

## Wavelet BEMにおける特異・擬似特異積分の計算

Numerical treatment of singular and nearly singular integrals in wavelet BEM

阿部和久\*・加藤大輔\*\*・紅露一寛\*\*\*

Kazuhiisa ABE, Daisuke KATO and Kazuhiro KORO

\*正会員 工博 新潟大学助教授 工学部建設学科 (〒950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050 番地)

\*\*非会員 新潟大学学生 工学部建設学科 (研究当時)

\*\*\*正会員 博士 (工学) 新潟大学大学院 自然科学研究科 (〒950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050 番地)

Application of the wavelet-weighted Gaussian quadrature formula to the singular and nearly singular integrals is attempted in the context of implementation of the wavelet BEM. To achieve this, the singular or nearly singular integrand is decomposed into a singular or nearly singular but simple term and a regular part. The former is integrated analytically and the integral of the latter is calculated by the wavelet-weighted quadrature method. Moreover, in order to avoid the calculation of the Jacobian, the bases such as wavelets are described with respect to the arc length of each subboundary, and then the simplification of analytical integrals is attained. Numerical examples are presented to validate the developed method. It is concluded that the proposed method can shorten the computation time for matrix coefficients by a factor of 3 irrespective of the degrees of freedom.

**Key Words** : *singular and nearly singular integrals, wavelet-weighted quadrature, wavelet BEM*

## 1. はじめに

著者らはこれまで、境界要素解析の計算効率向上の目的で、waveletを近似基底に用いた、いわゆる wavelet BEMの適用について様々な観点から検討を行ってきた。任意曲面上での簡易な wavelet 展開の構成が難しい現状では、当該手法の三次元問題への適用に依然制約が課せられるものの<sup>1),2)</sup>、二次元問題に関しては多くの解析例によりその有効性が示されている<sup>3),4),5)</sup>。また、著者らの研究グループでは、境界要素解析への適用を指向した非直交 wavelet を、B-スプラインに基づき構成している<sup>6)</sup>。

当該の非直交 wavelet は、関数の解析的表示や有限サポートなどの特徴を持つ。さらに、半直交 wavelet<sup>7)</sup>のようなゼロモーメント次数の制約が無く、一定の多項式次数の下でもゼロモーメント次数を任意に選ぶことができるため、係数行列の圧縮性の向上に有効である。しかし、ゼロモーメント次数の増加はスプラインの節点の増加を伴う。そのため、曲線境界などを対象とする場合、多項式区間毎の数値積分を余儀なくされ、境界要素方程式の係数計算に多大な時間を費やす結果となる。

そこで、非直交 wavelet を重み関数とした Gauss 積分公式を作成した<sup>8)</sup>。この積分公式によれば、wavelet を重み関数に用いているため、積分区間を上述の多項式区間毎に分割する必要が無く、区間数によっては、基本解に特異性が存在しない要素上での積分に要する時間を 1/4 ~ 1/5 にまで短縮することができる。しかし、wavelet や B-スプラインなどの関数基底を重み関数としている関係上、積分区間の細分割や要素座標の非線形変換など、特異積分に対し通常の境界要素解析

で用いられる手法が適用できない。そのため、被積分要素のサポートが重なり合う場合や、近接する場合など、係数積分に特異性や擬似特異性が存在する際には Gauss-Legendre 積分を各多項式区間毎に適用せざるを得ず、これに多大な時間を要していた。係数成分の値は wavelet 間の距離の増加と共に減少し、それらを切り捨てることで行列の圧縮がなされる。したがって、自由度の増加と共に、保存成分のかなりの部分は近接要素に関するものにより占められ、その結果、特異積分や擬似特異積分を含む係数計算の割合が増大することとなる。以上のことより、wavelet BEMにおける係数行列成分作成に要する時間のさらなる短縮には、上述の特異積分および擬似特異積分の効率化が不可欠である。

本研究では、文献 8) で構成した wavelet 重み付き Gauss 積分を特異・擬似特異積分に適用することで、上述の問題点の改善を図る。具体的には、二次元問題において二次補間で境界形状を近似する場合を対象に、基本解を特異項や擬似特異項とそれ以外の項とに分離し、前者を解析積分で、後者を wavelet 重み付き Gauss 積分で求める方法を採用。なお一般に近似関数は、境界形状の近似補間におけるパラメータ座標上で定義される。しかしこの場合、ヤコビアンが存在が wavelet 重み付き積分の実行を困難なものにしてしまう。そのため本研究では、曲線境界長を座標パラメータにとり、その上で近似関数を定義する。この場合ヤコビアンが定数となるので、上述の問題は解消される。

以下ではまず、wavelet BEM について簡単に述べ、さらに特異・擬似特異積分に関する既往の代表的な処理方法について概説する。次に、それらの当該問題への適用可能性について吟味し、ここで提案する積分法を構成する。最後に、具体的適用例を通し提案手法の

有効性を検証する.

## 2. Wavelet BEM

### 2.1 Wavelet 展開による境界要素方程式の構成

二次元ポテンシャル問題を例に, wavelet BEM による定式過程の概略を示す. 直接法に基づく境界積分方程式は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})u(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}} \\ = \int_{\Gamma} u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})q(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}}, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで,  $u(\mathbf{x}), q(\mathbf{x})$  はそれぞれ境界  $\Gamma$  上の点  $\mathbf{x}$  におけるポテンシャルと流束,  $u^*, q^*$  はそれらに対応する基本解,  $c(\mathbf{x})$  は点  $\mathbf{x}$  での境界の幾何形状に依る係数で, 境界が滑らかな場所では  $1/2$  をとる.

式(1)の  $u, q$  の離散近似  $\tilde{u}, \tilde{q}$  に次の wavelet 展開を用いる.

$$\begin{aligned} \tilde{u} &:= \sum_{j=1}^{n_s} \hat{u}_{0,j} \phi_{0,j} + \sum_{k=0}^{m_r} \sum_{j=1}^{n_k} \tilde{u}_{k,j} \psi_{k,j}, \\ \tilde{q} &:= \sum_{j=1}^{n_s} \hat{q}_{0,j} \phi_{0,j} + \sum_{k=0}^{m_r} \sum_{j=1}^{n_k} \tilde{q}_{k,j} \psi_{k,j} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで,  $\phi_{0,j} = \phi(x-j), \psi_{k,j} = 2^{\frac{k}{2}} \psi(2^k x - j)$  であり,  $\phi, \psi$  は各々 scaling 関数と wavelet である. また,  $n_s, n_k$  はそれぞれ  $\phi_{0,j}, \psi_{k,j}$  の個数,  $m_r$  は最上位 wavelet の階層数,  $\hat{u}_{0,j}, \tilde{u}_{k,j}, \hat{q}_{0,j}, \tilde{q}_{k,j}$  は展開係数である.

本研究で対象とする scaling 関数と非直交 wavelet は次式で与えられる<sup>6)</sup>.

$$\begin{aligned} \phi^m(x) &= \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \binom{m+1}{j} (x-j)_+^m, \\ \psi_n^m(x) &= \frac{\alpha_n^m}{m!} \sum_{j=0}^{m+n+1} (-1)^j \binom{m+n+1}{j} (2x-j)_+^m \end{aligned} \quad (3)$$

ここで, scaling 関数  $\phi^m(x)$  は区間  $m$  次多項式で与えられる  $m+1$  次の B-スプライン,  $\psi_n^m$  は  $n$  次のゼロモーメント性を持つ wavelet であり, それぞれ  $(m+1), (m+n+1)$  個の多項式区間より成る. また,  $\alpha_n^m$  は  $\psi_n^m$  を規格化するための係数であり,  $(\cdot)_+$  は切断べき関数を表し,  $(x)_+ = H(x) \cdot x$  ( $H$ : Heaviside 関数) で与えられる.

なお,  $n$  次のゼロモーメント性は次式で定義される.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^p \psi(x) dx = 0, \quad (p = 0, 1, \dots, n-1) \quad (4)$$

区間一定関数 ( $m=0$ ) の場合を例に, scaling 関数  $\phi^0$  と wavelet  $\psi_3^0, \psi_4^0$  を図-1 に示す.

式(2)を式(1)に代入し, Galerkin 法の下で離散化すると次の境界要素方程式を得る.

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{q} \quad (5)$$

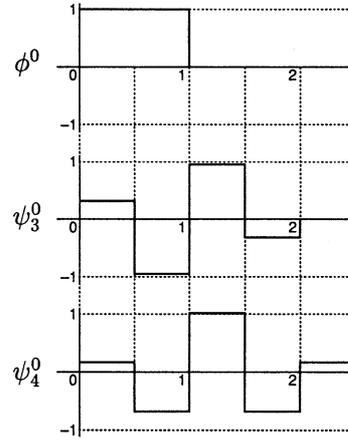


図-1 Scaling 関数  $\phi^0$  と wavelet  $\psi_3^0, \psi_4^0$

ここで,  $\mathbf{u}, \mathbf{q}$  は式(2)の展開係数より成るベクトル,  $\mathbf{H}, \mathbf{G}$  は次式の積分を成分に持つ係数行列である.

$$\begin{aligned} h_{ij} &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} w_i w_j d\Gamma + \int_{\Gamma} w_i \int_{\Gamma} q^* w_j d^2\Gamma, \\ g_{ij} &= \int_{\Gamma} w_i \int_{\Gamma} u^* w_j d^2\Gamma \end{aligned} \quad (6)$$

なお,  $w_i$  は関数基底  $\phi_{0,j}, \psi_{k,j}$  を順次並べたものである. また, 境界  $\Gamma$  が区間毎に滑らかな部分境界で構成されている場合,  $h_{ij}$  の定義式の右辺第 1 項の積分にかかる係数は恒等的に  $1/2$  となる.

### 2.2 Wavelet 重み付き Gauss 積分

式(6)で, 基本解  $u^*, q^*$  を含む積分項は  $w_i$  を伴う二重積分で与えられる. これは形式的に次のような積分に帰着される.

$$I_1 = \int_{-h/2}^{h/2} K(\xi) w(\xi) d\xi \quad (7)$$

ここで  $K(\xi)$  は基本解,  $w$  は  $\phi(\xi) = \phi^m(x+h/2)$  または  $\psi(\xi) = \psi_n^m(x+h/2)/\alpha_n^m$  であり,  $h$  は  $w(\xi)$  のサポート長である.

$w(\xi)$  は前述のように  $(m+1)$  または  $(m+n+1)$  個の区間多項式より成る. したがって,  $K(\xi)$  が積分区間内で特異性を持たず緩やかに変動する場合でも, Gauss-Legendre 積分のような通常の積分公式によりその積分を評価する際には, 各多項式区間毎の計算が必要となる. しかし,  $w(\xi)$  を重みとした積分公式<sup>8)</sup>によれば積分区間の細分割は不要となり, 式(7)は次式で計算できる.

$$I_1 \simeq \sum_i^{N_w} K(\xi_i) \alpha_i \quad (8)$$

ここで,  $\xi_i, \alpha_i$  は積分点座標とその重み係数,  $N_w$  は積分点数である.

### 2.3 係数行列成分の切り捨て

Wavelet BEM では, 絶対値の小さな係数行列成分を切り捨てることで疎行列化を図り, 計算効率を向上さ

せる。さらに、切り捨ての対象となる成分を式(6)の積分計算の前に判定し、係数計算の効率化を図る。本研究ではこの事前評価を次式に基づき行なう。

$$\begin{aligned} |h_{ij}| &\simeq \bar{h}_{ij} := C_{ij} \cdot \frac{(n_i + n_j)!}{r_0^{n_i+n_j+1}}, \\ |g_{ij}| &\simeq \bar{g}_{ij} := C_{ij} \cdot \frac{(n_i + n_j - 1)!}{r_0^{n_i+n_j}}, \\ C_{ij} &:= \frac{\alpha_{n_i}^m \alpha_{n_j}^m A_{n_i} A_{n_j} J_i^{n_i+1} J_j^{n_j+1}}{n_i! n_j!}, \\ A_n &:= \int_{-h/2}^{h/2} \xi^n w(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 $n_i, n_j$  は基底  $w_i, w_j$  のゼロモーメント次数、 $r_0$  は基底サポート間の距離の代表値、 $J_i, J_j$  は各基底のサポート中央におけるヤコビアン値である。

式(9)の  $\bar{h}_{ij}, \bar{g}_{ij}$  に対し次式が成立する場合には、式(6)の積分を実行せずに当該成分を切り捨てる。

$$\bar{h}_{ij} < \tau \cdot H_{max}, \quad \bar{g}_{ij} < \tau \cdot G_{max} \quad (10)$$

ここで、 $H_{max}, G_{max}$  は  $|h_{ij}|, |g_{ij}|$  の代表値である。切り捨て基準値  $\tau$  は文献9)に構成した方法により事前に与える。

### 3. 特異・擬似特異積分に対する既往の主な処理方法

式(1)において、基本解  $u^*, q^*$  はソース点  $\mathbf{x}$  と積分点  $\mathbf{y}$  との距離  $r$  について、それぞれ  $\log r, 1/r$  の特異性を有する。したがって、式(6)の係数計算においてこれら特異関数の積分(特異積分)が必要となる。また、ソース点が積分区間上になくても、その近傍に位置する場合、被積分関数は急変動し、擬似特異性を有する。これら特異・擬似特異積分の処理方法については、これまでに様々なものが提案されている。以下では、その中の代表的な方法について概説する。

#### 3.1 積分区間を細分割する方法

擬似特異積分を対象とする場合、被積分関数は急変するものの特異性は存在しない。したがって積分区間を細分割し、各部分区間での被積分関数の変動を十分小さく抑えることで積分精度を向上させることができる<sup>10),11)</sup>。

#### 3.2 積分座標を非線形変換する方法

積分変数を非線形変換し、その結果得られるヤコビアンにより被積分関数の特異性<sup>12),13)</sup>や擬似特異性<sup>14)</sup>を緩和する方法が用いられることがある。特に、本手法による弱い特異性の除去は簡易で有効である。

#### 3.3 重み付き積分による方法

基本解に含まれる特異項<sup>15)</sup>や擬似特異項<sup>16)</sup>を重み関数に用いた積分公式によれば、特異積分の数値的処理は容易になる。対数重み付き積分公式はその代表例で

あり、広く用いられている。しかし、特に擬似特異積分においては、ソース点の位置毎に公式を作成する必要がある、汎用性に欠ける。

#### 3.4 特異積分の正規化による方法

剛体変位などに対して成立する積分恒等式を、対象となる積分方程式から差し引くことにより、基本解に起因する特異積分を消去する様々な方法が提案されている<sup>17)</sup>。また、部分積分により基本解の特異性を低減する方法<sup>18),19)</sup>もいくつか提案されている。これらの方法は強特異性や超特異性の除去には適用できるが、対数の弱い特異性は別途処理する必要がある。また、部分積分により、弱い特異性をも除去した定式化も試みられているが<sup>20)</sup>、方程式の性質上、離散化後の連立方程式の安定な計算が困難である。

#### 3.5 被積分関数より特異・擬似特異項を分離する方法

被積分関数の中から、特異項や擬似特異項など数値積分の精度低下の原因となる項を取り出し、その項を解析積分で、それを被積分関数から差し引いた項を数値積分で各々求める方法が提案されている<sup>21),22),23)</sup>。本手法は座標の変換や分割を必要とせず、特異性の如何に関わらず適用可能である。

## 4. 提案する方法

本研究で対象としている非直交 wavelet を含む数値積分の計算効率の向上には、積分区間を wavelet の各多項式区間毎に分割せずに、全区間で単一の積分公式を適用することが必要である。その意味で、wavelet 重み付き積分の採用は必須である。この条件の下では、積分区間を細分割する 3.1 に述べた方法は適用できない。また、3.2 に挙げた方法も、座標を非線形変換するので、wavelet を重みに用いた積分公式への適用は不可能である。さらに、3.3 の重み付き積分による方法も、特異点で積分区間を2分する必要がある、特異・擬似特異核と wavelet との積を重みとした積分公式の作成は極めて難しい。一方、3.5 の被積分関数より特異項を分離する方法は、積分区間の分割や非線形変換などを必ずしも必要とせず、wavelet 重み付き積分へも適用可能である。よって、本研究では当該手法に基づいた処理方法を構成する。

#### 4.1 従来法の問題点

上述のように、ここでは 3.5 に挙げた手法に準ずる手順で、式(6)に現れる特異・擬似特異積分を処理する。以下では、既往の代表的な方法として Parreira と Guiggiani の方法<sup>21)</sup>を例に概要を説明し、その改善すべき点について考察する。

次の二重積分を考える。

$$I_2 := \int_{\Gamma_2} w_2(\xi_2) J_2(\xi_2) \int_{\Gamma_1} p^*(\xi_1, \xi_2) w_1(\xi_1) J_1(\xi_1) d\xi_1 d\xi_2 \quad (11)$$

ここで,  $w_1, w_2$  は部分境界  $\Gamma_1, \Gamma_2$  上で定義された近似基底,  $\xi_1, \xi_2$  は要素座標,  $J_1, J_2$  はヤコビアンである. また,  $p^*$  は  $1/(\xi_1 - \xi_2)$  の特異性を有し, 積分は Cauchy の主値の意味でとるものとする.

次の関数  $f(\xi_1, \xi_2)$  を導入する.

$$\frac{f(\xi_1, \xi_2)}{\xi_1 - \xi_2} = p^*(\xi_1, \xi_2)w_1(\xi_1)w_2(\xi_2)J_1(\xi_1)J_2(\xi_2) \quad (12)$$

ここで  $f(\xi_1, \xi_2)$  は特異性のない関数とする.

すると, 式(11) は次のように与えられる.

$$I_2 = \int_{\Gamma_2} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi_1, \xi_2)}{\xi_1 - \xi_2} d\xi_1 d\xi_2 \quad (13)$$

式(13) を次のように書き替える.

$$I_2 = \int_{\Gamma_2} \int_{\Gamma_1} \left( \frac{f(\xi_1, \xi_2)}{\xi_1 - \xi_2} - \frac{f(\xi_2, \xi_2)}{\xi_1 - \xi_2} \right) d\xi_1 d\xi_2 + \int_{\Gamma_2} f(\xi_2, \xi_2) \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\xi_1 - \xi_2} d\xi_1 d\xi_2 \quad (14)$$

式(14) 右辺第一項の積分には特異性が存在しないので数値積分を適用して処理する. 第二項の  $\xi_1$  に関する積分は解析的に求める. この段階で  $\xi_2$  に関する積分項は被積分関数に対数を含む. 文献 21) ではこの積分に対数重み付き積分を用いている. なお, 式(14) 右辺第二項の被積分関数  $f(\xi_2, \xi_2)$  は基底関数の積  $w_1(\xi_2)w_2(\xi_2)$  を含んでおり, 明らかに wavelet 重み付き積分の適用は適切でない. また, ヤコビアンを含むので解析積分の実行には複雑な計算が不可避となる.

## 4.2 境界曲線長に関する近似関数の展開

特異性を含む積分も, 擬似特異性を含む積分も, ヤコビアンの積分を数値的に処理せざるを得ないことから, 定式化に際し大きな制約を受けている. そこで本研究では, 境界形状が Lagrange 補間で与えられている場合を対象に, 補間パラメータに関してではなく, 境界曲線長に関して近似基底を定義することで, ヤコビアンの計算を必要としない積分方法を構成する.

具体例として,  $\Gamma$  上の部分境界が次の二次補間で与えられている場合を考える.

$$x = \sum_{i=1}^3 x_i N_i(\xi), \quad y = \sum_{i=1}^3 y_i N_i(\xi) \quad (15)$$

ここで  $(x, y)$  は部分境界上の点,  $(x_i, y_i)$  は補間点,  $N_i(\xi)$  は二次の Lagrange の補関数,  $-1 \leq \xi \leq 1$  は補間パラメータである.

部分境界のパラメータ空間の中央 ( $\xi = 0$ ) に原点をおき, 境界曲線長の座標  $s$  を導入する.  $s$  は次の関数

で与えられる.

$$s(\xi) := \int_0^\xi J(\xi) d\xi = \frac{2a\xi + b}{4a} J(\xi) + \frac{4ac - b^2}{8a\sqrt{a}} \log |2a\xi + b + 2\sqrt{a}J(\xi)| - \left( \frac{b\sqrt{c}}{4a} + \frac{4ac - b^2}{8a\sqrt{a}} \log |b + 2\sqrt{ac}| \right) \quad (16)$$

ここで  $J(\xi) (= ds/d\xi)$  は式(15) の補間におけるヤコビアン,  $a, b, c$  は次式で定義される定数である.

$$a = (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + (y_1 - 2y_2 + y_3)^2, \\ b = -(x_1 - 2x_2 + x_3)(x_1 - x_3) - (y_1 - 2y_2 + y_3)(y_1 - y_3), \\ c = \frac{1}{4}(x_1 - x_3)^2 + \frac{1}{4}(y_1 - y_3)^2 \quad (17)$$

近似解の関数基底  $w_i$  は  $\xi$  ではなく式(16) の  $s$  について定義する.

## 4.3 特異積分の処理

次の積分を考える.

$$I_3 := \int_{\Gamma_2} w_2(s_2) \int_{\Gamma_1} w_1(s_1) K(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \quad (18)$$

ここで  $K$  は基本解であり,  $w_1, w_2$  の定義された区間  $\Gamma_1, \Gamma_2$  は同一の曲線部分境界上にあり, 少なくとも一部分は互いに重なり合っているものとする. このとき,  $s_1 = s_2$  において  $K$  に特異性を生ずる.  $K(s_1, s_2)$  を特異項  $S$  とそれ以外の項  $R$  とに分離する.

$$K(s_1, s_2) = S(s_1 - s_2) + R(s_1, s_2) \quad (19)$$

ここで特異関数  $S$  は  $s_1 - s_2$  の陽な関数として与えられているものとする.

積分  $I_3$  を次のように書き替える.

$$I_3 = \int_{\Gamma_2} w_2(s_2) \int_{\Gamma_1} w_1(s_1) R(s_1, s_2) ds_1 ds_2 + \int_{\Gamma_2} w_2(s_2) \int_{\Gamma_1} w_1(s_1) S(s_1 - s_2) ds_1 ds_2 \quad (20)$$

式(20) 右辺第一項に特異性は存在しないので, この二重積分は基底  $w_1, w_2$  の重み付き積分により求める. 一方, 右辺第二項はヤコビアンを含まないので容易に解析積分することができる.

基本解  $K$  が  $u^*$  で与えられている場合, 式(19) の各項は次式で与えられる.

$$S = -\frac{1}{2\pi} \log |s_1 - s_2|, \quad R = u^* - S \quad (21)$$

また, ソース点と積分点間の距離  $r \rightarrow 0$  で  $q^* \rightarrow 1/(4\pi\rho)$  ( $\rho: r=0$  での曲率半径) となるので, 式(18)

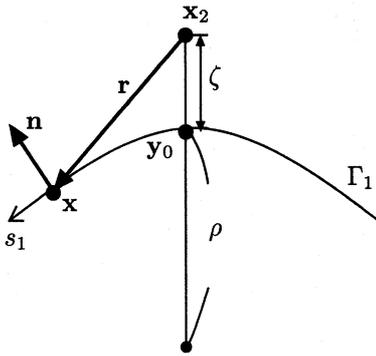


図-2 近接点と曲率半径

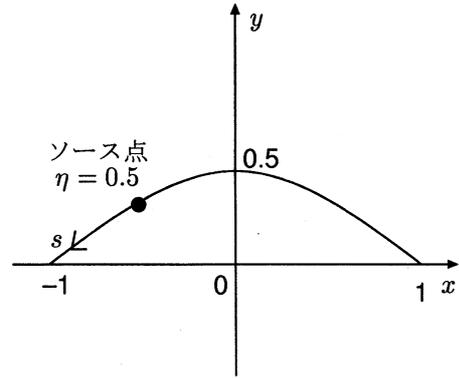


図-3 曲線境界とソース点

の主値積分には特別な処理を必要としない。一方、例えば静弾性問題においては、表面力の基本解  $p_{12}^*, p_{21}^*$  に  $1/(s_1 - s_2)$  の特異項が存在する。この場合は、式(19)の各項を次のようにおけば良い。

$$S = -\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)(s_1-s_2)}, \quad (K = p_{12}^*)$$

$$= \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)(s_1-s_2)}, \quad (K = p_{21}^*) \quad (22)$$

$$R = p_{ij}^* - S$$

ここで  $\nu$  はポアソン比である。

なお、 $w_i$  は曲線長  $s$  の関数として定義されるが、基本解の計算には  $s_1, s_2$  における座標値  $(x, y)$  や法線ベクトル  $\mathbf{n}$  などの評価が必要である。これらは補間関数を定義しているパラメータ座標  $\xi$  の関数として与えられており、直接  $s$  の関数として与えられてはいない。したがって、各積分点に対応する  $\xi$  を求め、その下でこれらの値を計算する必要がある。本研究では、この  $s$  に対する  $\xi$  の値を式(16)に基づき Newton-Raphson 法で求める方法を採用した。ちなみにこの計算は、2,3 回の反復で十分な精度にまで収束するものである。

#### 4.4 擬似特異積分の処理

式(18)の積分で  $\Gamma_1$  と  $\Gamma_2$  とが重なり合う部分を持たず、かつ近接している場合、基本解  $K(s_1, s_2)$  は擬似特異性を持つ。ここでは、式(18)の  $\Gamma_1$  に関する積分において擬似特異性の除去を行う。なお、 $\Gamma_2$  の積分については特段の処理を施さない。

図-2 の幾何条件の下で次の積分  $I_4$  を考える。

$$I_4 := \int_{\Gamma_1} w_1(s_1)K(\mathbf{x}(s_1), \mathbf{x}_2) ds_1 \quad (23)$$

ここで  $\mathbf{x}(s_1)$  は  $\Gamma_1$  上の積分点、 $\mathbf{x}_2$  はソース点である。

$\mathbf{x}_2$  から  $\Gamma_1$  に垂線を下ろし、 $\Gamma_1$  との交点を  $\mathbf{y}_0$ 、 $\mathbf{x}_2$  と  $\mathbf{y}_0$  との距離を  $\zeta$  (外向き法線方向を正)、点  $\mathbf{y}_0$  における  $\Gamma_1$  の曲率半径を  $\rho$  とする。このとき、 $r^2 = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^2$ 、 $r_n := \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{n}$  はそれぞれ点  $\mathbf{y}_0$  の近傍で次式により与えられる。

$$r^2 \simeq \frac{\rho + \zeta}{\rho} s^2 + \zeta^2, \quad r_n \simeq \frac{\rho + \zeta}{2\rho^2} s^2 - \zeta \quad (24)$$

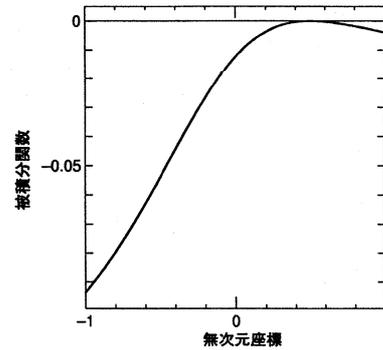


図-4  $u^*$  に対して特異項を除去して得た関数  $R$  の分布

ここで  $s$  は簡単のため  $\mathbf{y}_0$  を原点にとるものとする。このとき、 $u^*, q^*$  は次式で近似できる。

$$u^* \simeq \tilde{u}^* := -\frac{1}{4\pi} \log \left( \frac{\rho + \zeta}{\rho} s^2 + \zeta^2 \right), \quad (25)$$

$$q^* \simeq \tilde{q}^* := -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{(\rho + \zeta)s^2 - 2\rho^2\zeta}{2\rho(\rho + \zeta)s^2 + 2\rho^2\zeta^2}$$

以上より、式(23)を次のように書き替える。

$$I_4 = \int_{\Gamma_1} w_1(s_1)(K - \tilde{K}) d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_1} w_1(s_1)\tilde{K} d\Gamma_1 \quad (26)$$

ここで  $\tilde{K}$  は  $\tilde{u}^*$  または  $\tilde{q}^*$  である。

式(26)の右辺第一項目は重み付き積分で求める。また右辺第二項目は解析的に求める。

なお、 $\mathbf{y}_0$  に接線を引き、その上で与えられる基本解を  $\hat{u}^*, \hat{q}^*$  とすると、これらは式(25)で曲率半径  $\rho \rightarrow \infty$  とし、その影響を無視した場合に一致する。

$$\hat{u}^* := -\frac{1}{4\pi} \log(s^2 + \zeta^2), \quad (27)$$

$$\hat{q}^* := \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\zeta}{s^2 + \zeta^2}$$

次章の解析例で示すように、曲率の影響を考慮した式(25)の適用は擬似特異積分の精度向上に不可欠である。

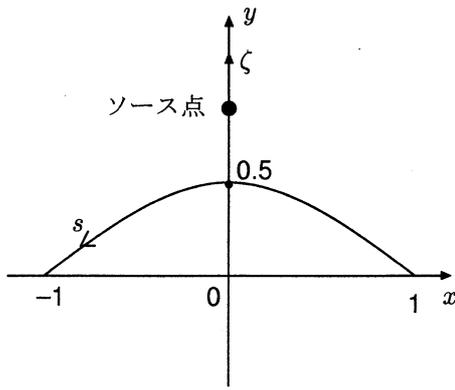


図-5 曲線境界と  $y$  座標上のソース点

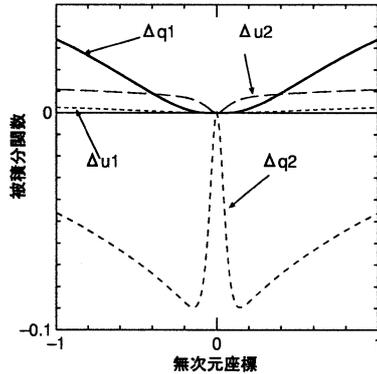


図-6 擬似特異項を除去して得た関数の分布

## 5. 適用例に基づいた検討

### 5.1 特異項の除去の妥当性

4.3 に述べた特異積分の処理の妥当性を確認する目的で、基本解  $u^*$  に対して、特異項を除去して得られる式(21)の関数  $R$  の分布形状を調べる。なお、 $q^*$  においては 4.3 に述べたように、主値積分に特別な処理を必要としない。ここでは具体例として図-3の曲線境界を考える。境界曲線長  $L$  で無次元化した座標を  $\eta = 2s/L$  で定義し、 $\eta = 0.5$  にソース点を置いた場合の  $R$  を図-4に示す。

$R$  に関する積分は数値積分により計算されることとなるが、図-4より特異性は固より、複雑な分布形状も存在しておらず、式(21)による処理の妥当性が確認できる。なお、4.1に示した従来法による場合、 $\eta \neq 0$  にソース点をおくとヤコビアンの一階の微係数がソース点で非ゼロとなるため、数値積分により処理される被積分関数の傾きがソース点で無限大となるが、本手法ではそのようなこともない。

### 5.2 擬似特異項除去の妥当性

4.4 に述べた擬似特異積分の処理の妥当性を確認する。特に曲線境界における曲率の影響について検討する。前節と同様に図-5の放物線境界を対象とする。境界曲線と  $y$  軸との交点  $(0, 0.5)$  を原点とした座標  $\zeta$  を図のように導入し、その上に沿ってソース点を動かさ

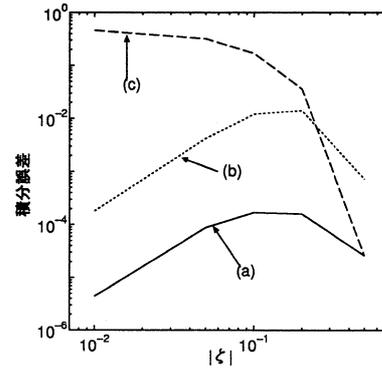


図-7 擬似特異積分の精度の比較 ( $\zeta < 0$ )

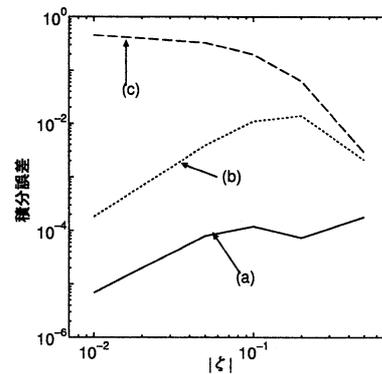


図-8 擬似特異積分の精度の比較 ( $\zeta > 0$ )

て行く場合を例に考える。

まず、 $\zeta = -0.1$  にソース点を置いた場合を対象に、擬似特異項を除去して得た関数  $\Delta u_1 = u^* - \tilde{u}^*$ 、 $\Delta q_1 = q^* - \tilde{q}^*$  の分布の様子を図-6に示す。図-6には、曲率の影響を無視した場合 ( $\Delta u_2 = u^* - \hat{u}^*$ 、 $\Delta q_2 = q^* - \hat{q}^*$ ) も合わせて示した。 $\Delta u_1, \Delta q_1$  は緩やかに変動しているが、 $\Delta u_2, \Delta q_2$  はソース点に最接近する点 ( $\eta = 0$ ) において急変動しており、擬似特異性が十分に除去されていない。このことより曲線境界の曲率の考慮は擬似特異項の処理において重要であることがわかる。

次にソース点を  $-0.5 \leq \zeta \leq 0.5$  の範囲にとり、曲線境界上で  $q^*$  の数値積分を実行した時の積分誤差を調べる。ここでは擬似特異積分の処理の効果を確認する目的で、次の積分に対し Gauss-Legendre の 8 点積分を適用した。

$$I_5 := \int_{\Gamma} q^* d\Gamma \quad (28)$$

なお、積分方法として (a)  $\Delta q_1$  によるもの、(b)  $\Delta q_2$  によるもの、(c) 擬似特異性の処理を行わないもの、の 3 ケースを比較した。 $\zeta < 0, \zeta > 0$  に対する結果をそれぞれ図-7、図-8に示す。 $\Delta q_2$  による方法でも擬似特異性除去の効果は認められ、特に  $|\zeta|$  の減少と共にそれが顕著に現れている様子が窺える。しかし、 $\Delta q_1$  による方法は、 $\zeta$  の値に関わらず高精度な積分結果を与えており、曲率の影響を考慮に入れた本手法の有効性が

確認できる。

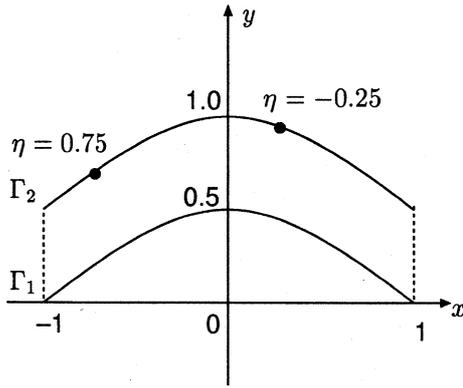


図-9  $\Gamma_1$  と  $\Gamma_2$  の幾何学的条件

### 5.3 重み付き積分の有効性に関する検討

Wavelet 重み付き Gauss 積分と通常の Gauss-Legendre 積分の計算効率を比較する。ここでは式(18)に定義した形式の積分  $I_3$  に対して、比較的低い積分精度を与えた、図-9に示す条件の問題を対象とする。なお、基底関数  $w_1, w_2$  の両者共に図-1に示した区間一定3次のゼロモーメントを有する wavelet  $\psi_3^0$  を用い、基底  $w_1$  は  $\Gamma_1$  全範囲に、基底  $w_2$  は  $\Gamma_2$  上  $-0.25 \leq \eta \leq 0.75$  の区間に配置した。また、特異積分を対象とする場合においては、 $\Gamma_1$  と  $\Gamma_2$  とを同一の部分境界として設定しており、擬似特異積分を対象とする場合においては図-9のように  $\Gamma_2$  が  $\Gamma_1$  より 0.5 だけ上方に置かれている。比較に当たり、 $\Gamma_2$  上の積分は高精度に求め、 $\Gamma_1$  上の積分により生ずる誤差を評価したものと、 $\Gamma_1$  上の積分は高精度に求め、 $\Gamma_2$  上の積分により生ずる誤差を評価したものの、2 ケースを対象とした。なお、ここにおける高精度な積分とは、積分区間を細分割し各区間毎に Gauss-Legendre 積分を適用して得たものであり、細分割数は積分結果の収束状況に基づき適宜設定した。

$u^*$  の特異積分に対する結果を図-10, 図-11に示す。なお、Gauss-Legendre 積分では、 $\psi_3^0$  の4つの多項式区間各々に対し同一の積分点数の下で数値積分を実行しており、その合計の積分点数を横軸にとっている。 $\Gamma_2$  上の積分に要する積分点数は、 $\Gamma_1$  上の半分程度で良いことがわかる。また、wavelet 重み付き積分を用いることで、計算量も 1/2 近くまで軽減できている。

次に  $q^*$  の擬似特異積分に対する結果を図-12, 図-13に示す。 $\Gamma_1$  上の積分に要する計算量は、wavelet 重み付き積分を用いてもそれ程減らすことができていないが、 $\Gamma_2$  上の積分に対しては 1/2 以下にまで軽減できている。なお、 $u^*$  についても図-10 ~ 13 に示したものと同様の傾向が認められた。

擬似特異積分では、前述のように  $\Gamma_1$  上の擬似特異性に対し処理を施しているが、 $\Gamma_2$  上の積分は解析積分が不可能なため、特別な対策を講じていない。しかし、 $w_1$  と  $w_2$  のサポート長が概ね等しく、 $\Gamma_1$  と  $\Gamma_2$  との距離がそれらに比べ近い場合、基本解の擬似特異性と wavelet 特有の波形の形状との影響で、 $\Gamma_2$  上の被積分関数も波形状に変動したものとなる。したがって、こ

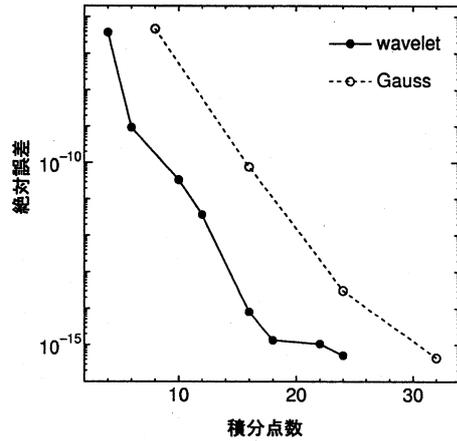


図-10 特異積分における  $\Gamma_1$  上の積分の誤差評価

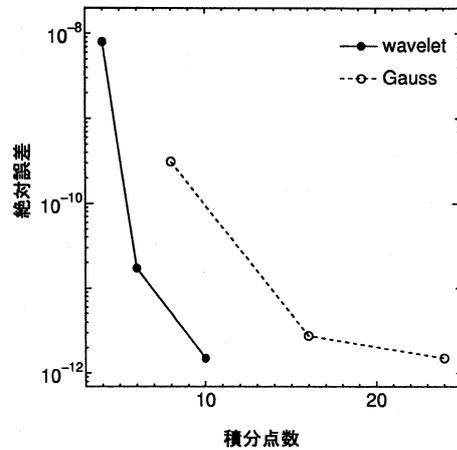


図-11 特異積分における  $\Gamma_2$  上の積分の誤差評価

のような場合に限り、 $\Gamma_2$  上の積分を一つの積分区間の下で高精度に求めることは難しく、積分区間を細分割し Gauss-Legendre 積分を適用する必要があるものと思われる。

### 5.4 具体例に基づく有効性の検討

図-14に示す、4つの部分境界からなる混合境界値問題に対し本手法を適用し、重み付き積分の有効性を検証した。用いた wavelet は  $\psi_3^0$  であり、初期分割は各辺3つの scaling 関数と3つの wavelet (合計24自由度) で与えた。なお、部分境界端に置く境界 wavelet には  $\psi_4^0$  を用いた。 $\mathbf{H}, \mathbf{G}$  行列の積分精度  $\varepsilon_H, \varepsilon_G$  は式(10)の切り捨て基準と連動し次のように設定している<sup>8)</sup>。

$$\varepsilon_H = \tau \cdot H_{max}, \quad \varepsilon_G = \tau \cdot G_{max} \quad (29)$$

また、式(29)の精度を与え得る積分点数は、通常の積分に対しては文献8)に示した方法で、特異・擬似特異積分に対しては数値実験の結果より得られた経験則に基づき、それぞれ決定している。

自由度と計算時間との関係を図-15に示す。図には Gauss-Legendre 積分による場合も合わせて示した。自

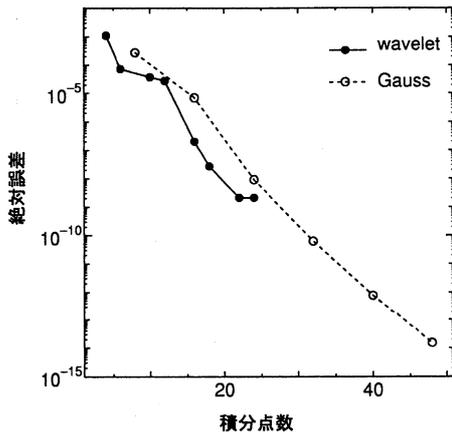


図-12 擬似特異積分における  $\Gamma_1$  上の積分の誤差評価

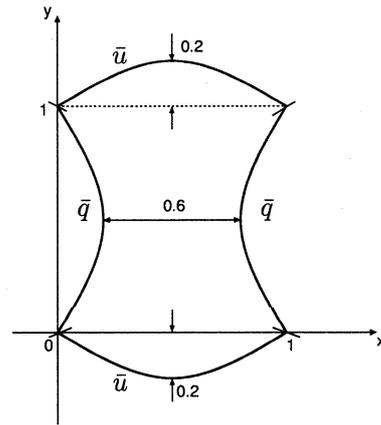


図-14 解析条件

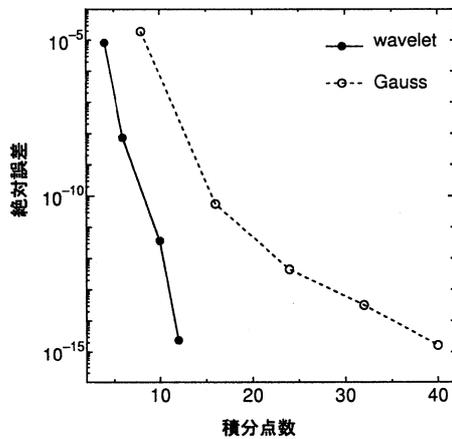


図-13 擬似特異積分における  $\Gamma_2$  上の積分の誤差評価

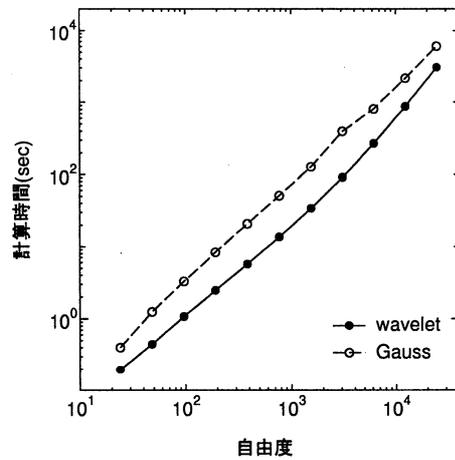


図-15 自由度と計算時間との関係

自由度によらず、wavelet 重み付き積分の適用により、係数行列成分の作成に要する時間を  $1/3 \sim 1/4$  程度にまで短縮できていることがわかる。

文献8)では特異性・擬似特異性のない積分に対してのみ wavelet 重み付き積分を適用した。自由度の増加に伴ない、保存成分の大半は特異・擬似特異積分を必要とするもので占められる。そのため、それらを Gauss-Legendre 積分で求めていた文献8)の方法では、wavelet 重み付き積分による効果が自由度と共に減少する結果となった。一方、特異・擬似特異積分にも wavelet 重み付き積分を適用した今回の方法では、上述のように自由度増加に伴なう計算効率の著しい低下は認められなかった。

## 6. おわりに

Wavelet BEM の係数計算に現れる特異・擬似特異積分に対し、wavelet 重み付き積分を適用することで計算効率のさらなる向上を試みた。特異・擬似特異積分の処理には、基本解より特異・擬似特異項を分離し、別途解析積分する方法を用いた。なお、近似基底を曲線

境界の補間パラメータ空間で定義するのではなく、曲線長の座標に関し定義することで、上述の解析積分の実行を可能にした。さらに擬似特異項の除去において、曲線境界の曲率の影響を考慮に入れることにより、積分精度の向上を図った。最後に、具体例を通し本研究で用いた特異・擬似特異積分の処理方法の妥当性を確認した。また、本手法を用いることで、自由度に依らず係数行列成分の計算に要する時間が短縮でき、ここに示した例題に対しては Gauss-Legendre 積分による場合の  $1/3$  程度にまで改善することができた。

## 参考文献

- 1) Rathsfeld, A. : A wavelet algorithm for the boundary element solution of a geodetic boundary value problem, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol.157, pp.267-287, 1998.
- 2) Schmidlin, G. and Schwab, Ch. : Wavelet Galerkin BEM on unstructured meshes by aggregation, *Seminar für Angewandte Mathematik, ETH Zürich*, 2000.
- 3) Sabetfakhri, K. and Katehi, L.P.B. : Analysis of integrated millimeter-wave and submillimeter-wave

- waveguides using orthonormal wavelet expansions, *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, Vol.42, pp.2412-2422, 1994.
- 4) Goswami, J.C., Chan, A.K. and Chui, C.K. : On solving first-kind integral equations using wavelets on a bounded interval, *IEEE Trans. Ant. Prop.*, Vol.43, pp.614-622, 1995.
  - 5) Wang, G. : Application of wavelets on the interval to numerical analysis of integral equations in electromagnetic scattering problems, *Int. Num. Meth. Engng.*, Vol.40, pp.1-13, 1997.
  - 6) Koro, K. and Abe, K. : Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol.25, pp.149-164, 2001.
  - 7) Chui, C.K. and Wang, J.-Z. : On compactly supported spline wavelets and duality principle, *Trans. Am. Math. Soc.*, Vol.330, pp.903-915, 1992.
  - 8) 紅露一寛, 阿部和久, 平林秀之 : Wavelet 基底を用いた境界要素解析の効率化のための wavelet 重み付き Gauss 積分公式, 応用力学論文集, Vol.4, pp.127-136, 2001.
  - 9) Koro, K. and Abe, K. : Determination of optimal threshold for matrix compression in wavelet BEM, *Boundary Elements XXIII*, Beskos, B.E., Brebbia, C.A., Katsikadelis, J.T. and Manolis, G.D.(eds.), WIT Press, pp.475-484, 2001.
  - 10) Lachat, J.C. and Watson, J.O. : Effective numerical treatment of boundary integral equations : a formulation for three-dimensional elastostatics, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol.10, pp.991-1005, 1976.
  - 11) Shiue, F.-C.T. : Application of sub-element technique for improving the interior displacement and stress calculations by using the boundary element method, *Boundary Elements XIII*, C.A.Brebbia and G.S.Gipson (eds.), pp.1005-1013, 1991.
  - 12) Alarcon, E., Doblare, M. and Sanz-Serna, J. : An efficient nonlinear transformation for the numerical computation of the singular integrals appearing in the 2-D boundary element method, *Boundary Element Methods in Engineering*, Annigeri, B.S. and Tseng, K.(eds.), Springer-Verlag, pp.472-479, 1990.
  - 13) Doblare, M. and Gracia, L. : On non-linear transformations for the integration of weakly-singular and Cauchy principal value integrals, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol.40, pp.3325-3358, 1997.
  - 14) Telles, J.C.F. : A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol.24, pp. 959-973, 1987.
  - 15) Aimi, A. and Diligenti, M. : New numerical integration schemes for application of Galerkin BEM to 2-D problems, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol.40, pp.1977-1999, 1997.
  - 16) Ma, H. and Kamiya, N. : A General algorithm for accurate computation of field variables and derivatives near the boundary in BEM, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol.25, pp.833-841, 2001.
  - 17) Chen, H.B. and Schnack, P.Lu.E. : Regularized algorithms for the calculation of values on and near boundaries in 2-D elastic BEM, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol.25, pp.851-876, 2001.
  - 18) Ghosh, N., Rajiyah, H., Ghosh, S. and Mukherjee, S. : A new boundary element method formulation for linear elasticity, *J. Appl. Mech.*, Vol.53, pp.69-76, 1986.
  - 19) Nishimura, N. and Kobayashi, S. : A regularized boundary integral equation method for elastodynamic crack problems, *Comp. Mech.*, Vol.4, pp.319-328, 1989.
  - 20) Choi, J.H. and Kwak, B.M. : A boundary integral equation formulation in derivative unknowns for two-dimensional potential problems, *J. Appl. Mech.*, Vol.56, pp.617-623, 1989.
  - 21) Parreira, P. and Guiggiani, M. : On the implementation of the Galerkin approach in the boundary element method, *Comp. & Struct.*, Vol.33, pp.269-279, 1989.
  - 22) Cruse, T.A. and Aithal, R. : Non-singular boundary integral equation implementation, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol.36, pp.237-254, 1993.
  - 23) Aliabadi, M.H., Hall, W.S. and Phemister, T.G. : Taylor expansion for singular kernels in the boundary element method, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol.21, pp.2221-2236, 1985.

(2002年4月19日受付)