

離散 wavelet 変換による選点法境界要素解析の効率化

Application of discrete wavelet transform to wavelet collocation BEM

紅露一寛*・阿部和久**・田崎浩章***

Kazuhiro KORO, Kazuhisa ABE and Hiroaki TAZAKI

*学生員 修士 新潟大学大学院 自然科学研究科環境管理科学専攻 (〒950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050 番地)

**正会員 工博 新潟大学助教授 工学部建設学科 (〒950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050 番地)

***非会員 新潟大学学生 工学部建設学科 (研究当時)

Wavelets are employed in the boundary element analysis. A wavelet BEM provides a sparse coefficient matrix by truncating a small value in the matrix entries based on a specified threshold. In discretization process, the collocation method requires the wavelets as bases of an approximate solution, while the Galerkin method requires wavelets not only as bases of numerical solution but as weighting functions. The wavelet BEM is usually derived by the Galerkin method because of high sparsity and good condition of the matrix. However the Galerkin method requires double integration on the boundary. Therefore, in conventional BEMs, the discretized equations are derived based on the collocation method. In this study, improvement of the wavelet collocation BEM is attempted by applying the discrete wavelet transform to the system matrix. Through numerical examples, comparison of performance of the proposed method with the collocation and Galerkin methods is carried out and the validity of the method is investigated.

Key Words : boundary element method, Haar wavelet, discrete wavelet transform

1. はじめに

境界要素法は、解析領域の境界上で定義される境界値関数を未知量とする境界積分方程式のための汎用数値解析手法である。解析においては境界上での離散化のみを行えばよいと、領域内部の離散化を必要とする領域型解法に比べ相対的に小さい自由度の下で近似解を得ることができる。しかし、求解方程式は自由度こそ小さいがその係数行列は非対称密行列となるため、計算効率上の問題から大規模問題への適用には限界があると考えられてきた。

これに対し、境界要素解析のための効率的解法がいくつか提案され、その一つとして wavelet の適用が試みられている。この手法の有効性は、積分方程式を離散化して得られる密行列に対して高速 wavelet 変換アルゴリズムを適用した上で、微小成分の切り捨てにより疎行列への変換が可能であることを示した Beylkin ら¹⁾の論文によって確認されている。また、Alpert ら²⁾は第2種 Fredholm 積分方程式に対して wavelet と類似の基底を用いても同様の有効性が発揮できることを示している。

wavelet を用いた境界要素法 (wavelet 境界要素法) は、離散化の際に用いられる基底関数に対して wavelet を適用する手法である。wavelet 基底を導入することにより係数行列の優対角性が改善され疎行列に近い行列を得るため、微小な係数成分を切り捨てることでスパースな係数行列が得られる。そのため、大規模問題においても効率よく近似解を得ることが可能となる。現在に至るまで、wavelet 境界要素法に関する研究はいくつかの論文において報告されている。Steinberg ら⁴⁾や Sabetfakhri ら⁵⁾は、3 次スプライン関数に基づく正規

直交 wavelet である Battle-Lemarié wavelet を用いて解析を行なっている。Battle-Lemarié wavelet は指数関数的減衰性を示すもののコンパクトサポートを持たないため、無限サポートの打ち切りに伴う解析精度の低下が懸念される。そのため Wang⁶⁾⁷⁾は、コンパクトサポートを有する Daubechies wavelet を用いた解析手法を構成している。Daubechies wavelet の導入によって上述の問題点は解消されるが、基底関数が陽な形で与えられず境界積分を有理数上に限られた積分点に基づき数値的に処理する必要がある。また、Goswami ら⁸⁾は、正規直交基底を適用する際のこれらの煩雑さを避けるために、基底の直交条件を緩和した半直交 wavelet を構成し、境界要素解析に用いている。

なお、上述のいずれの文献においても Galerkin 法を用いて積分方程式を離散化している。Galerkin 法では、近似境界値関数と重み関数に対して wavelet 基底が適用される。その結果、微小な係数成分の切り捨てを実行することでスパースな係数行列が得られ、計算時に使用する記憶容量が大幅に削減されることが示されている。しかし、係数成分の切り捨てによる精度低下と記憶容量の圧縮率および計算時間などに基づき wavelet 積分方程式法の計算効率を詳細に検討したものは比較的少ない⁹⁾。

一方、wavelet 境界要素法を選点法により構成することも可能である。選点法においては、近似境界値関数にのみ wavelet 基底が適用される。この場合も Galerkin 法と同様に係数行列のスパース性はある程度発揮されるが、対角成分の値が非常に小さくなり得るなどの理由により、求解過程において反復解法の適用が困難であることが Hall ら¹⁰⁾によって指摘されている。そのため、選点法では wavelet 境界要素法の利点を生かすこ

とが難しい。しかし、選点法では一度の境界積分により求解方程式を誘導できるため、二重の境界積分を要する Galerkin 法に比べ係数行列の作成は容易である。そのため、通常の境界要素解析においては、一般に選点法による離散化が行なわれている。

本論文では、選点法に基づいて得られた wavelet 境界要素方程式に離散 wavelet 変換を適用することで、選点法による離散化の容易さと、Galerkin 法と同等の求解効率とを有する方程式の構成を試みる。また、選点法と Galerkin 法を含むこれら 3 手法における計算効率を、精度・記憶容量・計算時間に基づき詳細に比較検討し提案手法の有効性を示す。なお、本研究では離散化に当たり、近似基底に Haar wavelet を用いる。

2. Haar wavelet

wavelet は、実空間と像空間の双方で分解能を有する信号解析手法を構成するために作り出された関数系である。wavelet に対しては、mother wavelet とすべての基底との形状相似性と support 外での基底の急減衰性、基底のゼロモーメント性の 3 つの基本的性質が要求される。その下で、さらに付帯される条件によって多様な wavelet が構成されている。その中で、二乗可積分空間 $L^2(\mathbf{R})$ (\mathbf{R} : 実数全体の集合) の正規直交基底となる wavelet が正規直交 wavelet である¹¹⁾。この wavelet は任意の関数に対して完備な固有関数展開を与えるため、今日では微分方程式や積分方程式の数値解法に対しても用いられている。

正規直交 wavelet には、区間一定関数から構成される Haar wavelet、スプライン関数に基づく Battle-Lemarié wavelet、コンパクトサポートを有する高次の Daubechies wavelet などがある。ただし、境界要素解析において正規直交 wavelet を用いる場合、基底関数は対称もしくは反対称性、コンパクトサポート、陽関数表示可能な 3 つの性質を有することが望ましい。しかし、これらの性質をすべて兼ね備えた正規直交 wavelet は Haar wavelet しか存在しない。

そこで本研究では、Haar wavelet を基底関数として解析手法を構成する。Haar wavelet は、scaling 関数 $\phi_{0,j}$ と wavelet $\psi_{k,l}$ により構成される。ここで、 $\phi_{0,j}$ と $\psi_{k,l}$ を次式で与える。

$$\phi_{0,j}(\xi) = \begin{cases} 1, & (j-1) \leq \xi < j \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (1)$$

$$\psi_{k,l}(\xi) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}}, & 2^{-k}(l-1) < \xi < 2^{-k}(l-\frac{1}{2}) \\ -2^{\frac{k}{2}}, & 2^{-k}(l-\frac{1}{2}) \leq \xi < 2^{-k} \cdot l \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (2)$$

ただし、基底 ϕ と ψ には次式の関係が成立する。

$$\begin{aligned} \phi_{k,j}(\xi) &= 2^{-\frac{1}{2}} \{ \phi_{k+1,2j-1}(\xi) + \phi_{k+1,2j}(\xi) \}, \\ \psi_{k,l}(\xi) &= 2^{-\frac{1}{2}} \{ \phi_{k+1,2l-1}(\xi) - \phi_{k+1,2l}(\xi) \} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 k は階層レベル、 j, l は support 位置を表す。また、基底の形状を図-1 に示す。

なお、Haar wavelet は scaling 関数 ϕ の support で規格化した空間 $L^2(0,1)$ の正規直交基底となる。その

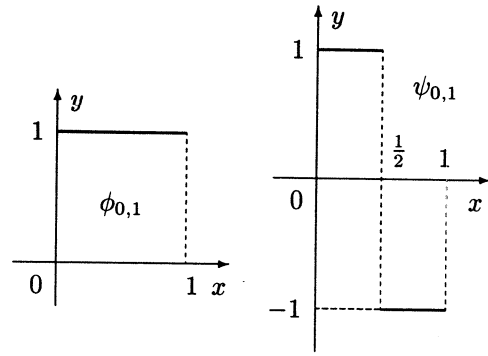


図-1 Haar scaling 関数 $\phi_{0,1}$ と Haar wavelet $\psi_{0,1}$

ため、任意の関数 $f \in L^2(0,1)$ は次式のように wavelet 展開可能となる。

$$f(x) = c_{0,1} \phi_{0,1}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{2^k} d_{k,l} \psi_{k,l}(x) \quad (4)$$

ただし、

$$\begin{aligned} c_{0,1} &= \int_0^1 f(x) \phi_{0,1}(x) dx, \\ d_{k,l} &= \int_0^1 f(x) \psi_{k,l}(x) dx \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 $c_{0,1}$ 、 $d_{k,l}$ は wavelet 係数である。

3. 求解方程式の構成

3.1 境界積分方程式の離散化

2 次元ポテンシャル問題について考える。直接法により定式化すると、次の境界積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})u(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}} \\ - \int_{\Gamma} u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})q(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

ただし、 u はポテンシャルとし、 $q = \partial u / \partial n$ とする。 u^* 、 q^* はそれぞれ u 、 q に関する基本解であり、点 \mathbf{x} 、 \mathbf{y} はともに境界 Γ 上に存在する。また、 $c(\mathbf{x})$ は点 \mathbf{x} が置かれている境界のなす角度によって決定される定数であり、 n は境界上の外向き法線方向を表わす。

式(6)を離散化するために、wavelet を基底とする近似関数を導入する。境界条件や境界形状に基づき区分された n_b 個の部分境界単位で境界値関数を wavelet 展開し、各項を階層順に並べると、近似関数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\xi) &= \sum_{j=1}^{n_b} \tilde{u}_{0,j} \phi_{0,j}(\xi) + \sum_{k=0}^m \sum_{l=1}^{2^k \cdot n_b} \tilde{u}_{k,l} \psi_{k,l}(\xi), \\ \tilde{q}(\xi) &= \sum_{j=1}^{n_b} \tilde{q}_{0,j} \phi_{0,j}(\xi) + \sum_{k=0}^m \sum_{l=1}^{2^k \cdot n_b} \tilde{q}_{k,l} \psi_{k,l}(\xi) \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 m は最高階層レベルを表わす。また、 $\phi_{0,j}$, $\psi_{k,l}$ はそれぞれ scaling 関数, wavelet であり、 $\hat{u}_{0,j}$, $\hat{q}_{0,j}$, $\hat{u}_{k,l}$, $\hat{q}_{k,l}$ は wavelet 係数とする。なお、 ξ は境界に沿ってとられた座標である。

式(7)で与えられる近似解を式(6)に代入すると、式(6)の恒等式は一般に成立せず、次の残差 $r \neq 0$ を生ずる。

$$r(\mathbf{x}) := c(\mathbf{x})\tilde{u}(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})\tilde{u}(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}} - \int_{\Gamma} u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})\tilde{q}(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}} \quad (8)$$

3.2 選点法による離散化過程

選点法を適用する場合、近似関数の自由度 $N = 2^{m+1} \cdot n_b$ と同数の選点 $\{\mathbf{x}_i | i = 1, \dots, N\}$ において、残差が次式の条件を満足することを要求する。

$$r(\mathbf{x}_i) = 0, \quad (i = 1, \dots, N) \quad (9)$$

式(9)より、次の連立方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{H}} & \hat{\mathbf{H}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{U}} \\ \hat{\mathbf{U}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{G}} & \hat{\mathbf{G}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{Q}} \\ \hat{\mathbf{Q}} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{U}}$, $\hat{\mathbf{U}}$, $\hat{\mathbf{Q}}$, $\hat{\mathbf{Q}}$ は、それぞれ式(7)の wavelet 係数 $\hat{u}_{0,j}$, $\hat{u}_{k,l}$, $\hat{q}_{0,j}$, $\hat{q}_{k,l}$ を成分とする列ベクトルである。また、 $\hat{\mathbf{G}}$, $\hat{\mathbf{H}}$ は scaling 関数を基底とする係数行列成分とし、 $\hat{\mathbf{G}}$, $\hat{\mathbf{H}}$ は wavelet を基底とする係数行列成分とする。

与えられた境界条件に基づいて式(10)を整理すれば、最終的に次の求解方程式を得る。

$$\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{b} \quad (11)$$

なお、 \mathbf{A} は係数行列とし、 \mathbf{z} , \mathbf{b} はそれぞれ未知量、既知量に関するベクトルである。

3.3 Galerkin 法による離散化過程

Galerkin 法では、近似関数の基底と同種の重み関数と境界積分方程式の残差との内積に対して直交条件を課すことで求解方程式を得る。まず、wavelet 基底により構成される重み関数列 $\{w_i(\xi)\}$ を次式で定義する。

$$\{w_i | i = 1, \dots, N\} := \{\phi_{0,1}, \dots, \phi_{0,j}, \dots, \phi_{0,n_b}, \psi_{0,1}, \dots, \psi_{k,l}, \dots, \psi_{m,2^m \cdot n_b}\} \quad (12)$$

ここで、式(8)の残差 r と式(12)の重み関数に対して、次式の条件を課す。

$$\int_{\Gamma} r(\xi) \cdot w_i(\xi) d\Gamma = 0 \quad (i = 1, \dots, N) \quad (13)$$

式(13)より、次の連立方程式を得る。

$$\bar{\mathbf{A}}\mathbf{z} = \bar{\mathbf{b}} \quad (14)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{A}}$ は係数行列であり、その成分は次のいずれかにより与えられる。

$$\begin{aligned} \{\bar{g}_{ij}\} &= \int_{\Gamma_i} w_i(\xi) \int_{\Gamma_j} u^*(\xi, \eta) w_j(\eta) d\Gamma_{\eta} d\Gamma_{\xi} \\ \{\bar{h}_{ij}\} &= c_{ij} \delta_{ij} + \int_{\Gamma_i} w_i(\xi) \int_{\Gamma_j} q^*(\xi, \eta) w_j(\eta) d\Gamma_{\eta} d\Gamma_{\xi} \end{aligned} \quad (i, j = 1, \dots, N) \quad (15)$$

なお、 ξ , η はともに境界上に沿ってとられた座標とし、 δ_{ij} は Kronecker のデルタである。また、前述のように幾何形状が滑らかな部分境界単位で境界値関数を wavelet 展開しているの、 $c_{ij} = 1/2$ となる。

式(15)の境界積分は、基底 w_i のサポートにおいて実行される。基底のサポート Γ_i は、wavelet 基底を用いる場合には基底の階層レベルに応じてその範囲が異なり、互いに重複する。そのため、境界積分を数値積分により評価する際には、サポートの重複部分の積分の計算効率と積分精度に配慮する必要がある⁶⁾。そこで、全ての基底が区間一定部分のみで構成されている Haar wavelet の性質に着目し、以下の方法で境界積分を評価する。

まず、階層最上位の wavelet 基底において、区間一定となる領域ごとに積分区間を細分割し、これを単位積分区間とする。このとき、全ての単位積分区間の長さは最上位 wavelet のサポートの半分の長さと同しくなり、基底は区間一定関数 (scaling 関数) で表現されることになる。そこで、各単位積分区間毎に次式の境界積分を行なう。

$$\int_{\Gamma} r(\xi) \cdot \phi_{m+1,i}(\xi) d\Gamma = 0, \quad (i = 1, \dots, N) \quad (16)$$

ここで、 m は最高階層レベルである。

ただし、本研究においては式(16)を Gauss 積分によって評価する。なお、積分点は scaling 関数 $\phi_{m+1,i}$ の各サポート上に同一数とっている。

式(16)より次の連立方程式を得る。

$$\mathbf{A}'\mathbf{z} = \mathbf{b}' \quad (17)$$

ここで、係数行列 \mathbf{A}' の成分は次の係数成分のいずれかにより与えられる。

$$\begin{aligned} \{g'_{ij}\} &= \int_{\Gamma} \phi_{m+1,i}(\xi) \int_{\Gamma} u^*(\xi, \eta) w_j(\eta) d\Gamma_{\eta} d\Gamma_{\xi}, \\ \{h'_{ij}\} &= c_{ij} \delta_{ij} + \int_{\Gamma} \phi_{m+1,i}(\xi) \int_{\Gamma} q^*(\xi, \eta) w_j(\eta) d\Gamma_{\eta} d\Gamma_{\xi} \end{aligned} \quad (i, j = 1, \dots, N) \quad (18)$$

基底 $\{\mathbf{w}\}$ は scaling 関数 $\{\phi_{m+1}\}$ の一次結合により与えることができ、次式で表わされる。

$$\{\mathbf{w}\} = \mathbf{W}\{\phi_{m+1}\} \quad (19)$$

ここで \mathbf{W} は wavelet 変換行列であり、次式で定義される。

$$\{w_{ij}\} = \int_{\Gamma} w_i \phi_{m+1,j} d\Gamma \quad (20)$$

式(19)を式(13)に代入すれば次式を得る.

$$\sum_j^N w_{ij} \int_{\Gamma} r(\xi) \cdot \phi_{m+1,j} d\Gamma = 0 \quad (21)$$

すると次の連立方程式を得る.

$$\mathbf{W}\mathbf{A}'\mathbf{z} = \mathbf{W}\mathbf{b}' \quad (22)$$

すなわち, Galerkin 法における求解方程式の係数行列 $\bar{\mathbf{A}}$ と既知ベクトル $\bar{\mathbf{b}}$ は, 式(17)で与えられた方程式に wavelet 変換を適用することで, 次式により得ることができる.

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{W}\mathbf{A}', \quad \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{W}\mathbf{b}' \quad (23)$$

式(23)の変換操作を伴う係数行列計算は, 高速 wavelet 変換によれば $O(N^2)$ の演算量で実行できる¹⁾. なお, この計算は, 保存対象となる係数成分をア priori に評価した上で選択的に係数計算を実行するアルゴリズム⁹⁾を適用することで演算量を $O(N(\log N)^\alpha)$, ($\alpha \geq 0$) まで削減することが可能である. しかし, 本研究では係数行列のスパース化を主目的に検討を行っており, 係数計算については式(23)のアルゴリズムの下で全係数を逐次求める方法を採用した.

3.4 選点法境界要素方程式の改良

式(6)の境界積分方程式を離散化する場合, wavelet 境界要素法では境界値関数を wavelet 級数によって近似する. その結果選点法では, 係数行列である \mathbf{G} 行列, \mathbf{H} 行列の成分は, 選点と積分要素との距離 d に関して, それぞれ $1/d$, $1/d^2$ の距離減衰性を有する. 一方, Galerkin 法は式(13)の条件を課すことで離散化を行なうため, 境界値関数に関する wavelet 展開の他に, 残差 r に対して近似基底による連続 wavelet 変換を適用することで定式化を行なう手法であると解釈できる. 結果として, 係数成分の距離減衰性は選点法のそれよりも1次高い $1/d^2$, $1/d^3$ となり, 選点法に比べて高いスパース性が期待できる.

選点法の係数行列の各列は, ある要素上での境界積分をソース点の関数とみなし, それを選点により離散化して得られたベクトルである. なお, この関数は上述の距離減衰性を持つ. したがって, 選点が境界上に順番に配置されていれば, 係数行列の各列に離散 wavelet 変換を適用して得られる行列は, Galerkin 法のそれと同様の距離減衰性を有するものと考えられる. この変換は次式により与えられる.

$$\bar{\mathbf{A}} = (\mathbf{W}^T)^{-1} \mathbf{A}, \quad \bar{\mathbf{b}} = (\mathbf{W}^T)^{-1} \mathbf{b} \quad (24)$$

ここで, \mathbf{A} , \mathbf{b} は選点法により得られた求解方程式(11)の係数行列および既知ベクトルである. なお, Haar wavelet は直交基底であるから, 変換行列 \mathbf{W} は直交行列である. したがって, $\mathbf{W}^T = \mathbf{W}^{-1}$ となり, 求解方程式は次式により与えられる.

$$\bar{\mathbf{A}}\mathbf{z} = \bar{\mathbf{b}}, \quad \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{W}\mathbf{A}, \quad \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{W}\mathbf{b} \quad (25)$$

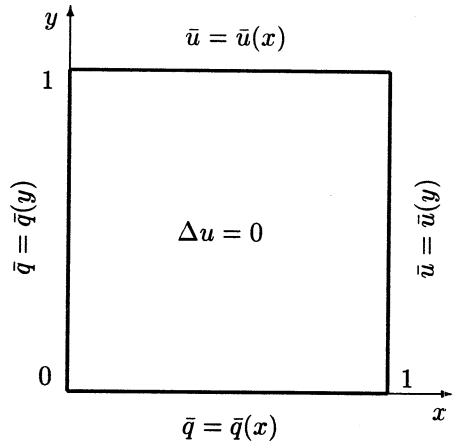


図-2 解析条件

以下では式(25)による手法を wavelet 選点法と呼ぶことにする. なお, 選点法に式(25)のような変換を行なうことによる効率化の可能性は, Alpert ら²⁾, Rathsfeld³⁾によっても示唆されている.

4. 解析結果に基づく計算効率の検討

4.1 解析条件

図-2に示す境界条件を有する二次元ポテンシャル問題について考える. ここで, 図-2の矩形領域の各辺で境界値を与える関数 $\bar{u}(\xi)$, $\bar{q}(\xi)$ を次式で定義する.

$$\begin{aligned} \bar{u}(\xi) &= \sin n\pi\xi, \\ \bar{q}(\xi) &= -n\pi \{ e^{n\pi\xi} + C \sinh n\pi\xi + (1+C) \sin n\pi\xi \}, \\ C &= \frac{1 - e^{n\pi}}{\sinh n\pi} \end{aligned} \quad (26)$$

ただし, 以下の解析においては $n = 32$ としている.

解析に際し, 求解計算には前処理付き GMRES(m)法¹²⁾を用いた. スパースな行列が得られる wavelet 境界要素法においては, Lage⁹⁾らが3次元ポテンシャル問題に対し GMRES 法を適用し, 良好な収束性を示すことを確かめている. また, 通常の境界要素解析においても様々な反復法の適用が試みられており, 混合境界値問題を対象とした Barra ら¹³⁾や3次元問題に適用した Merkel ら¹⁴⁾により, 前処理付き GMRES 法が安定した収束挙動を示し, 良好な収束性を発揮する解法であることが示されている. ただし, 通常の GMRES 法のアルゴリズムでは反復回数が増えるに従って使用する記憶容量が増加するため効率的でない. そこで本研究では, リスタート機能を有する反復アルゴリズムを採用することで前述の問題点の解決を図ることとした. なお, リスタート値 m は3とした.

前処理手法は, 文献^{13), 14)}により示されている対角スケーリングと不完全 LU 分解の有効性を踏まえ, 選点法においては不完全 LU 分解を採用し¹⁵⁾, Galerkin 法・wavelet 選点法においては対角スケーリングを用いた. なお, 選点法においても対角スケーリングによる前処理を試みたが, 収束解を得ることができなかった.

表-1 切り捨てパラメータ C_t

	選点法	Galerkin 法	wavelet 選点法
Case 1	5.0×10^{-3}	1.0×10^{-4}	
Case 2	1.0×10^{-3}	1.0×10^{-5}	
Case 3	5.0×10^{-4}	1.0×10^{-6}	
Case 4	1.0×10^{-4}	1.0×10^{-7}	

係数行列成分 g_{ij} , h_{ij} の切り捨ては行列の非対角成分のみを対象とし、次式の条件に基づいて実行した。

$$\begin{aligned} |g_{ij}| &< C_t \cdot G_{max} \\ |h_{ij}| &< C_t \cdot H_{max} \end{aligned} \quad (27)$$

ここで、 G_{max} , H_{max} はそれぞれ係数行列 \mathbf{G} , \mathbf{H} の成分のうち、scaling 関数を基底とするものの絶対最大値である。切り捨てパラメータ C_t は、表-1 に示す4ケースの下で解析を行なった。

また、近似解の精度は、ポテンシャルの厳密解と境界要素解との誤差に関する次式のノルムを用いて評価した。

$$Error = \sum_i^N |u_i - \tilde{u}_i| \cdot h_i \quad (28)$$

ここで、 u_i , \tilde{u}_i は、それぞれ基底の最上位 wavelet の区間一定領域中央点での厳密解、境界要素解の値である。 h_i は \tilde{u}_i に対応する区間一定領域の幅である。なお、本解析例において、厳密解は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \tilde{u}(x; y) + \tilde{u}(y; x), \\ \tilde{u}(\xi; \eta) &= (e^{n\pi\xi} + C \sinh n\pi\xi) \cdot \sin n\pi\eta \end{aligned} \quad (29)$$

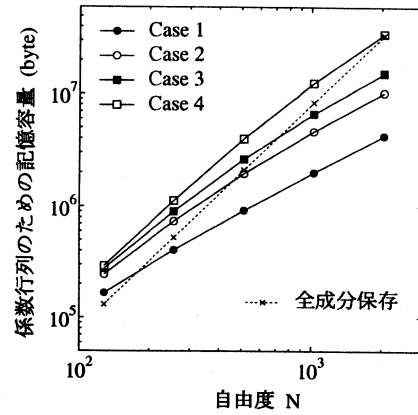
ただし、 C は式(26)により与えられた定数である。

4.2 係数行列のスパース性と記憶容量の削減効果

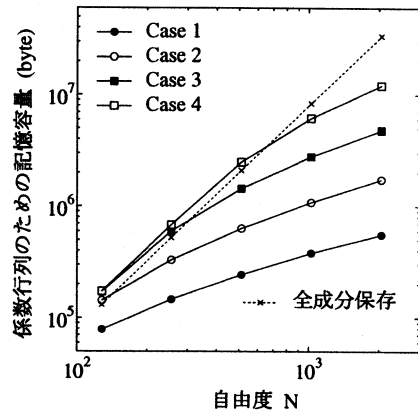
境界要素解を得るために必要となる記憶容量と自由度との関係を図-3 に示す。

各離散化手法とも、小自由度の下で解析を行なった場合には、係数成分を切り捨てずに全成分を保存する場合の方が記憶量は少なく済む。これは、切り捨てを実行し係数行列を一次元配列に保存する際に、係数成分を収納するベクトルの他に各成分の行、または列番号を記憶するためのベクトルが必要となるためである。しかし、wavelet 基底の階層を上げることによって自由度を増していくと、基底のサポート幅の縮小に伴って切り捨て対象となる成分数が次第に増加し、記憶容量が削減されていくことが分かる。また、選点法は切り捨て基準値が他の手法よりも大きいにもかかわらず、記憶容量の削減効果は最も低くなっている。一方、wavelet 選点法は Galerkin 法と同等の削減効果を有することがわかる。

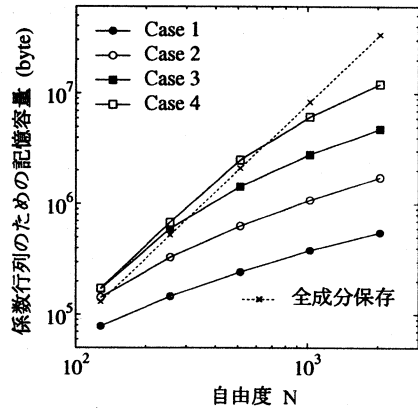
wavelet 境界要素法は、微小な係数成分の影響を無視することによって行列のスパース性を発揮する。そのため、係数成分の過度な切り捨ては境界要素解の精度の低下を引き起こすことが予想される。そこで、近似



(a) 選点法



(b) Galerkin 法

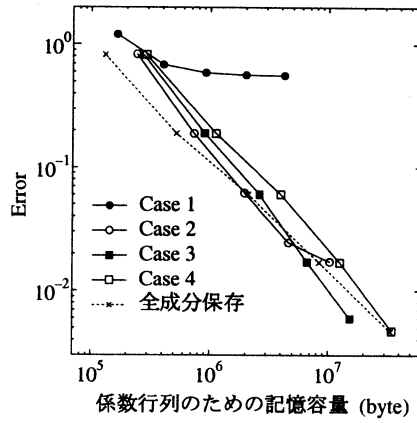


(c) wavelet 選点法

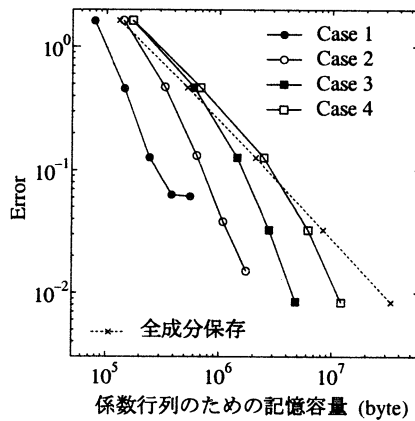
図-3 求解に要する記憶容量と自由度との関係

解の精度と記憶容量との関係について検討する。結果を図-4 に示す。

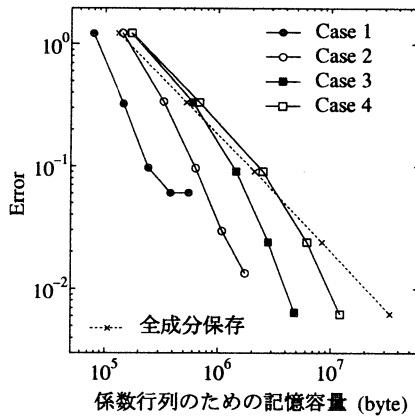
同一の切り捨て基準の下でも、自由度の増加に伴い切り捨てによる精度低下が顕著になっていく傾向が認められ、過度な切り捨てに対しては自由度の増加が解析精度の向上に必ずしもつながらないことがわかる。選点法では、ここで検討した自由度 (2048 自由度) の範囲内においては、全成分保存した場合とほぼ同様のパフォーマンスしか期待できず、wavelet の適用による



(a) 選点法



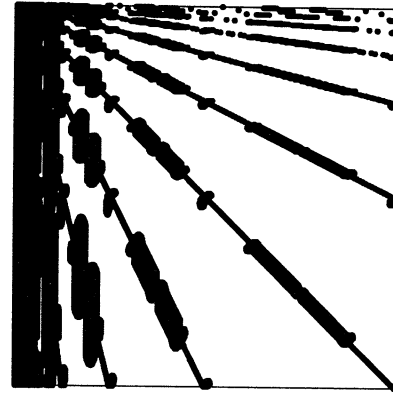
(b) Galerkin 法



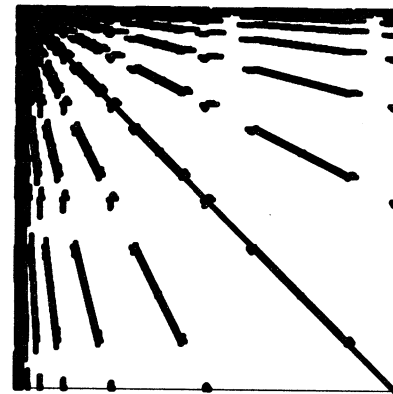
(c) wavelet 選点法

図-4 境界要素解の精度と記憶容量

改善が困難であることがわかる。この原因は、不完全 LU 分解によって前処理を行なうため、係数行列と同一サイズの前処理行列が必要となることがあげられる。そのため、自由度の増加によって発揮される行列のスパース性が損なわれる結果となった。一方 Galerkin 法と wavelet 選点法ではほぼ同等の効果を示し、精度に基づき切り捨て時と全成分保存時における記憶容量を比較すると、切り捨てを行なった場合の方が少ない記憶容量しか必要としないことがわかる。本解析例にお



(a) 選点法 (Case 1, 圧縮率 17.5%)



(b) Galerkin 法 (Case 1, 圧縮率 7.7%)

図-5 係数行列の保存成分の分布 (512 自由度)

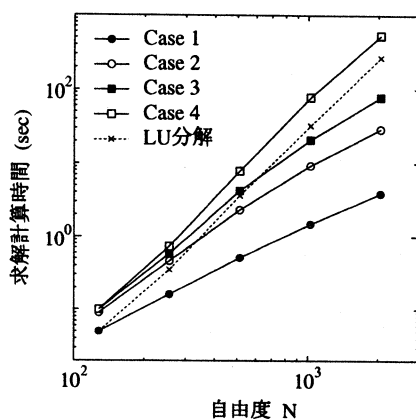
いては、全成分保存時の 1/10 以下の記憶量でも同精度の近似解を得ることができた。よって、各離散化手法を比較すると、Galerkin 法ないしは wavelet 選点法を適用した場合の方が記憶容量の面で効率的であると言える。なお、一般に Galerkin 法により離散化した場合には選点法に比べ高い精度の解が得られると考えられるが、本研究で用いた解析例において見る限り精度に有意な差は認められなかった。

次に、512 自由度における係数行列の保存成分の分布を図-5 に示す。なお、wavelet 選点法と Galerkin 法とではほぼ同一の分布を示したため、ここでは選点法と Galerkin 法における係数成分の分布のみを示す。

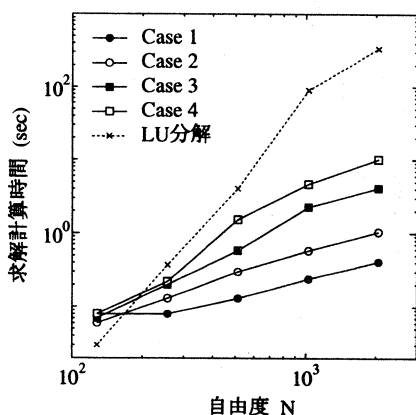
全成分数と保存成分数との割合を表わす圧縮率を計算したところ、17.5% (選点法)、7.7% (Galerkin 法) となった。なお、ここで設定した解析条件において Galerkin 法の場合は精度低下は認められないが、選点法の場合では著しく精度が低下している。一方、切り捨て基準値は Galerkin 法の方が厳しく設定されている。よって、このことから選点法を用いた離散化では低いスパース性しか得られないことがわかる。

4.3 計算時間に基づく有効性の検討

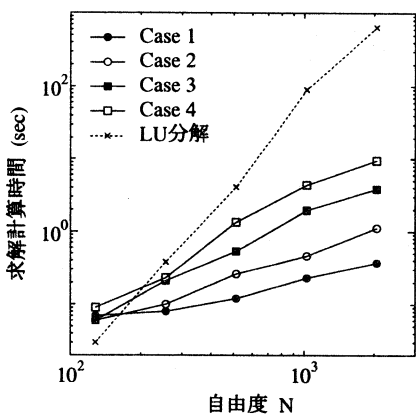
次に、計算時間に及ぼす離散化手法の影響について検討する。なお、比較のために LU 分解によっても求



(a) 選点法



(b) Galerkin 法



(c) wavelet 選点法

図-6 自由度と求解時間の関係

解計算を行なった。この場合、求解計算には全ての係数成分が必要となるため、係数の切り捨ては行っていない。

まず、図-6において、各離散化手法を適用した場合における自由度と求解計算に要した時間の関係を示す。

選点法、Galerkin 法、wavelet 選点法のいずれの場合においても、切り捨てを行なった際の成分数は $N(\log N)^\alpha$ ($\alpha \geq 0$) に比例する。したがって、反復解法

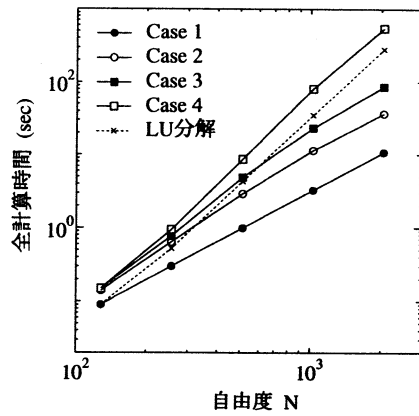
を用いた求解計算は $O(N(\log N)^\alpha)$ の演算量しか要せず、係数行列のスパース性が極めて低い場合でも $O(N^2)$ 以下の演算回数で済む。特に Galerkin 法と wavelet 選点法では、切り捨てによって高いスパース性を得るため、求解時間が大幅に短縮されることがわかる。本解析例においては、Case 4 の切り捨て基準の下でも LU 分解に比べ 1/10 以下の計算時間で近似解が得られている。しかし、選点法においては直接法とほぼ同等の求解時間が必要となっている。採用した離散化手法によって求解時間に大きな差が生じた最大の原因は、前処理手法の違いである。Galerkin 法と wavelet 選点法は、対角スケーリングによって前処理を行なうために $O(N)$ の前処理演算しか必要とせず、求解時間の大半は反復過程における行列-ベクトル積で占められている。一方、選点法では、消去演算を伴う不完全 LU 分解を用いるため、行列のスパース性の低下とともに前処理のための計算量が急激に増加する。そのため、求解計算の大部分を前処理に費やさなければならず、反復解法の利点を生かすことが困難となる。なお、前処理は、係数行列の性質を改善することにより反復解の収束性を高める手法である。選点法においては逆行列により類似した行列を前処理行列に用いない限り収束解が得られない事実から、Hall ら¹⁰⁾が指摘したように、選点法は Galerkin 法に比して条件の悪い係数行列を作り出してしまう本質的な問題点を有していると解釈することができる。

以上の結果より、Galerkin 法と wavelet 選点法はその係数行列の性質の良さゆえ、短時間で近似解が得られる手法であることがわかる。しかし、Galerkin 法では係数計算の際に二重積分を処理しなければならず、wavelet 選点法では変換のための演算が必要となるため、係数計算においては選点法に比べて不利である。そこで、全計算時間をもとに各離散化手法の計算時間の短縮効果について比較・検討する。図-7 に自由度と全計算時間との関係を示す。なお、本研究においては Galerkin 法の係数計算を Gauss 積分により評価している。その際の積分点数は、精度を確認した上で 4 点とした。

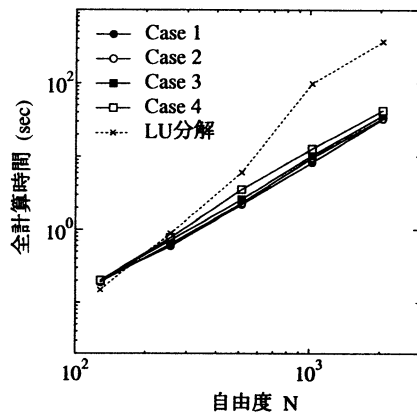
選点法では、求解計算時間と全計算時間との間にはほとんど差は認められず、求解計算の効率化なしには全計算時間の短縮は困難であることが分かる。一方、Galerkin 法、wavelet 選点法においては、全計算時間は係数の切り捨ての度合いにほとんど依存しない上、直接法を用いた場合の計算時間を上回ることはいない。よって、二重積分や変換計算を行なっても計算時間の短縮効果は損なわれないことが確認できる。ただし、wavelet 選点法は数値積分を必要としないため、Galerkin 法の計算時間の 1/3 程度にとどまった。したがって、同一自由度の下では wavelet 選点法が最も短い計算時間で計算できることがわかる。

次に、図-8 において境界要素解の精度と全計算時間の関係を示す。

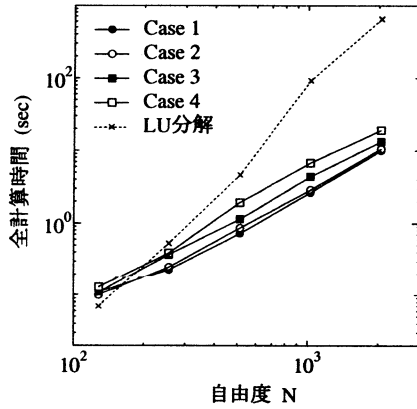
選点法では、全係数成分を用いて解析した場合と同精度の近似解を得るためには、ほぼ同量の計算時間を費やさなければならない。しかし、Galerkin 法ではその 1/10 程度、wavelet 選点法に至っては最短で 1/60 程度の計算時間で済んでいることがわかる。



(a) 選点法



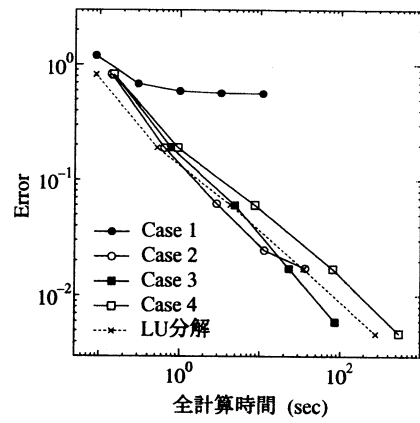
(b) Galerkin 法



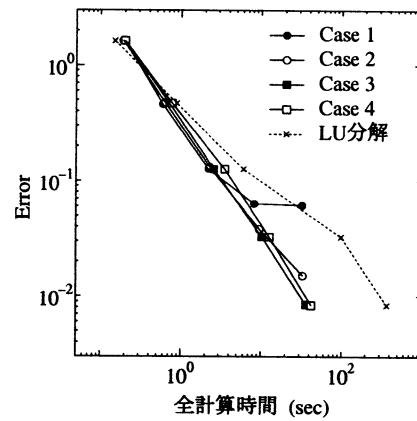
(c) wavelet 選点法

図-7 自由度と全計算時間の関係

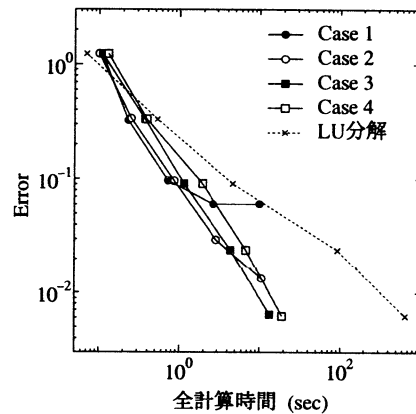
以上の結果より、Galerkin 法と wavelet 選点法は、求解計算が短時間で済むため、選点法に比べ計算時間の短縮効果が大いことがわかる。しかし、Galerkin 法における二重の境界積分を数値積分により評価した場合、精度の維持のために複数の積分点が必要となり、積分点の増加とともに計算時間が増加する。そのため、二重積分を要しない wavelet 選点法が計算時間の面で最も効率的な手法であると考えられる。



(a) 選点法



(b) Galerkin 法



(c) wavelet 選点法

図-8 境界要素解の精度と全計算時間の関係

5. 多数の閉境界を有する外部 Neumann 問題への適用

4.2, 4.3 で示したように、wavelet 境界要素法は自由度が大きいくほど計算効率上の利点を活かすことができる手法である。そのため、境界形状が複雑な場合や境界値関数の変動が大きい場合等、十分な精度の近似解を得るためには多くの自由度が必要となる問題に対して有効であると考えられる。

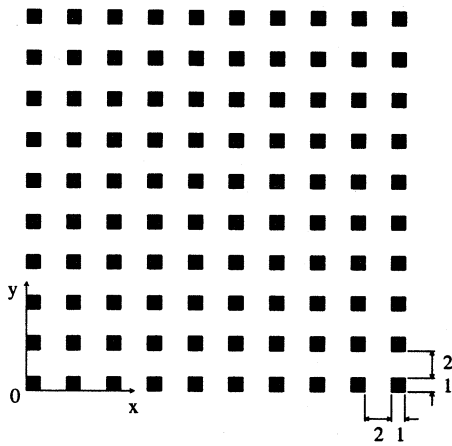


図-9 解析条件 (外部問題)

表-2 解析結果 (外部問題)

全成分数	40,960,000
保存成分数	1,273,984
圧縮率 (%)	3.11
求解時間 (sec)	5.12
全計算時間 (sec)	111.91

そこで、図-9 に示すような、合計 100 個の正方形の閉境界を有する外部 Neumann 問題に対して wavelet 境界要素法を適用する。なお、境界上の循環は存在しないものとし、境界条件は全ての境界上で $\bar{q} = 0$ となっている。この時、境界積分方程式は次式で与えられる。

$$c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})u(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}} = u_{\infty}(\mathbf{x}) \quad (30)$$

ただし、 u_{∞} は無限遠方でのポテンシャル分布関数である。

式(30)を離散化すると、次の求解方程式を得る。

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (31)$$

ここで、 \mathbf{K} は係数行列とし、 \mathbf{u} は境界上のポテンシャルに関する wavelet 係数に関する未知ベクトル、 \mathbf{F} は u_{∞} に関する既知ベクトルとする。

本解析例においては、一様流れの条件として $u_{\infty} = x$ を課し、wavelet 選点法により離散化を行なった。また、解析自由度は閉境界一個につき 64 としたため、全自由度は 6400 となっている。なお、切り捨てパラメータ C_t は 1.0×10^{-4} とした。

解析の際の計算時間と行列の圧縮率を表-2 に示す。本解析例においては、係数行列の成分数は 3%程度まで圧縮されている。これを記憶量に換算すると、通常で約 330(MB)の記憶量を要する計算が、わずか 15(MB)の記憶量で実現できることを意味する。求解に要した計算時間は 5 秒程度となり、約 2 分で全計算が終了した。なお、全係数を保存し直接法で求解を行なう場合の計算は、用いた計算機的能力を超えていたので実行していない。

最後に、境界要素解から計算した内点でのポテンシャル分布を図-10 に示す。図は等ポテンシャル線を表わ

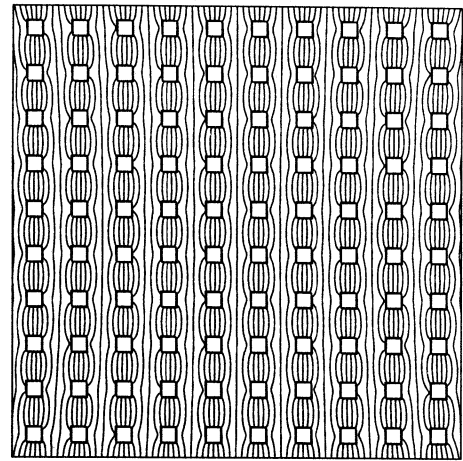


図-10 領域内部のポテンシャル分布

したものであるが、中央付近においてはほぼ周期的な解が得られており、概ね妥当な結果が得られていると考えられる。

6. おわりに

wavelet 境界要素法の離散化手法と計算効率との関係について検討した。離散化手法として選点法、Galerkin 法、選点法で得られた求解方程式に対し離散 wavelet 変換を行なう手法の 3 手法について、各々の計算効率を比較した。その結果、wavelet 境界要素法は近似解を得るために多数の自由度を必要とする問題に対し、その有効性を発揮することが確かめられた。また、選点法は他の 2 手法に比べて非効率な離散化手法であるが、求解方程式を離散 wavelet 変換することにより、Galerkin 法と同等の記憶容量の圧縮効果と Galerkin 法を上回る計算時間の短縮効果を有することがわかった。ただし、本研究においては、Galerkin 法の係数行列計算に $O(N^2)$ の演算量を必要とするアルゴリズムを用いており、この計算は保存成分を予め評価した上で選択的に係数を生成するアルゴリズムを適用することで $O(N(\log N)^{\alpha})$ まで削減することが可能である。一方、wavelet 選点法は Galerkin 法の場合と同一の分布を示す係数行列が得られるものの、その成分は離散 wavelet 変換を用いることで生成される。そのため、係数行列は全成分について計算しなければならず、この計算を $O(N(\log N)^{\alpha})$ 程度まで効率化することは今後の検討課題である。

なお、いずれの離散化手法においても切り捨て基準の緩和によって行列のスパース性は高まるが、過度な切り捨ては精度低下を招く恐れがあり、適用に際してはこの点に対する配慮が必要である。

参考文献

- 1) Beylkin, G., Coifman, R. & Rokhlin, V. : Fast wavelet transforms and numerical algorithms I, *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 44, pp. 141-183, 1991.
- 2) Alpert, B., Beylkin, G., Coifman, R. & Rokhlin, V. : Wavelet-like bases for the fast solution of second

- kind integral equations, *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol. 14, No. 1, pp. 159–184, 1993.
- 3) Rathsfeld, A. : A wavelet algorithm for the boundary element solution of a geodetic boundary value problem, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 157, pp. 267–287, 1998.
 - 4) Steinberg, B.Z. & Leviatan, Y. : On the use of wavelet expansions in the method of moments, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 41, pp. 610–619, 1993.
 - 5) Sabetfakhri, K. & Katehi, L. P. B. : Analysis of integrated millimeter-wave and submillimeter-wave waveguides using orthonormal wavelet expansions, *IEEE Trans. Microwave Theory tech.*, Vol. 42, No. 12, pp. 2412–2422, 1994.
 - 6) Wang, G. : A hybrid wavelet expansion and boundary element analysis of electromagnetic scattering from conducting objects, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 43, No. 2, pp. 170–178, 1995.
 - 7) Wang, G. : Application of wavelets on the interval to numerical analysis of integral equations in electromagnetic scattering problems, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 40, pp. 1–13, 1997.
 - 8) Goswami, J. C., Chan, A. K. & Chui, C. K. : On solving First-kind integral equations using wavelets on a bounded interval, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 43, No. 6, pp. 614–622, 1995.
 - 9) Lage, Ch. & Schwab, Ch. : On the implementation of a fully discrete multiscale Galerkin BEM, *Boundary Elements XIX*, (eds M. Marchetti, C.A. Brebbia & M.H. Aliabadi), Comp. Mech. Publ., Southampton, pp. 635–644, 1997.
 - 10) Hall, W.S. & McKenzie, R.A. : A sparse h-adaptive boundary integral equation solution for 2D Laplace equation using multi-wavelets, *Boundary Elements XIX*, (eds M. Marchetti, C.A. Brebbia & M.H. Aliabadi), Comp. Mech. Publ., Southampton, pp. 645–654, 1997.
 - 11) Williams, J.R. & Amaratunga, K. : Introduction to wavelets in engineering, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 37, pp. 2365–2388, 1994.
 - 12) Saad, Y. & Schultz, M.H. : GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 7, pp. 856–869, 1986.
 - 13) Barra, L.P.S., Coutinho, A.L.G.A., Mansur, W.J. & Telles, J.C.F. : Iterative solution of BEM equations by GMRES algorithm, *Computers & Structures*, Vol. 44, No. 6, pp. 1249–1253, 1992.
 - 14) Merkel, M., Bulgakov, V., Bialecki, R. & Kuhn, G. : Iterative solution of large-scale 3D-BEM industrial problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 22, pp. 183–197, 1998.
 - 15) 紅露一寛, 阿部和久: Wavelet-境界要素階層型 h-法の計算効率について, 境界要素法論文集, Vol. 15, pp. 71–76, 1998.

(1999 年 4 月 23 日 受付)