

Wavelet BEMにおける Beylkin 型係数切り捨て手法の 行列圧縮効果に関する検討

Matrix-compression property of Beylkin-type truncation scheme for wavelet BEM

紅露一寛*・阿部和久**

Kazuhiro KORO and Kazuhisa ABE

*正会員 博士 (工学) 新潟大学大学院 自然科学研究科環境管理科学専攻 (〒 950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050 番地)

**正会員 工博 新潟大学助教授 工学部建設学科 (〒 950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050 番地)

In the present paper, we investigate theoretically and experimentally the number of non-zero matrix entries generated by the wavelet BEM with a Beylkin-type compression algorithm. The Beylkin-type algorithm, which is based on a prescribed *level-independent* threshold, retains the asymptotical convergence rate of BE solution, like widely-used *level-dependent* compression schemes. The coefficient matrix compressed by the Beylkin-type scheme has $O(N^{1+\gamma})$ ($0 < \gamma < 1$, N : degree of freedom (DOF)) non-zero entries; the level-dependent schemes enable us to reduce the matrix entries up to $O(N(\log N)^\alpha)$ ($\alpha \geq 1$). However, for matrix compression using the Beylkin-type scheme the compression rate is greater than or comparable to that under the Schneider's level-dependent scheme, in the moderate DOF range.

Key Words : wavelet BEM, matrix compression scheme, large-scale problems

1. はじめに

近年, 大規模問題への適用が困難な境界要素法 (BEM) の解析効率を高める数値技法の構成・実用化に関する研究が盛んになされており, wavelet 基底の利用 (wavelet BEM) は高速多重極法と並ぶ高速解法の一つとして位置づけられている. Wavelet BEM では, 境界積分方程式の離散化に使用する基底関数に wavelet を適用する. その際, 代数方程式の係数行列成分は, 支配方程式の基本解と wavelet 基底からなる被積分関数を領域境界上で積分することで与えられる. これらの成分の大半は, wavelet が有しているゼロモーメント性 (wavelet と所定次数以下の多項式との積分がゼロとなる性質) によって微小なものとなるため, 微小成分を切り捨てる (0 とみなす) ことで本来密行列となる係数行列を疎行列化することができる. その結果, 解析時の記憶容量と計算時間は大幅に削減されることとなる.

上述のように, wavelet BEM は係数行列成分の切り捨てに立脚した高速解法である. そのため, 解析時における係数切り捨て手法の選択は計算効率に対して重大な影響を及ぼす. 当然のことながら, より多数の成分を切り捨てることできれば計算効率上好ましいが, 切り捨てによって近似解の精度が損なわれることは許容できない. 今日用いられている切り捨て手法はいずれも近似解の漸近収束性を保証するものとなっており, 切り捨て基準値 (切り捨て判定に用いる閾値) の設定方法によって 2 種類に大別することができる.

現在主に用いられている切り捨て手法は, 階層依存型切り捨て基準値に基づく方法である. この方法は, 切り捨て対象となる係数成分を基底のサポート間距離を用いて選別する. その際, 保存する成分のサポート間距離の上限 (切り捨て基準値) は, 当該成分に対応する

wavelet の階層レベルに応じて変動するように設定される. この方法は Dahmen ら¹⁾によって初めて示された方法で, 文献¹⁾では強楕円型微分方程式から導出される境界積分方程式を対象に, 任意の補間次数・ゼロモーメント次数を有する wavelet を適用する際の切り捨て手法が示されている. Dahmen らの手法は, Galerkin 法・選点法のいずれを用いて境界要素方程式 (代数方程式) を構成しても近似解の収束次数が保持されるようになっている. なお, その詳細なアルゴリズムは Schneider²⁾により示されている.

Schneider らが提案した手法以外の階層依存型アルゴリズムとその適用例は, Schwab ら³⁾⁴⁾⁵⁾や Amaratunga ら⁶⁾, Rathsfeld⁷⁾によって示されている. Schwab らの方法は Schneider らの手法とほぼ同様であるが, wavelet のゼロモーメント次数を過大な値に設定することによる計算量の増加を懸念して, いずれの文献においてもゼロモーメント次数を (補間次数+1) 次程度に制限して切り捨て手法を構成している. 文献³⁾では, 2次元問題における第1種積分方程式を区間線形・2次ゼロモーメント性を有する半直交 wavelet⁸⁾によって離散化する場合について論じている. また, 3次元問題における第2種積分方程式については, multiwavelet⁴⁾を用いる際の具体的な切り捨てアルゴリズムが文献⁵⁾に示されている. さらに, Amaratunga ら⁶⁾は, 近似関数・重み関数の基底を異なる関数に設定して Galerkin 条件を課す Petrov-Galerkin 法に基づく wavelet BEM での切り捨て手法とその適用例を示しており, Rathsfeld⁷⁾は選点法に基づく境界要素解析のための係数成分切り捨てアルゴリズムを示している.

なお, 上述の切り捨て手法の下で係数行列を圧縮した場合は, Rathsfeld の手法を除くアルゴリズムについては, 係数行列の保存成分数が $O(N(\log N)^\alpha)$ ($\alpha \geq 1$)

で推移することが保証されている。ただし、これらの手法を適用する際には問題設定や wavelet の補間次数・ゼロモーメント性などが制約を受け、場合によっては適用不可能となることもある。

一方、Beylkin 型の切り捨て手法では、全ての係数成分に対して単一の切り捨て基準値を用いて切り捨て・保存の判定を行なう。なお、切り捨て基準値は係数成分の大きさに対して設定される。Beylkin ら⁹⁾が提案した手法は近似解の誤差挙動を全く考慮することなく切り捨て条件を設定しており、文献⁸⁾¹⁰⁾においては幾通りかの切り捨て基準値の下での適用例が示されているに過ぎない。提案当初は、解の誤差を考慮するためには文献¹¹⁾に示したように経験的に切り捨て基準値を設定せざるを得なかった。しかし、著者らが提案した半解析的な手法¹²⁾を用いることで、Beylkin 型切り捨て手法においても近似解の漸近次数を保持しつつ最大の圧縮率を与える切り捨て基準値を事前に設定可能となる。

Beylkin 型手法の最大の利点は、アルゴリズムの単純さと適用上の制約の少なさにある。しかし、この手法によって切り捨てを行なっても $O(N^{1+\gamma})$ ($0 < \gamma < 1$) の保存成分数でしか圧縮することができず、理論的には階層依存型切り捨て基準値を用いた場合よりも非効率となることが予想される。ただし、これらの評価は保存成分数の自由度依存性を示したものに過ぎず、解析において実際に必要となる保存成分数を与えるものではない。既往の研究においては、各種切り捨て手法の下での保存成分数の評価の妥当性や一般的な境界要素解析との計算効率の比較について詳細に論じられているが、実際の解析における両切り捨て手法の実効性や優劣についての比較・検討は著者の知る限りなされていない。また、Beylkin 型手法に基づく切り捨てを対象とした場合、2次元問題における保存成分数の評価については示されている¹²⁾が、3次元問題にも適用可能な保存成分数の評価方法は未だ提案されていない。

そこで本研究では、2次元・3次元ポテンシャル問題を対象とした境界要素解析において上述の階層依存型および Beylkin 型切り捨て手法に基づく wavelet BEM を適用し、両切り捨て手法の行列圧縮性能について比較・検討する。特に、理論的には計算効率の劣る Beylkin 型手法の実効性について論じる。また、Beylkin 型切り捨て手法の下で得られる係数行列の保存成分数を理論的に評価し、解析結果を通じてその妥当性を検証する。

2. Wavelet 基底を用いた境界要素定式化

本論文では、2次元または3次元ポテンシャル問題について考える。直接法によって定式化すると、支配方程式として次の境界積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})u(\mathbf{y})d\Gamma_y \\ = \int_{\Gamma} u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})q(\mathbf{y})d\Gamma_y + f(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、右辺の関数 $f(\mathbf{x})$ は 0 (内部問題の場合) または $U_{\infty}(\mathbf{x})$ (外部問題の場合) で与えられる。 U_{∞} は外部問題において無限遠方でのポテンシャルを与える関数で

ある。また、 Γ は境界であり、 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma$ とする。なお、 u はポテンシャル、 $q = \partial u / \partial n$ はフラックスである。 u^* は支配微分方程式の基本解であり、 $q^* = \partial u^* / \partial n$ とする。 n は境界の外向き法線方向を表わす。 c は境界のなす角によって定まる定数である。

式(1)を離散化するために、 u, q に対して wavelet 級数で与えられる次の近似関数 \tilde{u}, \tilde{q} を導入する。

$$\begin{aligned} \tilde{u} &:= \sum_{l=1}^{n_s} \hat{u}_{0,l} \phi_{0,l} + \sum_{k=0}^m \sum_{l=1}^{n_k} \tilde{u}_{k,l} \psi_{k,l}, \\ \tilde{q} &:= \sum_{l=1}^{n_s} \hat{q}_{0,l} \phi_{0,l} + \sum_{k=0}^m \sum_{l=1}^{n_k} \tilde{q}_{k,l} \psi_{k,l}. \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、 $\phi_{0,l}, \psi_{k,l}$ はそれぞれ scaling 関数、wavelet であり、添字 k, l はそれぞれ階層レベル、サポート位置を表わす。なお、 $\hat{u}_{0,l}, \tilde{u}_{k,l}, \hat{q}_{0,l}, \tilde{q}_{k,l}$ は展開係数である。また、 m は級数展開の最高階層であり、 n_s, n_k はそれぞれ $\phi_{0,l}, \psi_{k,l}$ の個数を表わす。 n_k については各階層で異なる値をとる。

式(2)を(1)へ代入し、Galerkin 法を適用すると、次の連立一次方程式を得る。

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{q} + \mathbf{f}, \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{u}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^N$ (\mathbb{R} : 実数全体の集合、 N : 連立方程式の未知量の数(自由度)) はそれぞれ u, q に関する展開係数ベクトルであり、 $\mathbf{G}, \mathbf{H} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ はそれぞれ次式で定義される g_{ij}, h_{ij} を成分にもつ係数行列である。

$$\begin{aligned} g_{ij} &:= \int_{\Gamma} w_i \int_{\Gamma} u^* w_j d\Gamma^2, \\ h_{ij} &:= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} w_i w_j d\Gamma + \int_{\Gamma} w_i \int_{\Gamma} q^* w_j d\Gamma^2, \end{aligned} \quad (4)$$

なお、 $i, j = 1, \dots, N$ とし、 w_i, w_j はともに基底関数 $\phi_{0,l}, \psi_{k,l}$ で与えられる関数と定義する。また、式(3)におけるベクトル $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$ の成分 f_i は次式で与えられる。

$$f_i = \int_{\Gamma} w_i(\mathbf{x})f(\mathbf{x})d\Gamma, \quad (5)$$

ここで、境界条件を考慮し、式(3)の未知量と既知量とを整理すると、次の連立方程式を得る。

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b}, \quad (6)$$

ただし、 \mathbf{A} は未知ベクトル \mathbf{X} に関する成分からなる係数行列であり、 \mathbf{b} は既知ベクトルである。

3. 係数行列成分の切り捨て手法

本論文では、先に述べた2種類の切り捨て手法に基づく境界要素解析を行ない、両者の結果を比較・検討することで Beylkin 型手法の実効性について議論する。その際、階層依存型切り捨て手法の代表例として Schneider²⁾の手法を対象とする。また、条件を簡潔にするため、Schneider の切り捨て手法・Beylkin 型手法のいずれを適用した場合においても、切り捨ての対象とするのは基底関数 w_i, w_j がともに wavelet で与えられる成分のみとし、それ以外の成分についてはすべて保存するものとする。

3.1 Schneider の階層依存型切り捨て手法

Schneider の手法では、式(4)の係数成分の計算に先立ち、次の判定条件に基づいて切り捨て成分を選別する。対象とする係数成分が基底関数 w_i, w_j に関するものであるとき、

$$\bar{r} > \delta_{k_i, k_j}, \quad (7)$$

を満足する成分について切り捨てを実行する。なお、 \bar{r} は w_i, w_j のサポート間距離であり、切り捨て基準値 δ_{k_i, k_j} は次式で与える。

• $p+1 = n+r$ の場合

$$\delta_{k_i, k_j} := a \cdot \max \left\{ 2^{-\min(k_i, k_j)}, \right. \\ \left. (m+1)^{\frac{1}{2n+r}} 2^{(m+1)-(k_i+k_j)} \right\}, \quad (8)$$

• $p+1 < n+r$ の場合

$$\delta_{k_i, k_j} := a \cdot \max \left\{ 2^{-\min(k_i, k_j)}, \right. \\ \left. 2^{\frac{(m+1)(2p'-r)-(k_i+k_j)(n+p')}{2n+r}} \right\}, \quad (9)$$

ここで、 p は基底関数の多項式次数であり、 n は wavelet ψ のゼロモーメント次数である。すなわち、 ψ は次式を満足することとなる。2次元問題においては、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi) \xi^\lambda d\xi = 0, \quad (\lambda = 0, 1, \dots, n-1) \quad (10)$$

を満足し、3次元問題においては

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi_1, \xi_2) \xi_1^{\lambda_1} \xi_2^{\lambda_2} d\xi_1 d\xi_2 = 0, \\ (\lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 0, 1, \dots, n-1) \quad (11)$$

が成り立つ。式(8), (9)において、 r は積分作用素の次数であり、 $r = -1$ (行列 \mathbf{G})、 $r = 0$ (行列 \mathbf{H}) で与えられる。また、 p' は $p+1 < p' < n+r$ なる定数であり、 $a > 1$ とする。 k_i, k_j は基底 w_i, w_j の階層レベルである。なお、次節でも示すが、式(8), (9)の切り捨て基準値を用いて係数行列を圧縮した場合、保存成分数は $O(N(\log N)^\alpha)$ ($\alpha \geq 1$) となる。Schneider は、 $p+1 < n+r$ なる離散化条件・問題設定において、階層差 $|k_i - k_j|$ が大きい成分をさらに切り捨て対象とすることで保存成分数を $O(N)$ まで削減する切り捨てアルゴリズム²⁾を提案している。しかし、本論文では各切り捨て手法における圧縮性能の把握を目的としているため、この2段階にわたる切り捨てアルゴリズムは採用せず、切り捨て条件は式(7)–(9)のみで与える。

3.2 Beylkin 型切り捨て手法

以下では、著者らが文献¹²⁾で提案した手法を Beylkin 型切り捨て手法として採用することとし、そのアルゴリズムについて示す。文献¹²⁾の切り捨てアルゴリズムでは、切り捨て判定に先立って係数成分 g_{ij}, h_{ij} の近似値 $\bar{g}_{ij}, \bar{h}_{ij}$ を事前に求めておく。なお、 $\bar{g}_{ij}, \bar{h}_{ij}$ の値については、基底関数のゼロモーメント性を考慮し、サ

ポート中央点まわりの Taylor 展開の主要項を評価することで容易に与えることができる¹²⁾。

切り捨て成分の判定は、次の条件式に基づき行なう。

$$\bar{g}_{ij} < \tau \cdot G_{max}, \quad \bar{h}_{ij} < \tau \cdot H_{max}, \quad (12)$$

解析においては、式(12)の条件を満足する係数成分を切り捨てる。ただし、サポート間距離 \bar{r} が $\bar{r} \leq \nu(2^{-k_i} + 2^{-k_j})$ ($\nu > 0$: 定数) を満足する成分については切り捨て対象から除外する。なお、この条件は基底のサポートが重複する係数成分を切り捨ての対象としないために導入されている。式(12)において、 G_{max}, H_{max} はそれぞれ g_{ij}, h_{ij} の絶対最大値である。また、 τ は切り捨て基準値であり、以下に示す半解析的手法によって事前に定める¹²⁾。

文献¹²⁾の方法では、切り捨て基準値 τ は境界要素解に含まれる切り捨て誤差を離散化誤差の水準まで許容するように設定する。その際、近似解の誤差評価が必要となるが、これを境界積分方程式・境界要素方程式(代数方程式)の残差によって間接的に行なう。その結果、切り捨て基準値 τ は次式を概ね満足する値となる。

$$\tau \approx \frac{1}{2 \cdot \|\mathbf{H}\|} \cdot \frac{\|\mathbf{c}\|}{\|\mathbf{u}\|}, \quad (13)$$

ただし、 \mathbf{H}, \mathbf{u} は式(3)の定義に従うものとし、上式のベクトル \mathbf{c} の成分 c_i ($i = 1, 2, \dots, N$) は次式で定義する。

$$c_i := -\frac{1}{2} \int_{\Gamma} w_i(\hat{u} - \tilde{u}) d\Gamma \\ - \int_{\Gamma} w_i \int_{\Gamma} q^*(\hat{u} - \tilde{u}) d\Gamma^2, \quad (14)$$

ここで、 \hat{u} は真の解 u を wavelet 展開して得られる関数である。そのため、解析においては真の解を境界要素解 \tilde{u} の高次補間などで近似しておき、それを wavelet 展開することで近似的に \hat{u} を与える。なお、本来、式(13)における行列・ベクトルのノルム $\|\mathbf{H}\|, \|\mathbf{c}\|/\|\mathbf{u}\|$ は、対象としている境界要素解析(自由度 N)を行なうことでしか得られない。そのため、同一の境界条件・近似方法の下で解析自由度のみを小さく設定して境界要素解析を行ない、その結果から構成した次の近似式を用いて $\|\mathbf{c}\|/\|\mathbf{u}\|$ の値を評価する。

$$\frac{\|\mathbf{c}\|}{\|\mathbf{u}\|} \approx \alpha' \cdot N^{-\beta}, \quad (15)$$

ただし、 $\alpha', \beta > 0$ は自由度 N に依存しない定数である。一方、 $\|\mathbf{H}\|$ については、事前に行なった境界要素解析で得られた \mathbf{H} 行列 $\tilde{\mathbf{H}}$ のノルムで近似評価する。

その結果、Beylkin 型切り捨て手法における切り捨て基準値 τ は次式で与えることができる。

$$\tau = \frac{\alpha' N^{-\beta}}{2 \cdot \|\tilde{\mathbf{H}}\|}. \quad (16)$$

式(16)で定めた基準値の妥当性については文献¹²⁾で示されており、この基準値を用いる限りにおいては切り

捨てによる精度低下は生じない. なお, 文献¹²⁾で示した切り捨てアルゴリズムでは, 式(4)の境界積分を計算した後も再度切り捨て判定を行なっている. しかし, 本研究では次節で示す保存成分数の評価式が事前切り捨てに関する成分を評価するものとなっているため, 評価式との整合性を考慮して係数計算後の切り捨ては行なわないものとする.

4. 係数行列の保存成分数の評価

式(3)の係数行列 \mathbf{G} , \mathbf{H} は, 係数の生成に用いた基底関数 w_i, w_j の階層レベル k_i, k_j に対応する小行列に分割することができる. そのため, \mathbf{G} , \mathbf{H} の保存成分数 $\mathcal{N}(\mathbf{G})$, $\mathcal{N}(\mathbf{H})$ は, 小行列毎に評価した成分数を全階層にわたって和をとることで評価することができる. 以下においては, 前述の Schneider の手法・Beylkin 型手法を適用した際の保存成分数の評価式を順に示す.

まず, 式(3)の行列 \mathbf{G} または \mathbf{H} を行列 \mathbf{B} と表わす. この行列において, 階層レベル (k_i, k_j) に対応する小行列を \mathbf{B}_{k_i, k_j} と定義すると, 切り捨て後の \mathbf{B}_{k_i, k_j} の保存成分数 $\mathcal{N}(\mathbf{B}_{k_i, k_j})$ は次のように評価できる³⁾⁵⁾.

$$\mathcal{N}(\mathbf{B}_{k_i, k_j}) \leq C \cdot (2^{k_i s} + 2^{k_j s} + \gamma 2^{(k_i + k_j)s} \delta^s), \quad (17)$$

ここで, s は $s = 1$ (2次元問題), $s = 2$ (3次元問題) とし, δ は保存される係数成分のサポート間距離の上限値である. また, $\gamma > 0$ とする.

4.1 Schneider の階層依存型切り捨て手法

Schneider の手法を用いる場合, 式(17)における δ は問題設定と離散化条件とに応じて式(8), (9)のいずれかの δ_{k_i, k_j} で与えられる. よって, 以下においては各々の切り捨て基準値の下で得られる係数行列の保存成分数の評価結果を示す.

(1) $p + 1 = n + r$ のとき

この場合, 式(17)における δ は, 式(8)右辺第1項または第2項で定義される δ_{k_i, k_j} によって与えられる. ただし, 最高階層 m を $m \geq 1$ と設定した場合には, 全ての階層 (k_i, k_j) で第2項が選択される. Wavelet BEM では m の値をある程度大きく設定しなければ計算効率の改善が見込めないことを考慮し, 以下では $m \geq 1$ とし保存成分数の評価を行なう. ここで, $2^{(m+1)s} \approx N$, $(m+1) \approx \log N$ とすると, 行列 \mathbf{B} の保存成分数 $\mathcal{N}(\mathbf{B})$ は次式で評価できる.

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{B}) &\leq C' \sum_{k_i=0}^m \sum_{k_j=0}^m \mathcal{N}(\mathbf{B}_{k_i, k_j}) \\ &\leq C_1'' (m+1) 2^{(m+1)s} \\ &\quad + C_2'' 2^{(m+1)s} (m+1)^{2+\frac{s}{2n+r}} \\ &\leq C_1' N \log N + C_2' N (\log N)^{2+\frac{s}{2n+r}}, \end{aligned} \quad (18)$$

よって, \mathbf{B} 行列の保存成分数は $O(N(\log N)^{2+\frac{s}{2n+r}})$ となる. \mathbf{G} 行列, \mathbf{H} 行列の保存成分数は, 式(18)においてそれぞれ $r = -1$ (\mathbf{G} 行列), $r = 0$ (\mathbf{H} 行列) とすれば容易に評価することができる.

(2) $p + 1 < n + r$ のとき

この場合, 式(17)の δ は式(9)で与えられる δ_{k_i, k_j} とすればよい. 式(9)の切り捨て基準値 δ_{k_i, k_j} は, 階層 k_i または k_j に応じて右辺第1項・第2項のいずれかで与えられることとなる. そこで, 式(9)右辺の大小関係を比較し, 第1項である $\delta_{k_i, k_j} = 2^{-\min(k_i, k_j)}$ が選ばれる場合について考える. $k_i \geq k_j$ としたとき, 式(9)右辺第1項が選択されるのは,

$$k_j < \sigma k_i - \rho, \quad (19)$$

$$\sigma := \frac{n + p'}{n + r - p'} > 0, \quad \rho := \frac{(2p' - r)(m + 1)}{n + r - p'},$$

を満足する (k_i, k_j) に対応する小行列である. このとき, 小行列 \mathbf{B}_{k_i, k_j} の保存成分数は $\mathcal{N}(\mathbf{B}_{k_i, k_j}) \leq C_1(2^{k_i s} + 2^{k_j s})$ で与えられる. 一方, 式(9)右辺第2項が選択される小行列の保存成分数は,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{B}_{k_i, k_j}) &\leq C_2(2^{k_i s} + 2^{k_j s} \\ &\quad + 2^{\kappa s(m+1)} \cdot 2^{\kappa' s(k_i + k_j)}), \end{aligned} \quad (20)$$

で与えられる. ただし, $\kappa := (2p' - r)/(2n + r)$, $\kappa' := (n + r - p')/(2n + r)$ とする. なお, 式(19)から, $\delta_{k_i, k_j} = 2^{-\min(k_i, k_j)}$ となる小行列は $k_i < \rho/\sigma$ なる階層 k_i の範囲では出現しないことがわかる. また, Schneider の手法における切り捨て基準値は $\delta_{k_i, k_j} = \delta_{k_j, k_i}$ となるから, \mathbf{B} 行列の保存成分数 $\mathcal{N}(\mathbf{B})$ は次式で評価できる.

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{B}) &\leq 2C_1 \sum_{k_i=\rho/\sigma}^m \sum_{k_j=0}^{\sigma k_i - \rho - 1} (2^{k_i s} + 2^{k_j s}) \\ &\quad + 2C_2 \sum_{k_i=0}^{\rho/\sigma - 1} \sum_{k_j=0}^{k_i} (2^{k_i s} + 2^{k_j s} \\ &\quad \quad + 2^{\kappa s(m+1)} \cdot 2^{\kappa' s(k_i + k_j)}) \\ &\quad + 2C_2 \sum_{k_i=\rho/\sigma}^m \sum_{k_j=\sigma k_i - \rho}^{k_i} (2^{k_i s} + 2^{k_j s} \\ &\quad \quad + 2^{\kappa s(m+1)} \cdot 2^{\kappa' s(k_i + k_j)}) \\ &\leq C_1' N \log N + C_2' N \\ &\quad + C_3' N^{1 - \frac{2(n+r-p')^2}{(2n+r)(n+p')}} + C_4' N^{1 - \frac{n+r-p'}{n+p'}}, \end{aligned} \quad (21)$$

なお, $2^{(m+1)s} \approx N$, $(m+1) \approx \log N$ としている. また, 式(21)において,

$$1 - \frac{2(n+r-p')^2}{(2n+r)(n+p')} < 1, \quad 1 - \frac{n+r-p'}{n+p'} < 1,$$

となるから, $p + 1 < n + r$ の場合には, $\mathcal{N}(\mathbf{B}) = O(N \log N)$ となる. $p + 1 = n + r$ の場合と同様に, 行列 \mathbf{G} , \mathbf{H} の保存成分数は, $r = -1$ (\mathbf{G} 行列) または $r = 0$ (\mathbf{H} 行列) と設定することで容易に評価できる²⁾.

4.2 Beylkin 型切り捨て手法

(1) サポート間距離 \bar{r} に基づく切り捨て条件式

3.2 で示した Beylkin 型切り捨て手法を適用した場合における保存成分数は, Schneider の手法を適用した

場合と同様の方法で評価できる。そのため、Beylkinの手法についてもサポート間距離 \bar{r} に関する切り捨て条件と切り捨て基準値を与える必要があるが、式(12)に示したように切り捨て条件は係数成分の大きさに関して記述されている。そこで、式(12)をサポート間距離 \bar{r} についての条件として記述し直す。

式(4)の g_{ij}, h_{ij} に関して次式が成り立つ²⁾。

$$\begin{aligned} |g_{ij}| &\leq C_g \frac{2^{-(n+s/2)(k_i+k_j)}}{\bar{r}^{s+2n-1}}, \\ |h_{ij}| &\leq C_h \frac{2^{-(n+s/2)(k_i+k_j)}}{\bar{r}^{s+2n}}, \end{aligned} \quad (22)$$

ここで、式(12)の条件を満足する成分のうち、その大きさが最大の成分が \mathbf{G} 行列、 \mathbf{H} 行列の各成分に関して δ_g, δ_h なるサポート間距離を有しているものとする。式(22)から δ_g, δ_h は次式で表わすことができる。

$$\begin{aligned} \delta_g &= C'_g \tau^{-\frac{1}{s+2n-1}} 2^{-\frac{s+2n}{2(s+2n-1)}(k_i+k_j)}, \\ \delta_h &= C'_h \tau^{-\frac{1}{s+2n}} 2^{-\frac{1}{2}(k_i+k_j)}, \end{aligned} \quad (23)$$

さらに、式(12)の条件が適用される成分が $\bar{r} > r_0 := \nu(2^{-k_i} + 2^{-k_j})$ なる成分に限定されることを考慮すると、行列 \mathbf{G}, \mathbf{H} に関する切り捨て条件式は、 \bar{r} を用いて次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} r_0 < \delta \text{ のとき, } \bar{r} > \delta \text{ の成分を切り捨て,} \\ r_0 \geq \delta \text{ のとき, } \bar{r} > r_0 \text{ の成分を切り捨て,} \end{aligned} \quad (24)$$

ただし、 δ は切り捨ての対象とする行列の種類に応じて式(23)の δ_g または δ_h で与えられる。

(2) $r_0 < \delta$ なる階層レベルの特定

次に、 $r_0 < \delta$ となる階層レベル (k_i, k_j) について考える。 \mathbf{G}, \mathbf{H} の各行列において $r_0 < \delta$ となる場合には、それぞれ次の不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \nu(2^{-k_i} + 2^{-k_j}) &< C'_g \tau^{-\frac{1}{s+2n-1}} 2^{-\frac{(s+2n)(k_i+k_j)}{2(s+2n-1)}}, \\ &\quad (\mathbf{G} \text{ 行列}) \\ \nu(2^{-k_i} + 2^{-k_j}) &< C'_h \tau^{-\frac{1}{s+2n}} 2^{-\frac{k_i+k_j}{2}}, \\ &\quad (\mathbf{H} \text{ 行列}) \end{aligned} \quad (25)$$

ここで、式(25)の両辺に $2^{k_i+k_j}$ を乗じ各項を整理すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} 2^{k_i} + 2^{k_j} &< \frac{C'_g}{\nu} \tau^{-\frac{1}{s+2n-1}} 2^{(1-\frac{1}{s+2n-1})\frac{k_i+k_j}{2}}, \\ 2^{k_i} + 2^{k_j} &< \frac{C'_h}{\nu} \tau^{-\frac{1}{s+2n}} 2^{\frac{k_i+k_j}{2}}, \end{aligned} \quad (26)$$

式(26)において、 $s+2n-1 > 0$ であるから、 $1-1/(s+2n-1) < 1$ となる。そのため、式(26)第1式を満足する場合には次の不等式も成立する。

$$2^{k_i} + 2^{k_j} < \frac{C'_g}{\nu} \tau^{-\frac{1}{s+2n-1}} 2^{\frac{k_i+k_j}{2}}, \quad (27)$$

ここで、式(26)第1式を式(27)で置き換え各項を整理すると、次の不等式を得る。

$$\begin{aligned} 2^{k_j} - \frac{C'_g}{\nu} \tau^{-\frac{1}{s+2n-1}} 2^{\frac{k_i+k_j}{2}} + 2^{k_i} &< 0, \quad (\mathbf{G} \text{ 行列}) \\ 2^{k_j} - \frac{C'_h}{\nu} \tau^{-\frac{1}{s+2n}} 2^{\frac{k_i+k_j}{2}} + 2^{k_i} &< 0, \quad (\mathbf{H} \text{ 行列}) \end{aligned} \quad (28)$$

式(28)において、 $x = 2^{k_j/2}, t = 2^{k_i/2}$ とおき、新たな定数 μ を $C'_g \tau^{-\frac{1}{s+2n-1}}$ (\mathbf{G} 行列) または $C'_h \tau^{-\frac{1}{s+2n}}$ (\mathbf{H} 行列) と定義する。その結果、式(28)の不等式は次式のようにまとめることができる。

$$x^2 - \frac{\mu}{\nu} xt + t^2 < 0. \quad (29)$$

ここで、式(29)の不等式を満たす x の範囲について考える。式(29)を満たす x の上・下界は次式で与えられる。

$$x = \frac{t}{2} \left(\frac{\mu}{\nu} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{\nu^2} - 4} \right), \quad (30)$$

式(30)において $\mu/\nu \gg 2$ と仮定すると、第2項の成分は次式で近似できる。

$$\frac{t}{2} \sqrt{\frac{\mu^2}{\nu^2} - 4} \approx \frac{t}{2} \left(\frac{\mu}{\nu} - \frac{2\nu}{\mu} \right), \quad (31)$$

その結果、式(30)は次のように表わすことができる。

$$x \approx \frac{\mu}{\nu} t, \quad \frac{\nu}{\mu} t, \quad (32)$$

ここで、 $\mu/\nu = 2^{\omega/2}$ ($\omega > 0$) とおき、 x, t を元に戻した上で対数をとると、 $r_0 < \delta$ なる階層レベルは、次の範囲に限定されることとなる。

$$\begin{aligned} k_i - \omega_g &< k_j < k_i + \omega_g, \quad (\mathbf{G} \text{ 行列}) \\ k_i - \omega_h &< k_j < k_i + \omega_h, \quad (\mathbf{H} \text{ 行列}) \end{aligned} \quad (33)$$

なお、 ω_g, ω_h は次式で定義される定数である。

$$2^{\frac{\omega_g}{2}} = \frac{C'_g}{\nu} \tau^{-\frac{1}{s+2n-1}}, \quad 2^{\frac{\omega_h}{2}} = \frac{C'_h}{\nu} \tau^{-\frac{1}{s+2n}}, \quad (34)$$

(3) 小行列 $\mathbf{G}_{k_i, k_j}, \mathbf{H}_{k_i, k_j}$ の保存成分数

Beylkin型手法に基づいて切り捨てを行なった場合においても、係数行列の保存成分数はSchneiderの階層依存型手法の場合と同様な方法により、式(17)に基づいて評価することができる。今、階層 (k_i, k_j) に対応する係数小行列を $\mathbf{G}_{k_i, k_j}, \mathbf{H}_{k_i, k_j}$ で表わすと、これらの小行列の保存成分数 $\mathcal{N}(\mathbf{G}_{k_i, k_j}), \mathcal{N}(\mathbf{H}_{k_i, k_j})$ は、式(23)で定義される δ_g, δ_h と式(24)の切り捨て条件から次のように与えられる。

$$\mathcal{N}(\mathbf{G}_{k_i, k_j}) \leq \begin{cases} C_{g1} \left(2^{k_i s} + 2^{k_j s} + \gamma' \tau^{-\frac{s}{s+2n-1}} 2^{\frac{k_i+k_j}{2} \varepsilon s} \right), & (r_0 < \delta) \\ C'_{g1} (2^{k_i s} + 2^{k_j s}), & (r_0 \geq \delta) \end{cases} \quad (35)$$

$$\mathcal{N}(\mathbf{H}_{k_i, k_j}) \leq \begin{cases} C_{h1} \left(2^{k_i s} + 2^{k_j s} + \gamma' \tau^{-\frac{s}{s+2n}} 2^{\frac{k_i+k_j}{2} \varepsilon s} \right), & (r_0 < \delta) \\ C'_{h1} (2^{k_i s} + 2^{k_j s}), & (r_0 \geq \delta) \end{cases} \quad (36)$$

ただし、 $\gamma' > 0$ (定数) とし、 $\varepsilon := 2 - (s+2n)/(s+2n-1)$ と定義する。

(4) G 行列の保存成分数

まず, \mathbf{G} 行列の保存成分数について考える. \mathbf{G} 行列については, 式(33) から $k_i - \omega_g < k_j < k_i + \omega_g$ なる階層 (k_i, k_j) に関する係数成分において $r_0 < \delta_g$ となっている. ここで, k_i と k_j を交換しても δ_g は不変であることを考慮すると, \mathbf{G} 行列の保存成分数 $\mathcal{N}(\mathbf{G})$ は式(35)に基づき次式で評価できる.

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{G}) &\leq C \sum_{k_i=0}^m \sum_{k_j=0}^m \mathcal{N}(\mathbf{G}_{k_i, k_j}) \\ &\leq C'_1 \sum_{k_i=0}^m \sum_{k_j=0}^m (2^{k_i s} + 2^{k_j s}) \\ &\quad + C'_2 \tau^{\frac{-s}{s+2n-1}} \sum_{k_i=0}^{m-\omega_g} \sum_{k_j=k_i}^{k_i+\omega_g} 2^{\frac{\lambda s}{2}(k_i+k_j)} \\ &\quad + C'_3 \tau^{\frac{-s}{s+2n-1}} \sum_{k_i=m-\omega_g+1}^m \sum_{k_j=k_i}^m 2^{\frac{\lambda s}{2}(k_i+k_j)} \end{aligned} \quad (37)$$

ただし, $\lambda = (s+2n-2)/(s+2n-1)$ とする.

なお, 式(37)の各項に含まれる総和は以下のように計算できる.

$$\sum_{k_i=0}^m \sum_{k_j=0}^m (2^{k_i s} + 2^{k_j s}) \leq \bar{C}_1 (m+1) 2^{(m+1)s}, \quad (38)$$

$$\sum_{k_i=0}^{m-\omega_g} \sum_{k_j=k_i}^{k_i+\omega_g} 2^{\frac{\lambda s}{2}(k_i+k_j)} \leq \bar{C}_2'' \tau^{\frac{\lambda s}{s+2n-1}} 2^{\lambda s(m+1)}, \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k_i=m-\omega_g+1}^m \sum_{k_j=k_i}^m 2^{\frac{\lambda s}{2}(k_i+k_j)} \\ \leq \bar{C}_3' 2^{\lambda s(m+1)} \left(1 + \tau^{\frac{\lambda s}{s+2n-1}} + \tau^{\frac{2\lambda s}{s+2n-1}} \right), \end{aligned} \quad (40)$$

ここで, 式(38)–(40)の結果を式(37)へ代入し, $\tau \approx \alpha' N^{-\beta}$, $m+1 \approx \log N$, $2^{s(m+1)} \approx N$ となることを考慮すると次式を得る.

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{G}) &\leq C_4 N \log N + N^\lambda \left(C_5 N^{\frac{s\beta}{s+2n-1}} \right. \\ &\quad \left. + C_6 N^{\frac{(1-\lambda)s\beta}{s+2n-1}} + C_7 N^{\frac{(1-2\lambda)s\beta}{s+2n-1}} \right), \end{aligned} \quad (41)$$

式(41)において $s+2n-1 > 0$ であるから, $\lambda = 1 - 1/(s+2n-1)$ は $0 < \lambda < 1$ なる値をとる. よって, 式(41)各項の指数に関して次式が成り立つ.

$$\frac{(1-2\lambda)s\beta}{s+2n-1} < \frac{(1-\lambda)s\beta}{s+2n-1} < \frac{s\beta}{s+2n-1}, \quad (42)$$

その結果, 式(41)は次式のように整理できる.

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{G}) &\leq C'_4 N \log N + C''_5 N^{\lambda + \frac{s\beta}{s+2n-1}} \\ &= C'_4 N \log N + C''_5 N^{1 + \frac{s\beta-1}{s+2n-1}}. \end{aligned} \quad (43)$$

式(43)から, \mathbf{G} 行列の保存成分数 $\mathcal{N}(\mathbf{G})$ は $O(N \log N)$ ($\beta \leq 1/s$) または $O(N^{1+(s\beta-1)/(s+2n-1)})$ ($\beta > 1/s$) となる.

(5) H 行列の保存成分数

次に, \mathbf{H} 行列の保存成分数について考える. 今, \mathbf{H} 行列の保存成分数を $\mathcal{N}(\mathbf{H})$ で表わすと, $\mathcal{N}(\mathbf{H})$ は \mathbf{G} 行列の場合と同様に式(33), (36)を用いて次のように評価できる.

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{H}) &\leq C \sum_{k_i=0}^m \sum_{k_j=0}^m \mathcal{N}(\mathbf{H}_{k_i, k_j}) \\ &\leq C'_1 \sum_{k_i=0}^m \sum_{k_j=0}^m (2^{k_i s} + 2^{k_j s}) \\ &\quad + C'_2 \tau^{\frac{-s}{s+2n}} \sum_{k_i=0}^{m-\omega_h} \sum_{k_j=k_i}^{k_i+\omega_h} 2^{\frac{s(k_i+k_j)}{2}} \\ &\quad + C'_3 \tau^{\frac{-s}{s+2n}} \sum_{k_i=m-\omega_h+1}^m \sum_{k_j=k_i}^m 2^{\frac{s(k_i+k_j)}{2}}, \end{aligned} \quad (44)$$

なお, 式(44)各項に含まれる総和は以下のように計算できる.

$$\sum_{k_i=0}^{m-\omega_h} \sum_{k_j=k_i}^{k_i+\omega_h} 2^{\frac{k_i+k_j}{2}s} \leq \bar{C}_1 \tau^{\frac{-s}{s+2n}} 2^{s(m+1)}, \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k_i=m-\omega_h+1}^m \sum_{k_j=k_i}^m 2^{\frac{k_i+k_j}{2}s} &\leq \bar{C}_2 2^{s(m+1)} \\ &\quad + \bar{C}_3 \tau^{\frac{-s}{s+2n}} 2^{s(m+1)} + \bar{C}_4 \tau^{\frac{-2s}{s+2n}} 2^{s(m+1)}, \end{aligned} \quad (46)$$

ここで, 式(38), (45), (46)を式(44)に代入し, $\tau = \alpha' N^{-\beta}$ を考慮すると, 次式を得る.

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{H}) &\leq C_4 N \log N + C_5 N \\ &\quad + C_6 N^{1 - \frac{s\beta}{s+2n}} + C_7 N^{1 + \frac{s\beta}{s+2n}}, \end{aligned} \quad (47)$$

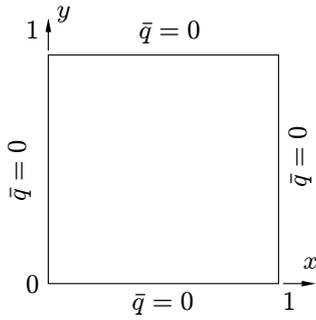
ただし, $\log N \approx m+1$, $N \approx 2^{s(m+1)}$ としている. なお, 式(47)において $s\beta/(s+2n) > 0$ であるから, \mathbf{H} 行列の保存成分数は $\mathcal{N}(\mathbf{H}) = O(N^{1+s\beta/(s+2n)})$ と評価することができる.

5. 解析結果

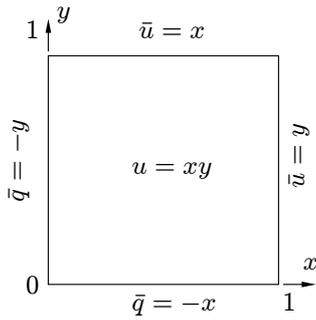
5.1 解析条件

上述の2種類の切り捨て手法の行列圧縮性能を評価し, 特に Beylkin 型切り捨てアルゴリズムの実効性について検討する目的で数値実験を行なった. なお, 2次元・3次元ポテンシャル問題に関する境界要素解析を対象とした.

2次元問題として, 図-1(a)の外部 Neumann 問題と, 図-1(b)の混合境界値問題の2例を設定した. 外部問題については全境界にわたって Neumann 条件 $\bar{q} = 0$ が与えられており, $U_\infty = x$ と設定されている. 混合境界値問題については, 真の解が $u = xy$ で与えられるように境界条件を設定した. 一方, 3次元問題は図-2に示す外部問題とした. 境界形状は単位長さを辺長とした立方体で与えられ, 境界条件は2次元外部問題の



(a) 外部 Neumann 問題.
(対象領域は正方形の外側, $U_\infty = x$)



(b) 混合境界値問題.

図-1 2次元問題の解析例.

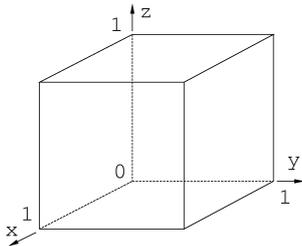


図-2 3次元問題の解析例. (外部 Neumann 問題, 対象領域は立方体の外側, 全境界で $\bar{q} = 0, U_\infty = x$)

場合と同じく全境界上で $\bar{q} = 0$ とした. なお, 無限遠でのポテンシャル分布 U_∞ は $U_\infty = x$ で与えている.

以下においては, 上述の解析例における計算結果を順を追って示す. なお, 以降に示す図中“Beylkin”は, 式(16)の切り捨て基準値の下で Beylkin 型アルゴリズムを適用して得られた結果を表わしている. また, Schneider の手法を適用した場合の解析結果はいずれも $a = 1$ として得られたものであり, 使用した切り捨て基準値によって“Case 1”($p+1 = n+r$ で適用可能な式(8)を使用), “Case 2”($p+1 < n+r$ で適用可能な式(9)を使用)の形で区別している.

5.2 2次元外部 Neumann 問題

まず, 図-1(a)の2次元外部 Neumann 問題における自由度と保存成分数との関係を図-3に示す. 当該問題では, 式(6)の係数行列 \mathbf{A} の成分はすべて行列 \mathbf{H} に関するものとなるため, 図-3縦軸の保存成分数は \mathbf{H} 行列の保存成分数を表わしている. 解析においては Haar

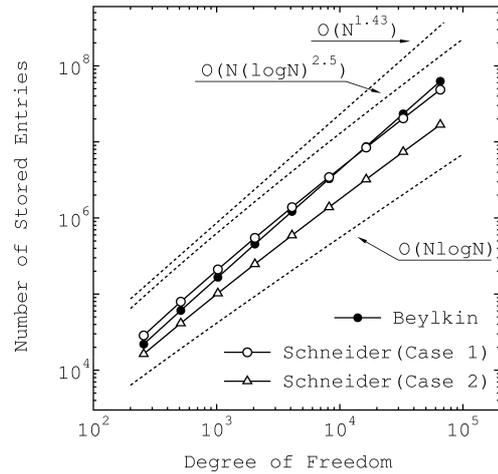


図-3 2次元外部 Neumann 問題における係数行列の保存成分数. (Haar wavelet を使用, Case 2は $p' = 1$ として切り捨てを実行(ただし適用範囲外))

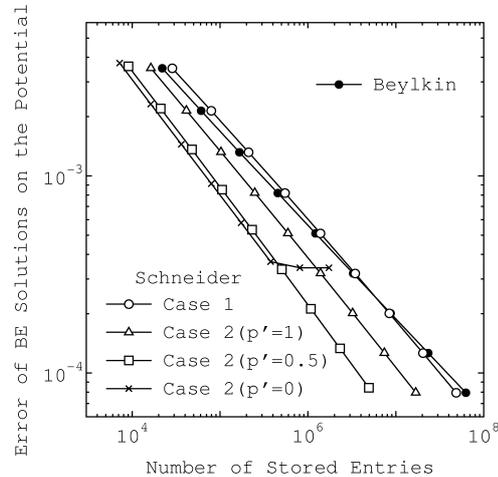


図-4 Schneider の切り捨て手法で使用されるパラメータの選択の影響. (2次元外部 Neumann 問題, Haar wavelet を使用, パラメータ p' はいずれも適用範囲外の値)

wavelet¹¹⁾を近似基底として用い, wavelet 級数展開は矩形境界の各辺毎に定義した. なお, Haar wavelet は区間一定関数 ($p = 0$) であり, 1次のゼロモーメント性 ($n = 1$) を有している. そのため, \mathbf{H} 行列については $p+1 = n+r$ となるが, \mathbf{G} 行列では $p+1 > n+r$ となる. すなわち, Schneider の階層依存型切り捨て手法が適用できるのは行列 \mathbf{H} のみとなるが, 当該問題では \mathbf{G} 行列を作成する必要がないため特段問題とはならない.

ここで, Beylkin 型手法と切り捨て基準値を正しく設定した Schneider の手法 (Case 1) とを比較してみる. 自由度の小さい(最高階層の低い)段階では Beylkin 型の切り捨ての方が Schneider の方法を適用するよりも若干少ない保存成分数を示しているが, 自由度の増加とともに双方の保存成分数は接近していく. さらに自由度を大きく(最高階層を高く)設定すると, 両者の大小関係は逆転することがわかる. ただし, Schneider の手法を正規に運用した場合, 保存成分数が Beylkin 型

適用時の成分数を下回るのは wavelet 展開の最高階層をかなり大きく設定した場合に限定されている。

また、今回解析対象とした自由度の設定範囲においては、階層依存型・Beylkin 型とも若干の差は認められるものの保存成分数はほぼ同オーダーの値を示す結果となった。このことから、2次元問題において Schneider の切り捨て基準値が式(8)で与えられる場合、Beylkin の切り捨て手法は階層依存型手法に匹敵する行列圧縮性能を示しており、十分な実効性を有していることがわかる。

なお、当該問題では Beylkin 型手法の切り捨て基準値は事前の解析を通して $\tau = \alpha' N^{-1.28}$ となるように設定したため、前節の結果によれば Beylkin 型手法の下での保存成分数は $O(N^{1.43})$ で増加することが予測される。解析結果でも係数行列の保存成分数は $O(N^{1.43})$ の割合で増加しており、 \mathbf{H} 行列の保存成分数に関する評価式が妥当であることが確認できる。

次に、不正に設定された切り捨て基準値の下で Schneider の手法を適用して得られた結果 (Case 2) と Beylkin 型手法の圧縮結果とを比較する。なお、Case 2 では $p' = 1$ に設定した。Case 1 の場合とは異なり、Case 2 では全ての自由度で階層依存型基準値を使用した切り捨ての方が Beylkin 型切り捨てよりも高効率となっている。その際、いずれの切り捨て手法の下でも精度低下は発生しなかった。そこで、Case 2 で用いたパラメータ p' をより小さく設定した上で係数行列の圧縮を行ない、パラメータ p' を適用範囲外の値に設定した場合の弊害について検討してみる。ここで、Case 2 で使用する p' を 0, 0.5, 1 に設定した場合の保存成分数と近似解のポテンシャル成分 \mathbf{u} に関する誤差との関係を図-4に示す。境界条件・離散化条件は、図-3の結果が得られた境界要素解析と同一に設定した。

解析結果より、 p' の値を小さく設定するほど係数行列の圧縮効果は高くなることがわかる。ここで対象としている問題設定・離散化条件では、式(9)の切り捨て基準値を使用することは許されていないが、 $p' = 0.5, 1$ と設定しても、今回対象とした自由度の範囲においては解析精度は維持されている。しかし、 $p' = 0$ までパラメータの値を小さくすると近似解の漸近収束性が保証できなくなり、ある段階で精度が頭打ちになることがわかる。これは明らかに過剰な切り捨てに起因している。また、この結果は、解析自由度をさらに大きくすると $p' = 0.5, 1$ と設定しても $p' = 0$ の場合のように精度限界が現れることを示唆するものである。そのため、式(9)の適用下限値を下回る範囲で Schneider の切り捨て基準値を設定すると高い圧縮性を示すが、切り捨て基準値で使用するパラメータ設定と離散化条件との兼ね合いによっては精度の低下を引き起こすことがあるため注意を要する。

5.3 2次元混合境界値問題

次に、2次元混合境界値問題における各切り捨て手法の行列圧縮性能について議論する。この場合、 \mathbf{G} 行列、 \mathbf{H} 行列ともに生成・切り捨て・保存が必要となる。解析においては、区間一定・3次ゼロモーメント性を有する非直交 wavelet¹¹⁾を用いた。この場合、 $p = 0$,

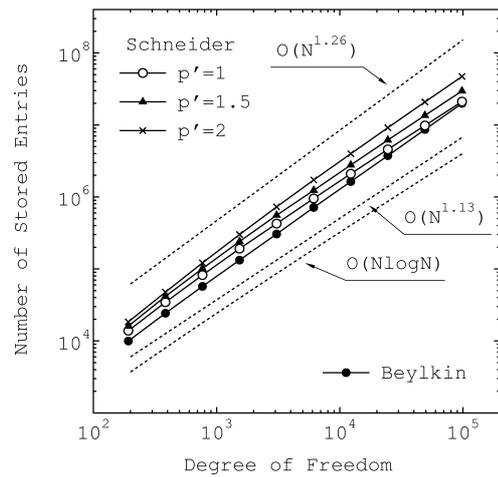


図-5 2次元混合境界値問題における係数行列の保存成分数。(区間一定・3次ゼロモーメント性を有する非直交 wavelet を使用, Schneider の手法は式(9)によって切り捨て基準値を設定)

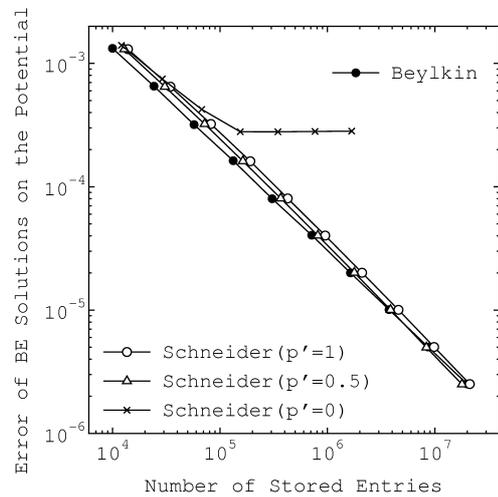


図-6 Schneider の切り捨て手法で使用されるパラメータの選択の影響。(2次元混合境界値問題, 区間一定・3次ゼロモーメント性を有する非直交 wavelet を使用, p' の正規の設定範囲は $1 < p' < 2$)

$n = 3$ となるから、 \mathbf{G} 行列・ \mathbf{H} 行列とも $p+1 < n+r$ を満足することとなる。そのため、Schneider の切り捨てアルゴリズムは式(9)の切り捨て基準値に基づき適用した。その際、パラメータ p' は $1 < p' < 2$ の範囲で設定可能である。

まず、Beylkin 型・Schneider の階層依存型切り捨て手法をそれぞれ適用した場合の係数行列 \mathbf{A} の保存成分数と自由度との関係を図-5に示す。なお、混合境界値問題における係数行列 \mathbf{A} は内部に行列 \mathbf{G} , \mathbf{H} の成分が混在している構造を有している。混合境界値問題における各切り捨て手法の行列圧縮性能は、前節で示した外部問題の場合と概ね同様の傾向を示している。自由度の小さい範囲では Beylkin 型手法の方が Schneider の手法と比べ若干保存成分数を少なくできる。自由度を大きく設定すれば両者の保存成分数の差は縮まり、保

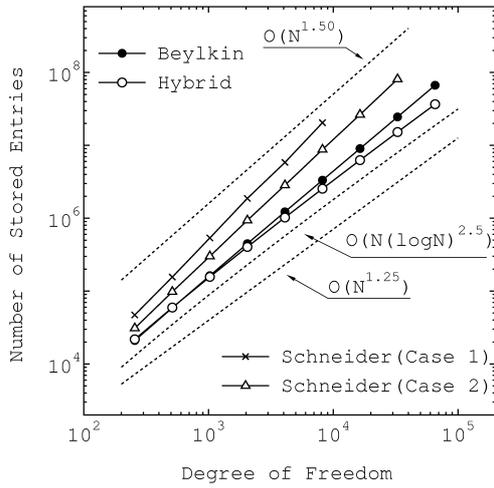


図-7 Haar wavelet を 2 次元混合境界値問題に適用した場合における係数行列の保存成分数. (Hybrid: \mathbf{H} 行列は Schneider の手法, \mathbf{G} 行列は Beylkin 型手法で切り捨てを実行, Case 2 では $p' = 1$ に設定, Schneider の切り捨て基準値は \mathbf{H} 行列については式(8) で設定可能であるが, \mathbf{G} 行列は式(8), (9) と適用範囲外)

存数の大小関係も逆転すると思われる. しかし, 今回の解析においては Beylkin 型手法・Schneider の手法のいずれを用いてもほぼ同オーダーの保存成分数を示しており, $O(N^{1+\gamma})$ の保存成分数を要する Beylkin 型切り捨て手法を適用することは実用上不利とはならないものと思われる.

なお, Beylkin 型切り捨て手法の切り捨て基準値は $\beta = 1.78$ となるように設定されているため, 前節で示した保存成分数の評価式によれば \mathbf{G} 行列, \mathbf{H} 行列の保存成分数はそれぞれ $O(N^{1.13})$, $O(N^{1.26})$ で増加すると予測される. 一方, 解析結果においては \mathbf{A} の保存成分数が $O(N^{1.21})$ となった. この 1.21 なる値は \mathbf{G} , \mathbf{H} 行列に関する評価値 1.13, 1.26 の範囲内に収まっており, \mathbf{G} 行列成分も保存の対象となる場合においても保存成分数の評価式が有効に機能することが確認できる.

続いて, Schneider の切り捨て基準値を適用範囲外の値に設定した場合の問題点について議論する. ここでは, 区間一定・3 次ゼロモーメント性を有する wavelet を用いた境界要素解析を対象とする. 式(9) で与えられる Schneider の切り捨て基準値を不正な値に設定した場合における, 近似解のポテンシャル成分 \mathbf{u} に関する誤差と保存成分数との関係を図-6 に示す. 先に示した 2 次元外部問題の場合と同様に, 切り捨て基準値を設定するのに必要となる p' を本来許容されている範囲を若干下回る値に設定すると特段問題は生じない. しかし, 過小な値に設定してしまうと係数成分を過剰に切り捨ててしまい, 解の精度を損ねてしまうことがわかる.

次に, Haar wavelet を用いて同一の問題を解いた場合の係数行列の保存成分数を図-7 に示す. この場合, Schneider の切り捨て手法が適用できるのは \mathbf{H} 行列のみであり, \mathbf{G} 行列については式(8), (9) の切り捨て基準値ともに適用できない. 解析においては, いずれも Schneider の手法を不正に運用している Case 1, Case 2

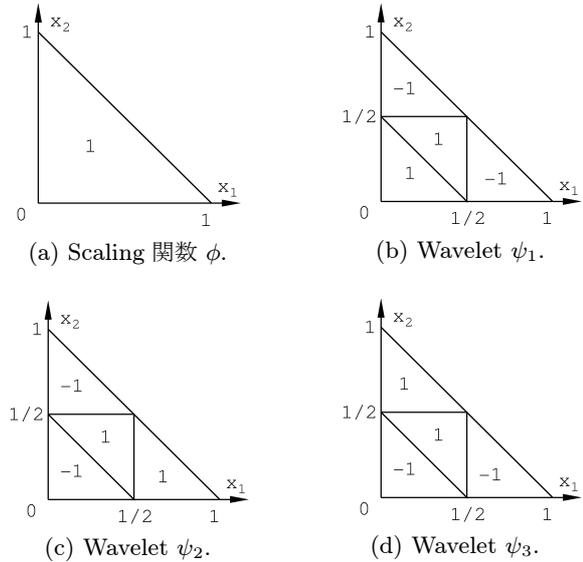


図-8 区間一定・1 次ゼロモーメント性を有する三角形 wavelet ψ_1, ψ_2, ψ_3 とそれに対応する scaling 関数 ϕ . (三角形領域内の数字は基底の高さの比率を表わす.)

では精度の低下こそ起こさなかったものの, Beylkin 型切り捨て手法を適用した場合と比べ多数の係数成分が保存されることがわかる. 特に Case 1 では成分数の増加が顕著であるため, 実際の解析でこの切り捨て基準値を使用しても係数行列成分の大幅な削減は期待できない. なお, 図には \mathbf{G} 行列に Beylkin 型手法を, \mathbf{H} 行列に Schneider の手法を適用した場合 (“Hybrid” と表示) の解析結果も示した. 図より, 当該問題では両手法の併用によって高率に係数行列を圧縮できることがわかる.

5.4 3 次元外部 Neumann 問題

最後に, 3 次元問題における Beylkin 型・階層依存型切り捨て手法の行列圧縮性能について検討する. 今回対象としたのは図-2 に示した外部 Neumann 問題である. なお, 解析においては三角形サポートを有する wavelet を用いて離散化を行なった. Scaling 関数 ϕ および wavelet ψ_1, ψ_2, ψ_3 はともに区間一定関数で定義されており, wavelet については 1 次のゼロモーメント性を有している. ここで, $\phi, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ の形状を図-8 に示す. なお, 図中三角形領域内に記された数字は関数値の比率を示している. この wavelet は, 階層が一つ上がる毎に自由度が 4 倍で増加するように構成されている.

当該問題における自由度と保存成分数の関係を図-9 に示す. 図中の保存成分数は, 2 次元外部問題の場合と同じく \mathbf{H} 行列の保存成分数を表わしている. Schneider の手法を適用した Case 2 は適用範囲外の切り捨て基準値・判定式を使用していることとなる. 3 次元解析を対象とした場合においても, 2 次元問題と同様の結果を得た.

Schneider の切り捨て基準を正しく運用した Case 1 の場合, wavelet 展開の最高階層を低く設定している自由度の範囲では Beylkin 型手法に基づき切り捨てを行

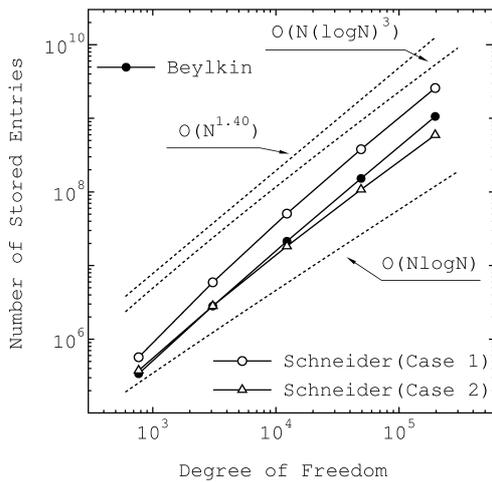


図-9 3次元外部 Neumann 問題における係数行列の保存成分数。(区間一定・1次元ゼロモーメント性を有する Haar 型三角形 wavelet を使用, Case 2 は $p' = 1$ として切り捨てを実行(ただし適用範囲外))

なった方がより高率で係数行列を圧縮できることがわかる。今回の解析では約 20 万自由度までの解析を行なったが、いずれの自由度においても Schneider の手法による切り捨ての方が多数の保存成分数を要する結果となった。

一方, Case 2 では切り捨て手法の適用条件を満足していないが、精度を低下させることなく Beylkin 型の切り捨てとほぼ同等の圧縮性能を示した。ただし、その適用においては、2次元問題の場合と同様に、精度低下を回避するような値に p' を設定する必要があると思われる。なお、Beylkin 型手法の切り捨て基準値は $\beta = 0.80$ となるように設定されており、前節の評価式を用いれば $O(N^{1.40})$ となることが予測される。解析で得られた係数行列の保存成分数は $O(N^{1.44})$ で増加しており、3次元問題においても概ね評価式通りの自由度依存性を示すことがわかる。

6. おわりに

本論文では、wavelet BEM において用いられる係数成分切り捨て手法の行列圧縮性能について論じた。切り捨て手法には著者らが構成した Beylkin 型手法と Schneider が提案した階層依存型手法の 2 種類を採用し、特に境界要素解析における Beylkin 型切り捨て手法の実効性について詳細に検討した。また、2種類の切り捨て手法を適用した際の係数行列の保存成分数の評価式を併記し、Beylkin 型手法の下では保存成分数が $O(N^{1+\gamma})$ ($0 < \gamma < 1$) となることを示した。そのため、Beylkin 型手法は $O(N(\log N)^\alpha)$ ($\alpha \leq 1$) の成分数が保証されている Schneider の手法と比べ非効率となることが予想された。しかし、実際の解析を対象とした場合、Beylkin 型手法による切り捨ては Schneider の手法を正しく運用した場合と同程度またはそれ以上の高率で係数行列を圧縮することが確認できた。

なお、Schneider の手法は問題設定や離散化条件の

制約を受け、場合によっては適用不可能となってしまう。そこで、適用範囲外である切り捨て基準値を用いて Schneider の手法を適用したところ、過小な切り捨て基準値のもとでは係数が過剰に切り捨てられ、精度低下を招く結果となった。そのため、適用範囲外で Schneider の切り捨て手法をやむを得ず適用する際には注意を要する。

参考文献

- 1) Dahmen, W., Prössdorf, S. & Schneider, R.: Wavelet approximation methods for pseudodifferential equations II: Matrix compression and fast solution. *Adv. Comput. Math.*, Vol.1, pp.259–335, 1993.
- 2) Schneider, R.: Multiskalen- und Wavelet-Matrixkompression: Analysisbasierte Methoden zur effizienten Lösung großer vollbesetzter Gleichungssysteme. B.G.Teubner, Stuttgart, 1998.
- 3) von Petersdorff, T. & Schwab, C.: Wavelet approximations for first kind boundary integral equations on polygons. *Numer. Math.*, Vol.74, pp.479–519, 1996.
- 4) von Petersdorff, T., Schwab, C. & Schneider, R.: Multiwavelets for second-kind integral equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol.34, No.6, pp.2212–2227, 1997.
- 5) Lage, C. & Schwab, C.: Wavelet Galerkin algorithms for boundary integral equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol.20, No.6, pp.2195–2222, 1999.
- 6) Amaratunga, K. & Castrillon-Candas, J.E.: Surface wavelets: a multiresolution signal processing tool for 3D computational modelling. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.52, pp.239–271, 2001.
- 7) Rathsfeld, A.: A wavelet algorithm for the boundary element solution of a geodetic boundary value problem. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol.157, pp.267–287, 1998.
- 8) Goswami, J.C., Chan, A.K. & Chui, C.K.: On solving first-kind integral equations using wavelets on a bounded interval. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol.43, No.6, pp.614–622, 1995.
- 9) Beylkin, G., Coifman, R. & Rokhlin, V.: Fast wavelet transforms and numerical algorithms I. *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol.44, pp.144–183, 1991.
- 10) Wang, G.: A hybrid wavelet expansion and boundary element analysis of electromagnetic scattering from conducting objects. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol.43, No.2, pp.170–178, 1995.
- 11) Koro, K. & Abe, K.: Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis. *Engng. Anal. Bound. Elems.*, Vol.25, pp.149–164, 2001.
- 12) Koro, K. & Abe, K.: A practical determination strategy of optimal threshold parameter for matrix compression in wavelet BEM. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.57, pp.169–191, 2003.

(2003年4月18日受付)