え方に着目した上で，困難を感じさせるための教材開発の視点と，困難を乗り越えて見通しをもたせるための教師の手立てを考案する。そして，授業実践を行い，それらの有効性を検証し授業への示唆を述べる。

第 2 章．算数的活動・数学的活動

2．1　算数的活動・数学的活動における主体性

(1) 算数的活動・数学的活動の捉え方

算数的活動・数学的活動の先行研究を概観すると，以下のように捉えられている。

・「子どもが目的意識をもって主体的に取り組む，算数や数学をつくりだす活動」〔中原，2000，p132〕
・「算数の内容（数理）を子どもたちが自分の手や体を動かして頭で考えて作り上げること」〔志水，1999，p24〕
・「生徒が目的意識をもって主体的に取り組む数学にかかわりのある様々な営み」
　〔中学校学習指導要領解説（平成 20 年）による定義〕
・「児童が目的意識をもって主体的に取り組む算数にかかわりのある様々な活動」
　〔小学校学習指導要領解説（平成 20 年）による定義〕

これらのように，算数的活動・数学的活動には様々な活動が含まれていることがわかる。本研究では算数的活動・数学的活動を「子どもが目的意識をもって主体的に取り組む，算数・数学にかかわりのある様々な営み」として，広い定義で捉える。

(2) 算数的活動・数学的活動の特徴

池田（2008，p57）は，数学的活動の２つの特徴として「主体性」と「社会性」を挙げている。「主体性」を「目的をたて，方法・手段を比較し，行為の結果に基づいて反省し，新しい目的をたてるという一連の思考的活動を子ども自身」が行うこととし，広い意味で述べている。また「社会性」を「個人的思考過程といった側面だけでなく，社会的過程ないしは集団過程」によって学習することであると述べている。

さらに，「主体性」については，「学習指導要領解説数学編（2008）において『目的意識をもって主体的に取り組む』といった言葉から，『活動』という言葉が意味する『主体性』が概念規定となっていること」も述べている。

本研究では，「活動」の概念を「主体性」が規定している，と解釈し，「主体性」がない活動はそもそも「活動」とは呼ばないと考えた。そして，小・中学校学習指導要領における算数的活動・数学的活動の定義に「主体的に」という文言が含まれていることから，算数的活動・数学的活動においても「主体性」は重要視されていることがわかる。

(3) 算数的活動・数学的活動における課題

池田（2008）は，数学的活動により「主体性」の質を高めていくこと，「すなわち，･･･数学的に問えることができる生徒を育てていく点が強調されることになる。そして，数学的に問えること，すなわち，数学の流れをつくる代表的な問いかけを生徒ができるようにすることが肝要となる」と述べている。

これより，算数的活動・数学的活動の「主体性」においては，数学の流れをつくる問いかけができる子どもを育てることが課題であるといえる。

(4) 本研究における主体性

本研究では，算数的活動・数学的活動の「主体性」を「数学の流れをつくる問いがもてる態度」と定義し，「問い」を次のように捉える。

「問い」に関して根本（1980，p85）は，「問いは第一に，思考のきっかけとなり，思考を触発するという働きがある」，「問いは経験にもとづく価値判断によって思考の流れを規制し，探究の方向を連続的（必ずしも直線的ではないが）に決定するものである」，と述べている。

そこで，本研究では「問い」を，思考のきっかけであり，思考の方向を決定するものであると考えた。ここでの思考を，数学的な考え方であると捉え，この数学的な考え方のきっかけになるものや，方向づけるものが「問い」であると考えた。そこで，「問い」を「問題解決の際に困難を感じることがきっかけとなり，それを乗り越えて思考の方向が決定されること，すなわち，見通しをもつこと」と捉えた。

そこで本研究では，算数的活動・数学的活動における主体性を，困難や見通しに焦点を当てて研究することとした。

2．2　数学的な考え方

「数学の流れ」とは，大きく分けて「数学をつくる流れ」と「数学をつかう流れ」の 2 つが考えられる。前者は，主にこれまで数学者が数学をつくってきた流れであり，後者の中の一つとして長崎(2001)が指摘する数学的モデル化の過程が挙げられる。以下，それぞれの数学の流れにおける数学的な考え方を示す。

(1) 数学をつくる流れにおける数学的な考え方

片桐(2004)は数学的な考え方として次のような内容を示している。

Ⅰ．数学的な態度
1．自ら進んで自己の問題や目的・内容を明確に把握しようとする
2．筋道の立った行動をしようとする
3．内容を簡潔明確に表現しようとする
4．よりよいものを求めようとする

Ⅱ．数学の方法に関係した数学的な考え方
1．帰納的な考え方　2．類推的な考え方　3．演繹的な考え方
4．統合的な考え方　5．発展的な考え方
6．抽象化の考え方―抽象化，具体化，理想化，条件の明確化の考え方―
7．単純化の考え方　8．一般化の考え方　9．特殊化の考え方
10．記号化の考え方　11．数量化，図形化の考え方

Ⅲ．数学の内容に関係した数学的な考え方
1．単位の考え　2．表現の考え　3．操作の考え
4．アルゴリズムの考え　5．概括的把握の考え　6．基本的性質の考え
7．関数的な考え　8．式についての考え　9．式についての考え

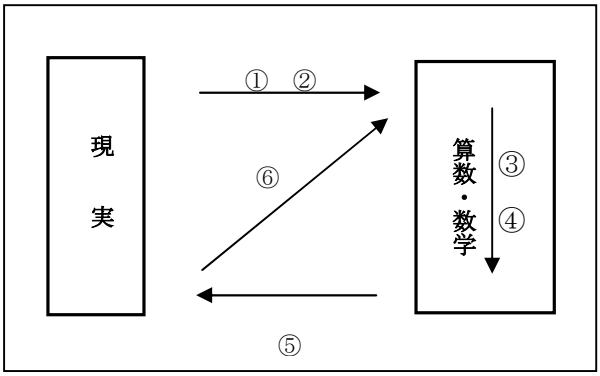
〈 図 1.　数学的な流れをつくる数学的な考え方 〉

(2) 数学をつかう流れにおける数学的な考え方

和田ゼミナール 2 期生(宮村ら，2006)は，片桐（2004）の数学の方法に関係した数学的な考え方を構造的に捉える余地があると指摘し，数学的モデリング過程にまで拡張することにより，数学的な考え方を捉え直した。

数学的モデリング過程とは，数学的モデル化の過程である。数学的モデル化の過程は現実における現象や問題を算数・数学で扱うために，それらを算数・数学の対象に変換する。その上で算数・数学をつかって処理し，さらにその結果を現実の場面に照らして検証するという一連の流れである。

また，長崎(2001)は数学的モデル化の過程の各段階ではたらく力を示しており，それにもとづき宮村ら(2006)は数学的モデル化の過程を図 2 のように捉え，表 1 のように数学的モデル化の過程ではたらく数学的な考え方を示している。



〈　図 2.　数学的モデル化の過程　〉

〈　表 1.　数学的な考え方の育成を目指した数学的モデリングの段階　〉

段階	意味	主に使われる数学的な考え方
①問題設定	必要感や目的の探求に応じて，個人がおかれている場面を診断・分析し，目的にあった問題を形成する。	条件整理の考え方 理想化の考え方
②仮説設定	問題を解決しうる仮説を立てる。	仮説的な考え方
③解決の実行	条件の仮説を基に，問題の解決を試みる。	帰納的な考え方　図形化の考え方 演繹的な考え方　記号化の考え方 類推的な考え方　単純化の考え方 数量化の考え方　特殊化の考え方
④論理的組織化	具体的問題の解法から抽象的一般的原理法則が作られ，解法の論理的骨組みを作る。	帰納的な考え方　一般化の考え方 演繹的な考え方　抽象化の考え方 類推的な考え方　具体化の考え方
⑤解決の検証	数学的処理の結果を現実場面に照らし合わせて検証する。	現実化の考え方
⑥発展的学習	問題の解決を基にして，さらに新しい創造的学習を進める。	統合的な考え方 発展的な考え方

(3) 数学の流れにおける課題

柗元(2009，p13)は「『日常生活で(日常生活や社会で)数学を利用する活動』を行う力を身に付けていない実態が明らかになっている」と指摘している。つまり，これまで算数・数学教育において「数学をつかう流れ」の授業が十分に行われていないことが指摘できる。

そこで，本研究では「数学をつかう流れ」である数学的モデル化の過程における数学的な考え方に焦点を当てて研究することとした。

また，数学的モデル化の過程の中でも現実事象を数学の対象に変換することができなければ，問題解決ができない。さらに，算数・数学の授業では，現実世界の問題をそのまま

扱うことが困難であるため，はじめから数学的な問題が対象となる場合が多い。よって本研究では，数学的モデル化の過程の中でも，現実事象を数学の対象に変換する段階（図 2 の①，②）に注目することとした。宮村ら(2006)は，その段階で使われる主な数学的な考え方として図 3 のように示しており，本研究でもその 3 つを数学的な考え方とすることとした。

条件整理の考え方

現実事象における問題を数学的に考察するために，その事象から様々な条件を挙げた上で，その中で問題解決に必要な条件だけを選び出し，思考の対象を明確にしようとする考え方

①条件を挙げる

「問題場面を明確にするために，現実事象における問題にかかわる様々な条件を，思いつくままに挙げる。」

②必要な条件を選び出す

「①で挙げた条件の中から目的に応じ，数学的に処理するために必要な条件だけを選び出す。その際，他の条件を排除する作用をも伴う。」

理想化の考え方

現実事象における問題を数学的に考察するために，その事象における条件や性質が数学的な定義や原理・法則を満たしているような理想的な状態や，条件が一定であるような理想的な状態としてとらえようとする考え方

仮説的な考え方

問題の解決に至るには条件が不十分である場合，明確な根拠があるわけではない仮の条件を付け加えることによって，一応の解決をしていこうとする考え方

〈 図 3.　現実事象を数学の対象に変換する段階における数学的な考え方 〉

2．3 研究仮説について

算数的活動・数学的活動や数学的な考え方の先行研究を概観することにより，本研究では「子どもが困難を感じ，それを乗り越えて見通しをもつことで主体的な算数的活動・数学的活動を行うことができる」ことを前提とした。したがって，上の 3 つの数学的な考え方ができれば主体的であると判断できると考え，次の研究仮説を設定した。

「主体的な算数的活動・数学的活動をするためには，次に挙げる教材開発の視点と教師による手だてが有効である」

〈 表 2. 教材開発の視点と教師の手立て 〉

数学的な考え方	条件整理の考え方	理想化の考え方	仮説的な考え方
困難	どの条件が問題解決に必要かわからないで困難を感じている	現実場面を考え，忠実に解決しようとして困難を感じている	挙げられている条件だけを使っていて困難を感じている
見通し	問題解決に必要な条件を選び出している	理想的な場合にして考えている	問題を解く上で足りない条件を付け加えている
困難を感じさせるための教材開発の視点	不必要な条件を含んでいる問題を設定する	忠実に解決することが困難または不可能である問題を設定する	解決するための条件が不足している問題を設定する
見通しをもたせるための手立て	条件を再確認させ，その中から問題解決に必要なものを考えさせる	数学的に解決しやすいように考えさせる	問題解決するためには，何が必要かを考えさせる

この研究仮説を検証するために，子どもが 3 つの数学的な考え方をしようとするための教材開発を行った。また，条件整理の考え方は①条件を挙げる考え方と②必要な条件を選び出す考え方の段階をふむとされているが，①が行われているかどうかを判断することができないと考えた。それは条件を記述もしくは発言をした段階で，条件を挙げるということがすでに行われており，その中から必要な条件を選び出していると考えたからである。このように，②が行われていれば①は行われているため，本研究では①と②を分けずに「条件整理の考え方」とした。

子どもが数学的な考え方をしようとするには，まず「教材」によって子どもを問題の解決に困難を感じさせ，さらに教師の「手立て」によって，見通しをもたせることが必要である。

よって，「困難を感じさせるための教材開発の視点」および 3 つの数学的な考え方の「見通しをもたせるための手立て」を考え，この 2 つの有効性について授業実践で検証する。

第 3 章．授業実践の概要

3．1 目的

第 2 章で述べたように，児童生徒が困難を感じ，それを乗り越えて見通しをもつことで主体的な算数的活動・数学的活動を行うことができると考えた。そこで，数学的モデル化の過程の中の，現実事象を数学の対象に変換する段階における 3 つの数学的な考え方について，困難を感じさせるための教材開発の視点と，困難を乗り越えて見通しをもつための

手立てを考えた。それらの有効性を検証することを目的として，小学校，中学校で授業実践を行った。具体的な教材開発の視点および手立てについては，以下の表 3，4 の通りである。

Ⅰ　小学校授業実践

本授業では，バス・電車の時間や料金を求めることを通して，附属新潟小学校から新潟せんべい王国の行き方を考えさせる。

子どもにさせたい数学的な考え方は，表 3 の通りである。①～④は授業の流れに即しており，理想化の考え方は 2 通りが考えられる。

〈 表 3.　小学校授業実践における教材開発の視点と教師の手立て 〉

	①	②	③	④
数学的な考え方	条件整理の考え方	理想化の考え方	仮説的な考え方	理想化の考え方
困難を感じさせるための教材開発の視点	「附属新潟小学校から新潟せんべい王国に行く」という現実的な状況を考えさせる	実際に歩く距離を正確に求めることができない状態にする	速さについての情報が不足している状態にする	実際に歩く速さを正確に求めることができない状態にする
見通しをもたせるための手立て	「何がわかれば歩く時間がわかりますか。」	「地図から調べられないですか。」	「どうやったら歩く速さを求めることができますか。」	「どうやったら歩く速さを考えやすいですか。」

① 条件整理の考え方

本授業では，「附属新潟小学校から新潟せんべい王国に行く」という現実的な状況で，どのようにして行けばいいのか子どもたちに考えさせる。「9 時 30 分に出発し，10 時 30 分までに着きたい」と「使える交通機関はバスと電車のみ」の 2 つの条件のみを提示することで，子どもたちは様々な視点で問題を考えることができる。それにより，不必要な条件も子どもの中から挙がると考えた。

せんべい王国に到着する時間は子どもによって異なると考えられる。それは徒歩の時間がわからないからである。このように徒歩の時間が定められず困難を感じている子どもに対し，手立て①を行う。そうすることにより，徒歩の時間は距離と歩く速さがわかれば求められるという見通しをもたせるようにする。

② 理想化の考え方

「距離」を地図から求める際，定規で地図上の長さを計測し，縮尺を用いて計算を行うのだが，実際に駅やバス停から新潟せんべい王国まで歩く道を地図上から判断することはできない。そこで手立て②により，定規で計測しやすい部分の長さを用いて，おおよその距離を求めさせるようにする。

③ 仮説的な考え方

本授業では地図，時刻表や料金表といった資料を配付する。「歩く時間」を求めるためには，「距離」と「歩く速さ」が必要である。地図から「距離」を求めることはできるが，「歩く速さ」は配布された資料から求めることができない。そこで手立て③により，経験的に速さを考えて仮定させたり，実際に速さを測定すればよいと考えさせたりする。

④ 理想化の考え方

「歩く速さ」を求める際に，実際にどのように駅やバス停から新潟せんべい王国まで歩くか考えると，信号や横断歩道を渡るタイミングによりスムーズに歩けるかどうか変わってくる。駅には階段や改札口もあるため，当然歩く速さは一定ではない。そこで手立て④により，速さは一定にしようという，理想的な状態にして考えられるようにする。

詳しい指導内容は，【参考資料】小学校授業実践を参照。

Ⅱ　中学校授業実践

グラフから車のガソリン消費量を調べることを通して，アイドリングストップはガソリンを節約できるか考えさせる。

子どもにさせたい数学的な考え方は表 4 の通りである。①～④は授業の流れに即しており，理想化の考え方は 2 通りが考えられる。

〈 表 4.　中学校授業実践における教材開発の視点と教師の手立て 〉

	①	②	③	④
数学的な考え方	条件整理の考え方	理想化の考え方	仮説的な考え方	理想化の考え方
困難を感じさせるための教材開発の視点	「アイドリングストップによってガソリンが節約できるかどうか」について，ワークシートで調べさせる	数値が一定でなく，少しガタガタしているグラフを提示する	(単位時間あたりの量)×(時間)という式でガソリン消費量が求められないグラフを提示する	いびつな形のグラフを提示する
見通しをもたせるための手立て	「これは何のグラフですか。縦と横は何を表していますか。」	「どうなっていれば考えやすいですか。考えやすい方法で考えてみよう。」	「22×20 というのはアのグラフのどの部分を表していますか。」 「イ，ウのガソリン消費量はグラフのどの部分ですか。」	「アと同じように考えやすい方法で求めてみましょう。」

① 条件整理の考え方

本授業では，1 秒間あたりのガソリン消費量が時間とともに変化していくグラフを扱い，

アイドリングストップの有効性について考えさせる。その後，ワークシートのグラフからガソリン消費量を求めさせるのだが，計算の方法は説明しない。そのため，どのようにしてガソリン消費量を求めたらいいかわからない，という困難をもつ子どもがいると考えられる。そこで手立て①により，「ガソリン消費量＝1 秒間あたりのガソリン消費量×時間」，つまり「縦軸の値×横軸の値」であることに気づくようにする。

② 理想化の考え方

数値が一定ではなく，0.1 秒未満の幅で微妙に変化をしているグラフ（ア）を提示する。ガソリン消費量を求めるため，1 秒間あたりのガソリン消費量に着目するが，グラフが一定ではないので，正確な値をとることができない。そこで手立て②により，子どもはグラフを直線と見なし，1 秒間あたりのガソリン消費量をおおよその値で読み取らせる。

③ 仮説的な考え方

ガソリン消費量がほぼ一定であるグラフ（ア）については，1 秒間あたりのガソリン消費量に時間を乗じてガソリン消費量を求めることができるが，ガソリン消費量が大きく変化するグラフ（イ，ウ）では同じように求めることができない。そこで手立て③により，アのガソリン消費量はグラフの下の面積を表す式で求めていたことに気づき，イ，ウも同じようにグラフの下の面積を考えて求めていこうとする。

④ 理想化の考え方

イ，ウのガソリン消費量を求める際，グラフの下の面積に着目するが，その図形がいびつなため正確な面積を求めることができない。そこで手立て④により，子どもは三角形や台形など，面積を求めることができる図形に近似することで，おおよその面積を求めていこうとする。

詳しい指導内容は，【参考資料】中学校授業実践を参照。

3．2　分析の方法

本授業実践では，困難を感じさせるための教材開発の視点と，見通しをもたせるための手立てについて，有効であったかどうかを分析する。その際には，つぶやきが多く，反応が大きい男女一人ずつの児童生徒を主な観察の対象とする。

授業分析のために，まず，授業実践で記録した発言や行動からトランスクリプトを作成する。そのトランスクリプトから見られた事実をもとに児童生徒の活動を解釈し，困難を感じているところと見通しをもっているところに注目する。そして，注目した困難と見通しの前後を見直し，児童生徒が困難を感じた原因と困難を乗り越えたきっかけを考えることにより，上記の 2 点について検証していく。

第 4 章．授業の分析と考察

4．1　分析の枠組み

トランスクリプトを作成し，発言や行動にラベリングをしていった結果，以下の表 5 のような 6 つのラベルに分けることができた。6 つのラベルは困難を感じているときのものと見通しを持っているときのものに分類することができ，それぞれ困難から見通しをもつまでの流れを α，β，γ とした。この α，β，γ は数学的な考え方であり，α は条件整理の考え方，β は仮説的な考え方，γ は理想化の考え方である。

〈 表 5.　困難から見通しまでの流れの分類 〉

困難 ↓	条件を理解していない ↓	条件が不足していると考えている ↓	条件が複雑だと考えている ↓
見通し	条件を理解している	条件を付け加えている	条件をおおよそで考えている
分類	**α（条件整理の考え方）**	**β（仮説的な考え方）**	**γ（理想化の考え方）**

4．2　分析の結果と考察

授業を分析していくなかで，3．1 で述べた①～④以外にも数学的な考え方に関する α，β，γ の流れが見られた。そのため，数学的な考え方ごとに分析した結果を述べ，児童生徒が困難を感じた原因と困難を乗り越えたきっかけについて考察を行った。

Ⅰ　小学校授業実践

α：条件整理の考え方

ワークシートの時間と料金を調べる活動では，「歩く時間」について求めることができずに困難を感じている様子が見られた。さらに，とりあえずの解決は各自でしたものの，発表してみると「歩く時間」が人によって異なるという結果になった。したがって，現実的な状況を考えさせる視点①は有効に働いたといえる。そして，その後の教師の「何と何を調べれば何時に着くかわかりますか。」という手立て①により，抽出児童M，F 共に「時間＝道のり÷速さ」と考え，時間を求めるために「道のり」と「速さ」が知りたい，と見通しをもつことができた。したがって，手立て①は有効に働いたと言える。

また，問題を提示した直後の「考えていく上での質問はありますか」という発問により，子どもたちが多様な困難をもつ様子をみることができた。中には今回の問題解決にはつながらないものもあった。したがって，視点①により不必要な条件を子どもたちに考えさせることができたと言える。それらの困難は，教師によるその後の問題設定，資料の提示などにより乗り越えられ，見通しをもつ様子がみられた。

β：仮説的な考え方

子どもの意見を発表させ，「歩く時間」が人によって異なるという状況になったとき，「どうしてこんなに違うことが，何がわからないから…」という教師の発言により，「歩く速さがわからない」という困難が多く見られた。これは，速さについての情報が不足しているからである。したがって，視点③は有効に働いたと言える。

また，「徒歩の速さ…わからないんだけど，どうやったら調べられるかな。」という手立て③により，「調べられない」という反応が多く見られた。これは，「わからないものは仮定しよう」という考え方が普段の授業で身についていたため，「速さがわからない」と考えると同時に「速さを仮定しよう」という考えになっていたからである。したがって手立て③の有効性は検証できない。

γ：理想化の考え方

地図から距離を求める活動の際に，「道のりが直線でないから求められない」という困難が抽出児童Ｆの隣の児童にみられた。したがって，視点②は有効であると言える。しかし，これは教師の手立てではなく，抽出児童Ｆの「ほぼ直線だ」という働きかけで乗り越えられたので，手立て②の有効性は検証できない。

γの流れの「速さ」に関する困難は全くみられなかった。これは，信号や横断歩道等により実際は一定のスピードで歩くことはできない，ということを子どもに意識させることができなかったためだと考えられる。したがって，視点④の有効性は検証できない。そして，困難が見られなかったため手立て④も行っていないので，手立て④の有効性も検証できない。子どもたちは困難を感じてはいなかったが，速さを一定として考えている様子は多く見られた。これはγの流れの見通しをもった状態である。

Ⅱ　中学校授業実践

α：条件整理の考え方

ワークシートのアのガソリン消費量を求める活動では，計算の方法がわからないといった困難は見られなかった。これは，ワークシートを配る前にガソリン消費量のグラフを扱っており，その時点でグラフの読み取りを行っていたからだと考えられる。したがって視点①の有効性は検証できない。同様に手立て①の有効性も検証できない。

しかし，ワークシートを配る前のグラフの読み取りを行う段階で，いくつかαの流れをみることができた。

一つは，「停車しているときもエンジンを使っているのか」という困難である。これは他の子どもとの会話の中で具体的な場面を想像することにより，乗り越えることができた。

もう一つは，「（グラフの）ＡとＤは同じか」という困難である。これは子どもの意見が割れたため，教師が「ＡとＤは同じとして考えます」と条件を設定しなければ，乗り越えることができなかった。

β：仮説的な考え方

ワークシートのイ，ウのガソリン消費量を求める活動の際に，どのようにして求めればいいのかわからず困難を感じる様子が多くみられた。したがって，視点③は有効であったと言える。この困難は自力または近くの席の子どもとの会話の中で乗り越える様子がみられた。例えば抽出生徒Ｆは，隣の生徒が「1 秒間にこれだけ使ったってこと？」とグラフの下の面積に着目したことにより，困難を乗り越えることができた。

また，本研究では「ガソリン消費量を面積で求める」という方法のみを仮説的な考え方として考えていたが，抽出生徒Mは，面積以外の方法でイ，ウのガソリン消費量を求めていた。しかし手立て③を行ったところ，抽出生徒Mは面積で求めればよいことに気づいた。これは困難を乗り越えるための手立てとして有効であるかどうかは検証できないが，面積に着目させるための手立てとしては有効であったと言える。

γ：理想化の考え方

ワークシートのアのガソリン消費量を求める活動の際に，1 秒間あたりのガソリン消費量の読み取りに困難を感じている様子がみられた。したがって視点②は有効であったといえる。しかし，この困難は自力または近くの席の子どもとの会話の中で乗り越えられたため，手立て②の有効性は検証できない。

面積を考えてガソリン消費量を求めていた抽出生徒Ｆは，グラフをどのように分けるかということについて困難を感じた。したがって視点④は有効だったと言える。この困難は自分で考えることにより乗り越え，グラフの一部を三角形に近似して求めていた様子がみられた。

一方，抽出生徒Mは面積ではなく，1 秒単位でガソリン消費量を考えて求めようとしていて，「左端と右端の平均をとるのはめんどくさい」という困難が生じていた。この場面からも，視点④は有効に働いたと考えられる。この困難は近くの席の子どもとの会話により乗り越えられ，「全部右端をとることにする」という見通しをもつこととなった。

困難は生じたが，自力または近くの席の子どもとの会話の中で見通しをもっていたので，手立て④の有効性は検証できない。

4．3　問題点

小学校授業実践の抽出児童Ｆについて，数学的な考え方をさせることができなかった。それは，次の 2 つの姿から考えられる。

① 付け加える条件を正しく設定できなかった

小学校 1 時間目で「歩く時間」を求めるために，「速さ」を求めようとしていた。しかし，その「速さ」を求めるために，「残りの時間」を仮定して「速さ」を求めてしまった。その上，2 通りの行き方を混同して「速さ」を求めてしまった。

この児童は「道のり」を求めたあとに「速さ」を求めたため，目的とする「歩く時間」が忘れ去られた。さらに，教師による「速さはどうやったら求められますか？」という発

問により「速さ＝道のり÷時間」を強く意識し，目的を見失ってしまった。また，教師の発問や隣の児童による働きかけにより思考がとぎれとぎれになってしまっていた。

この児童が混同したのは，2 通りの行き方における「歩く時間」を同時に考えさせてしまったからである。

② 問題を数学的に捉えることができず，現実的に考えて解決しようとしていた

小学校 2 時間目において，「速さ」を求める方法を検討していく際に，「実際の場所を歩くしかない」という考えに至った。

この児童は，①で考えた 2 通りの行き方を同時に考えた方法が，学級全体で否定された。教師の発言により，この児童は「それも仮定である」と納得はした。しかし，速さを仮定して時間を求めるという考え方に対しては，「厳密に求めないと正確な時間は出ない」と考え，誤差を認めることができなかった。この児童は算数の問題を解いているという意識が弱かったのであろう。

第 5 章．授業への示唆

第 4 章での考察より 3 つの数学的な考え方に関して次のような授業への示唆を得た。

(1) 条件整理の考え方

・問題場面を明確にする際，具体的な場面を想像させることが有効である

主に中学校授業実践において，問題の条件がわからず困難を感じている子どもが，近くの席の子どもとの会話で具体的な場面を想像することにより，その困難を乗り越えていた様子が多くみられた。実際の場面を想像することが，困難を乗り越える上で有効に働いたといえるであろう。今回の授業実践においては，子どもの会話の中でのみ行われていたが，同様に教師の働きかけにおいても具体的な場面を想像させる手立てが子どもの困難を乗り越えさせると言える。

(2) 仮説的な考え方

・条件を整理させるために，求めたいことを明確にさせることが有効である

・解決方法がわからないとき，簡単な場合を振り返らせることが有効である

一点目は主に小学校授業実践による。「せんべい王国に何時に着くか」考えている際，子どもの意見が多様にでたため，どうしたらいいのかわからなくなり困難を感じていた。そこで教師の手立てにより求めたいことを明確にさせたことで，必要な条件が何か整理された。したがって，子どもが困難を感じて何をすべきかわからなくなったときは，求めたいことが何であるのかを明確にさせ，条件を整理することが有効であると言える。

二点目は主に中学校授業実践による。イ，ウのガソリン消費量が求められず困難を感じている子どもに対し，アのガソリン消費量と同じように考えさせる手立てを行っただけで，子どもは面積に着目した。面積という言葉は使わず間接的に不足している条件に注目させただけであるにもかかわらず，手立てが有効に働いたのは，簡単な場合を振り返らせ，解

決方法を比較させたことが有効であるからだと考えることができる。

(3) 理想化の考え方

・誤差を認めてもよい，という考えを許容することが有効である

小学校，中学校両授業実践において，計算という数学的な処理を行うために，「だいたいでいい」という考えで誤差を認め，おおよその値をとって計算を行う様子が多くみられた。ほとんどの場合は子ども同士の会話または自分自身で納得し，理想化の考え方をすることができていたが，教師が数学的な処理をするために誤差を認める考えを許容することが，理想化の考え方を促すことにつながると言える。

さらに，考え方にかかわらず次の示唆を得ることができた。

・他の子どもとの相談を許容することが有効である

今回分析の観点とした困難と見通しについて，自分一人だけではなく近くの席の子どもと相談し，困難を乗り越えた様子が多くみられた。わからないことがあり困難を感じた子どもが，他の子どもに相談することにより困難を乗り越えるだけでなく，相談を受けた子どもも会話によりさらに深い問題理解が促された。困難を感じた際に，遠慮せずにすぐにその困難を相談できる環境をつくることが，子どもの理解を深めると考えることができる。

第 6 章. おわりに

本研究では，子どもが主体的に算数的活動・数学的活動に取り組むことが必要であると考えた。そのために，数学的モデル化の過程に現れる数学的な考え方に着目し，「困難を感じさせるための教材開発の視点」と「見通しをもたせるための教師の手立て」を考えた。そして，授業実践を行い，それらの有効性の検証と授業への示唆を得ることができた。

しかし，数学的モデル化の過程のうち現実事象を数学の対象に変換する段階のみに焦点を当てた研究であるため，数学的に処理した結果を現実場面に照らし合わせる段階については，考察の余地がある。また，今回の授業実践では，全ての視点と手立ての有効性を検証することはできなかった。したがって，さらなる授業実践により，視点と手立ての有効性を検証する必要がある。

また，小学校抽出児童Ｆについて，抽出児童生徒の中で唯一数学的な考え方をすることができなかった。このことは，見方を変えれば，現実的問題を扱う授業が必要であるということを示しており、今後一層数学的な考え方をつかう現実的問題を扱っていかなければならない。

最後に，授業実践に当たってお世話になりました平山誠先生，渡部智和先生には，お忙しい中ご指導とご協力して頂きましたことに，深く感謝いたします。また，指導教員である和田信哉先生には，今まで長い間手厚いご指導を頂き，本研究をここまで進めることができました。厚く御礼申し上げます。

【引用・参考文献】

池田敏和(2008)，「数学的活動を再考する　―その性格と意図―」，『日本数学教育学会誌』，第 90 巻，第 9 号，56-64.

片桐重男(2004)，『数学的な考え方の具体化と指導』，明治図書.

中原忠男(2000)，『算数・数学科　重要用語 300 の基礎知識』，明治図書.

中原忠男(2008)，『算数科　PISA 型学力の教材開発＆授業』，明治図書.

長崎栄三(2001)，『算数・数学と社会・文化のつながり～小・中・高校の算数・数学教育の改善を目指して～』東洋館出版社.

長崎栄三，滝井章(2007)，『算数の力～数学的な考え方を乗り越えて～』東洋館出版社.

永田潤一郎(2008)，「新しい中学校学習指導要領が目指す数学教育」，『日本数学教育学会誌』，第 90 巻，第 5 号，14-22.

根本　博(1980)，「数学教育における理解と問いについて～理解を促す学習を目指して～」，愛知教育大学数学教室，『イプシロン』，80-92.

柗元新一郎(2009)，「中学校数学科における数学的活動　―日常生活や社会で数学を利用する活動に焦点を当てて―」，『日本数学教育学会誌』，第 91 巻，第 5 号，12-22.

宮村徹，近藤治弥，古川歩佳，本間沙恵，宮口正規，山岸辰徳(2006)「数学的モデリングにおける数学的な考え方に関する研究」，新潟大学教育人間科学部数学教室，『数学教育研究』，第 41 巻，114 - 136.

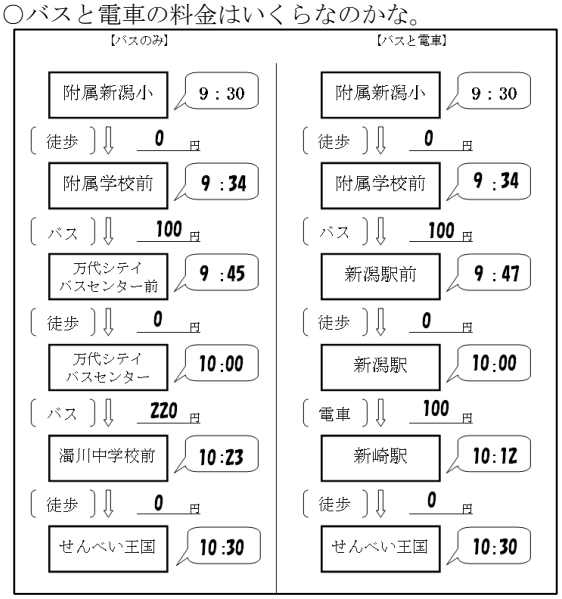
国立教育政策研究所監訳(2004)，『PISA 2003 年調査 評価の枠組み OECD 生徒の学習到達度調査』，ぎょうせい.

文部科学省(2008)，『小学校学習指導要領解説　算数編』，東洋館出版社.

文部科学省(2008)，『中学校学習指導要領解説　数学編』，教育出版.

【参考資料】小学校授業実践（平成 22 年 11 月 29 日（月）2 校時・附属新潟小学校第 6 学年 1 組）

（1）題材名　「新潟せんべい王国までの行き方を決めよう。」
（2）内容　　「量と測定」（速さ）
（3）ねらい　バス・電車の運賃と時間を求めることを通して，現実的事象を数学的に解決することができる。
（4）展開

児童の学びの姿	教師の働きかけ
［問題］　附属新潟小学校から新潟せんべい王国に行きます。9 時 30 分に出発し，10 時 30 分までに着きたいです。バスだけを使って行く場合と，バスと電車を使って行く場合の 2 つの行き方があります。あなたならどちらで行きますか。	
○附属新潟小学校から新潟せんべい王国に行く。 ○9 時 30 分に出発し，10 時 30 分までに着く。 ○バスと電車で行く。	●問題を整理しましょう。ここまででわかっていることは何がありますか。
○道順がわからない。 ○バス停や駅がわからないよ。 ○時刻表が必要だ。 ○バスと電車の料金はいくらなのかな。  	●問題を考える上で何か質問はありますか。 ●バスと電車の料金や時間については，この資料でわかるので調べてみましょう。 （時刻表・料金表の見方を【バスのみ】の万代シテイバスセンター前まで模造紙を用いて説明。それ以外の空欄を資料を基に埋めさせる。） ・調べる上で困ったことはワークシート右側に書かせる。わからないところは空欄でも構わない。 ※新潟せんべい王国の到着時間が児童によって異なっているかどうかを確認しておく。 ・全体で空欄の中身を確認。
○せんべい王国の到着時間が違うよ。 ○徒歩の部分の時間が違うから。	●どうして同じ行き方なのに到着時間が違うのでしょうか。
【問題】せんべい王国には，はたして何時に着くのだろうか？	
○歩く時間はどうしたらわかるかな。 ↓ ○距離と歩く速さがわかればいい。	◇条件整理・困難 ↓**●何がわかれば歩く時間がわかりますか。** ◇条件整理・見通し(距離と時間に着目した時点で)
○実際に距離を調べられないからどうしよう。 ↓ ○おおよその距離を調べればいいんだ。 ○およそ 12.7㎝ だ。	●まずはそれぞれの距離を調べてみましょう。 ◇理想化・困難 ↓**●地図から調べられないですか？** ◇理想化・見通し（おおよそでいいと着目した時点で）

〈実際に計算した場合〉 12.7cm×10000＝127000cm 127000cm＝1270m 〈地図〉 地図上の 1 cm が 100m だから 1270m だな。	
○わからない。 ○距離はわかったけどどうやって求めようか。 ↓ ○私の考えでは 1270÷20=分速 63.5m です。 ○大体 100mを 1 分ぐらいだから，分速 100mだよ。 ○でも信号もあるし，歩く速さは一定じゃないからわからないな。 ↓ ○信号は考えないで，歩く速さは一定にしよう。 ○実際にやってみようよ。 ○ストップウォッチとメジャーかな。	●次に，歩く速さはどのくらいですか。 ◇仮説的・困難 ↓**●どうやったら，歩く速さを求めることができますか。** ◇仮説的・見通し（速さの数値を置いた時点で） ◇理想化・困難 ↓**●どうやったら歩く速さを考えやすいですか。** ◇理想化・見通し（速さを一定にした時点で）
5 秒で 7m 歩いた⇒速さは秒速 1.4m 5m で 4 秒 で歩いた⇒速さは秒速 1.25m 10m を 7 秒で歩いた⇒速さは秒速 1.42m	●実際に測定するためには，何が必要ですか。
○歩く速さを秒速 1.4mにしよう。	●それでは班ごとに実際に測定をして，速さを計算してみましょう。 （時間，距離は児童が設定し，教室内での実測から歩く速さを求めさせる。）
【バスのみ】　290÷1.4≒207　207 秒＝3 分 27 秒 【バスと電車】　1270÷1.4≒907　907 秒＝15 分 7 秒	●求めた自分の速さを基に，歩く時間を計算してみましょう。
○バスのみだと 10 時 27 分に到着する。バスと電車だと 10 時 28 分に到着する。	●何時にせんべい王国に着きますか。
○バスと電車を使うと安いけど，時間がぎりぎりだな。 ○バスと電車にします。その理由は，計算したら安かったからです。 ○バスのみです。時間に余裕があるからです。	●あなたならどのようにせんべい王国に行くか考えてください。 ●みなさん答えてくれました。それぞれ違ったものでしたね。最後にワークシート①に感想を書いてください。

（5）評価

【選び出す考え方】

・バス停および駅からの歩く時間を求めるために，歩く速さと距離が必要であると考えることができるか。

【理想化の考え方】

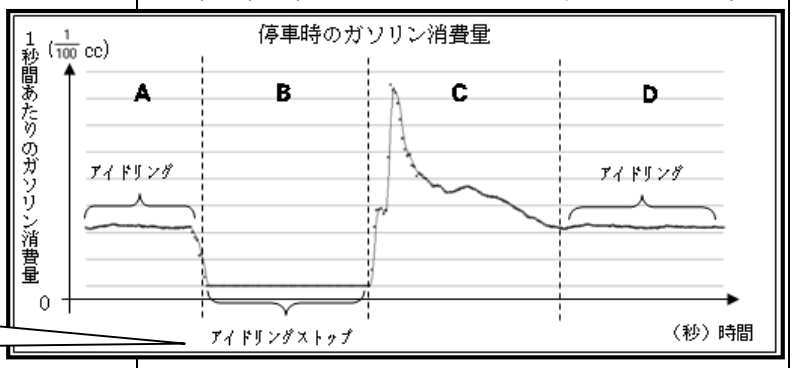
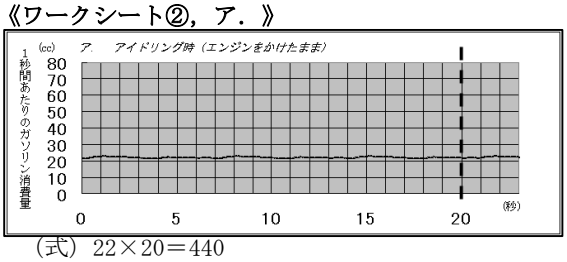
・バス停および駅からの歩く時間について，歩く速さが一定であると理想的に考えることができるか。

【仮説的な考え方】

・バス停および駅からの歩く時間について，足りない条件として歩く速さを仮説的に考えることができるか。

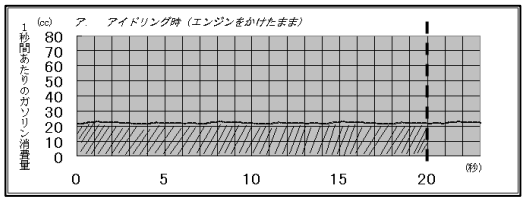
【参考資料】中学校授業実践（平成 22 年 12 月 1 日（水）2 校時・附属新潟中学校第 2 学年 1 組）

（1）題材名　「アイドリングストップの有無によるガソリン消費量を調べよう。」
（2）内容　　「関数」「図形」
（3）ねらい　アイドリングストップの有効性について検討する活動を通して，現実的事象を数学的に解決することができる。
（4）展開

○生徒の学びの姿	●教師の働きかけ（◇数学的な考え方）
《ワークシート①，1》 A：ガソリン消費が一定の状態 エンジンが動いている状態 B：ガソリンが消費されていない状態 エンジンが止まっている状態 C：ガソリンの消費が高い状態 エンジンをかけ始めた状態 D：ガソリン消費が一定の状態 エンジンが動いている状態 ※A，Dはアイドリング状態， Bはアイドリングストップ状態である。	・グラフを提示する。 ●A，B，C，Dでは車はどのような状態でしょうか。  ●バスも，アイドリングストップを行っています。
【問題】本当にアイドリングストップはガソリンを節約できるのだろうか？	
○アイドリングをしている状態と比べる。 《ワークシート①，2》 【できる】　→止まっている時間は節約できると思うから，実際にバスが行っているから 【できない】　→エンジンをかけた時に多くガソリンを消費するから 【わからない】→短い時間なら意味がなさそう，アイドリングストップをしている時間による	●何と比べてアイドリングストップはガソリンを節約できると言うのですか。 ・掲示図にアイドリング状態を記入する。 ・ワークシートに「できる」か「できない」か「わからない」を，その下に理由を記入させる。 ●節約できるかどうかは，アイドリングストップをしている時間によって違うようですね。
（ワークシート②）～20 秒間のガソリン消費量を調べよう（停車時）～	
○どうやって求めたらいいんだろう。（ア．について） ↓ ○縦は 1 秒間あたりのガソリン消費量だ。 ○でも数値が一定じゃないからどうしよう。 ↓ ○直線なら考えやすい。 《ワークシート②，ア．》  （式）22×20＝440 ア．のガソリン消費量…　440　cc	◇条件整理・困難 ↓●これは何のグラフですか。 縦と横は何を表していますか。 ・個人解決の途中で疑問に思ったことや困ったことを WS に記入させる。 ◇理想化・困難 ↓●どうなっていれば考えやすいですか。 考えやすい方法で考えてみよう。 ◇理想化・見通し（数値を読み取った時点で） ◇条件整理・見通し（22cc と 20 秒を選び出した時点で） ・ガソリン消費量を求めたら，イ．ウ．がガソリンを節約できるかどうか記入させる。 ・生徒の大半がア．まで求めたら，一度全体でア．を確認する。

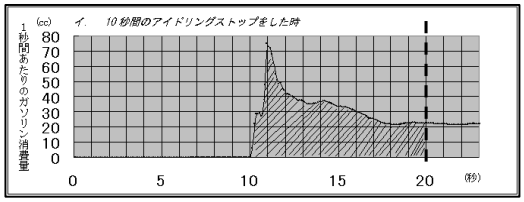
○イ．ウ．の時はどうやって求めたらいいんだろう。

↓



○

↓



○

○でも面積が求められないよ。

↓

○三角形や四角形に分けて求めてみよう。

◇仮説的・困難

↓**●22×20 というのはア．のグラフのどの部分を表していますか。**

※これらの手立ては，個別には行わず，全体に対して行う。

↓**●イ．ウ．のガソリン消費量はグラフのどの部分ですか。**

◇仮説的・見通し（イ．ウ．の面積に着目した時点で）

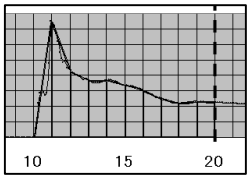
・イ．ウ．の面積に着目させるまでを全体で確認。

◇理想化・困難

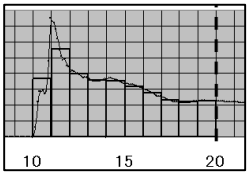
↓**●アと同じように考えやすい方法で求めてみましょう。**

◇理想化・見通し（近似図形を記入し始めた時点で）

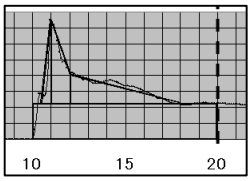
《ワークシート②，イ．ウ．》



（台形近似）



（長方形近似）



（色々な図形の組み合わせ）

（式）

イ．　38+58+39+37+36+32+28+23+22+22=335　（長方形近似）

ウ．　335+22×9=533　（イに長方形が加わった）

イ．のガソリン消費量…　335　cc

ウ．のガソリン消費量…　533　cc

※近似方法や目盛りの読み取り方によって最終的な答えに誤差がでるが，基準は 326.5711cc（イ．），523.4081cc（ウ．）とする。

○節約できる。

○節約できない。

●10 秒間のアイドリングストップはガソリンを節約できますか。

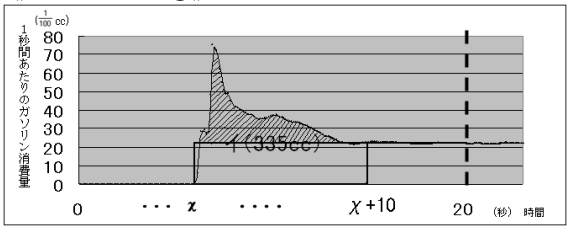
●1 秒間のアイドリングストップはガソリンを節約できますか。

→時間によってガソリンが節約できるかどうかが変わります。

《ワークシート③》～何秒以上のアイドリングストップならガソリン節約になるのか

・ア．イ．で求めた値を利用して求める。

《ワークシート③》



※基準で計算すると，4.68 秒以上となる。

（式）335－22×10=22X　より　X＝5.23　5.23 秒以上なら節約できる

●およそ 5 秒以上のアイドリングストップならガソリンが節約できることがわかりました。

・ガソリン消費量の単位が $\frac{1}{100}$ cc であることを確認する。

・最後に，ワークシートに授業の感想を書かせる。

（5）評価

【選び出す考え方】

・アイドリング時における 20 秒間でのガソリン消費量を求める際に，1 秒間あたりのガソリン消費量とアイドリングの時間を選び出しているか。

【理想化の考え方】

・20 秒間でのガソリン消費量を求める際に，直線のグラフと考えたり，おおよそのガソリン消費量を求めたりしているか。

【仮説的な考え方】

・アイドリングストップをした時のガソリン消費量を求める際に，面積を使って求めているか。