

# 三角形・四面体要素を用いたVOF法によるトポロジー最適化法

Topology optimization analysis by VOF method using triangular and tetrahedral elements

西宮裕騎\*・阿部和久\*\*・紅露一寛\*\*\*

Yuuki NISHINOMIYA, Kazuhisa ABE, Kazuhiro KORO

\*学生会員 博士前期課程(研究当時) 新潟大学大学院自然科学研究科(〒950-2181 新潟市五十嵐二の町8050番地)

\*\*正会員 工博 新潟大学助教授 工学部建設学科(〒950-2181 新潟市五十嵐二の町8050番地)

\*\*\*正会員 博士(工学) 新潟大学助教授 大学院自然科学研究科(〒950-2181 新潟市五十嵐二の町8050番地)

This paper presents a topology optimization method in which a structural layout is represented by the VOF function. The topological change results from the convection of the VOF function. The velocity field which leads the topology to an optimal design is derived by means of the sensitivity analysis. The proposed method is developed within the framework of the finite element analysis using triangular or tetrahedral elements. To prevent the numerical diffusion the CIVA method is employed in cooperation with the tangent transformation method. Applications to two- and three-dimensional minimum compliance problems are demonstrated. Through these numerical examples, the validity of the developed method is evidenced.

**Key Words** : topology optimization, VOF method, CIVA method, linear elasticity

## 1. はじめに

連続体を対象としたトポロジー最適化手法の構築は、設計時の形状設定に合理性を付与し、既成概念に囚われない新たなトポロジーの創生を可能にする。これまでに、具体的な手法として均質化法に基づくものや密度法などが提案されている。均質化法による手法はBendsøe and Kikuchi<sup>1)</sup>により提案され、それ以来様々な工学問題への適用が試みられてきた<sup>2)</sup>。当該手法は、均質化解析を伴う点では多少煩雑となるものの、微細構造の導入によって、設計領域内での物質の最適配置に関する、いわゆる2値化問題が本来有する不適切性の緩和に有効となる。これに対し、密度法によるトポロジー最適化手法は、均質化法の様な微細構造を前提とせず、そのため定式化やコーディングが容易に行えるといった特徴を持つ。

なお、均質化法と密度法のいずれにおいても、中間密度の分布や、いわゆるチェッカーボードパターンの発生などの問題を内在している。これらの問題点の改善には付加的な対処法が必要であり、フィルタリング法<sup>3)</sup>や、CAMD(Continuous Approximation of Material Distribution)法<sup>4)</sup>などが提案されている。また、密度法における中間密度分布領域の低減を目的とした方法として、中間密度にペナルティを課すSIMP(Solid Isotropic Microstructure with Penalty)法<sup>5)</sup>が提案され、現在では密度法を一般化した手法として広く用いられている。

一方、これらの付加的な対処法を必要としないトポロジー最適化手法として、level set法を用いた方法が近年提案されている<sup>6),7),8)</sup>。Level set法<sup>9)</sup>では、符号付き距離関数(level set関数)を導入し、物体境界をそのゼロ等高線により表現する。トポロジー最適化過程における形状変化はlevel set関数の移流に帰着される。当該手法による場合、物体境界が明瞭に定義でき、中

間密度やチェッカーボードパターンの発生といった問題から解放される。しかし、設計感度解析において、level set関数の変動に関する変分を評価する必要がある。その際に物体境界を、level set関数値を変数としたデルタ関数によって間接的に表現する必要があり、そのため定式化とコーディングとが幾分煩雑となる。また、デルタ関数を連続関数で近似して数値的扱いを簡易にする場合<sup>7)</sup>、物体境界はある幅に渡って分布することとなり、境界の明瞭化といった利点が無くなる。

そこで、Abe and Koro<sup>10)</sup>はVOF(Volume Of Fluid)法を用いたトポロジー最適化手法を提案した。VOF法<sup>11)</sup>では、Eulerメッシュ下の要素毎に物質の占有率をVOF関数として定義し物体領域を表現する。この意味において、VOF関数による表現方法は密度法における密度関数と同義に解釈することができる。本手法による場合、密度法と同様の計算過程を経て、設計感度をVOF関数の変動量によって直接記述することが可能となる。したがって、その定式化はlevel set法に比べ簡略になる。さらに、トポロジー変化はVOF関数の移流により表現されるので、level set法と同様、チェッカーボードパターンの発生の恐れはない。なお、文献<sup>10)</sup>では二次元線形弾性問題に対象を限定し、VOF関数の移流計算過程に生ずる数値拡散を抑制する目的で、矩形メッシュに対しCIP(Cubic Interpolated Profile)法<sup>12)</sup>を採用した。

実際の設計においては、様々な材料を対象とした最適設計が必要となる場合がある。著者らも、鉄道軌道に用いられるゴムパッドの凹凸形状最適化を最終目的として、大変形下でのトポロジー最適化手法の構築を試みている。ゴム材料は一般に非圧縮超弾性体としてモデル化される<sup>13)</sup>。非圧縮材の解析では変位-圧力混合法が広く用いられているが、その際に圧力ロッキングを防止するためにLBB(Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi)

条件<sup>14)</sup>をみたす要素選択が必要となる。しかし、当該条件をみたす要素は一般に自由度が高く、不必要に補間次数の高い要素の適用を余儀なくされる。

この問題点を解決する方策として安定化有限要素法<sup>15)</sup>が挙げられる。当該手法によれば、LBB条件を満足しない要素の組み合わせの下でも圧力ロッキングの抑制が可能となる。ただし、有限要素方程式に付加される安定化項の計算には、応力の空間微分を含む領域積分が必要となる。この煩雑さを回避するという意味において、三角形や四面体定ひずみ要素の採用は有意な選択肢の一つに思える。

以上の点に鑑み、本研究では非圧縮超弾性体を対象としたトポロジー最適化手法の構築を念頭に、その実現に向けた一つの基礎的試みとして、文献<sup>10)</sup>に構成したVOF法に基づくトポロジー最適化手法の、三角形(二次元)および四面体(三次元)定ひずみ要素への拡張について検討する。具体的には、VOF関数の移流計算の際に、CIP法に代わり、任意形状の要素に対応したCIVA(Cubic Interpolation with Volume/Area coordinates)法<sup>16),17)</sup>を適用する。また、VOF関数で定義した物体境界をより明瞭に表現する目的で、正接関数変換<sup>18)</sup>の併用を試みる。

以下では、まず線形弾性問題を例に最適化問題を定義し、VOF法によるトポロジー最適化手法の定式化を示す。さらに、具体的問題としてコンプライアンス最小化問題を取り上げ、二次元および三次元問題への適用例を示す。また、これらの解析結果に基づき、構成手法の有効性やパフォーマンスについて検証する。

## 2. 最適化問題

### 2.1 有限要素方程式

有限要素方程式は次の仮想仕事式により与えられる。

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = L(\mathbf{u}^*), \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ on } \Gamma_u, \text{ for } \forall \mathbf{u}^* \in D \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{u}$ は変位、 $\Gamma_u$ は変位が規定されている物体境界、 $\bar{\mathbf{u}}$ は変位規定値、 $\mathbf{u}^*$ は仮想変位であり、 $\Gamma_u$ 上で $\mathbf{u}^* = 0$ をみたす変位関数空間 $D$ の任意の元により与えられる。線形弾性問題を対象とする場合、各作用素は次式で与えられる。

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{E} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^*) \, d\Omega \quad (2)$$

$$L(\mathbf{u}^*) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}^* \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u}^* \, d\Gamma \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{E}$ は弾性定数テンソル、 $\boldsymbol{\epsilon}$ は微小ひずみテンソル、 $\mathbf{b}$ ,  $\bar{\mathbf{t}}$ は規定された物体力と表面力、 $\Omega$ は物体領域、 $\Gamma_t$ は表面力が規定されている物体境界である。

### 2.2 最適化問題の定義

対象とするトポロジー最適化問題を次式で定義する。

$$\text{Minimize } J(\mathbf{u}) := \int_{\Omega} F(\mathbf{u}) \, d\Omega \quad (4)$$

$$\text{Subject to : } a(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = L(\mathbf{u}^*), \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ on } \Gamma_u, \text{ for } \forall \mathbf{u}^* \in D \quad (5)$$

$$V := \int_{\Omega} d\Omega \leq V_{\max}$$

ここで、 $J$ は目的汎関数、 $F$ は目的汎関数を定義する関数、 $V_{\max}$ は許容最大体積である。

## 3. VOF法によるトポロジー最適化

### 3.1 VOF法による物体領域の表現

VOF法では、解析領域内において、物体により占められている要素で1、物体を含まない要素で0、それ以外の要素では物体の占める割合に応じ0~1の値をとるVOF関数 $\psi$ を導入する。VOF関数は物体領域 $\Omega$ を包含する設計領域 $\bar{\Omega}$ で定義する。VOF関数は密度関数とみなすことができ、弾性定数テンソルは密度法と同様に次式により $\bar{\Omega}$ 全体で定義された関数に拡張される。

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E} \psi \quad (6)$$

最適化過程における物体領域および境界の移動は、VOF関数 $\psi$ の移流によって実現される。

### 3.2 最適化問題

VOF関数を用いて物体領域を表現する場合、2.2に示した最適化問題は、Lagrange乗数を用い次式のように書き換えられる。

$$\text{Minimize } \bar{J}(\mathbf{u}, \psi) = J(\mathbf{u}, \psi) + \lambda(V - V_{\max}) \quad (7)$$

$$\text{Subject to : } a(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*, \psi) = L(\mathbf{u}^*, \psi), \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ on } \Gamma_u, \text{ for } \forall \mathbf{u}^* \in D \quad (8) \\ \lambda(V - V_{\max}) = 0, \lambda \geq 0$$

ここで、 $\lambda$ は体積制約に関するLagrange乗数であり、式(8)第3式はその項に関する補足条件である。また、各作用素は次式で与えられる。

$$J(\mathbf{u}, \psi) = \int_{\bar{\Omega}} F(\mathbf{u}) \psi \, d\Omega \quad (9)$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*, \psi) = \int_{\bar{\Omega}} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{E} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^*) \psi \, d\Omega \quad (10)$$

$$L(\mathbf{u}^*, \psi) = \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}^* \psi \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u}^* \, d\Gamma \quad (11)$$

$$V = \int_{\bar{\Omega}} \psi \, d\Omega \quad (12)$$

なお、本研究では最適化過程において、ゼロでない表面力 $\bar{\mathbf{t}}$ が規定されている部分境界は移動させず、そこでのVOF関数値を1に固定するものとする。

### 3.3 設計感度解析

VOF 関数の変動による目的汎関数  $\bar{J}$  の感度を導出する。  $\psi$  の変動  $\Delta\psi$  による変位  $\mathbf{u}$  の増分を  $\Delta\mathbf{u}$  とし、これらによる  $\bar{J}$  の増分を  $\Delta\bar{J}$  とする。  $\Delta\bar{J}$  は次式で与えられる。

$$\Delta\bar{J}(\mathbf{u}, \psi) = \Delta J(\mathbf{u}, \psi) + \lambda \Delta V(\psi) \quad (13)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \Delta J &= J(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}, \psi + \Delta\psi) - J(\mathbf{u}, \psi) \\ &= \left\langle \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}}, \Delta\mathbf{u} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial J}{\partial \psi}, \Delta\psi \right\rangle \end{aligned} \quad (14)$$

なお、  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は Fréchet 微分を表す。各項は具体的には以下のように与えられる。

$$\left\langle \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}}, \Delta\mathbf{u} \right\rangle = \int_{\Omega} \frac{dF(\mathbf{u})}{d\mathbf{u}} \cdot \Delta\mathbf{u} \psi \, d\Omega \quad (15)$$

$$\left\langle \frac{\partial J}{\partial \psi}, \Delta\psi \right\rangle = \int_{\Omega} F(\mathbf{u}) \Delta\psi \, d\Omega \quad (16)$$

式 (15) より  $\Delta J$  の評価には  $\Delta\mathbf{u}$  の評価が必要となる。ところで、弾性問題の変分方程式 (式 (8)) より次式が成り立つ。

$$a(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}, \mathbf{u}^*, \psi + \Delta\psi) = L(\mathbf{u}^*, \psi + \Delta\psi) \quad (17)$$

ここで、左右の各項は次のように展開できる。

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}, \mathbf{u}^*, \psi + \Delta\psi) &= a(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*, \psi) \\ &+ \left\langle \frac{\partial a}{\partial \mathbf{u}}, \Delta\mathbf{u} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial a}{\partial \psi}, \Delta\psi \right\rangle + \dots \end{aligned} \quad (18)$$

$$L(\mathbf{u}^*, \psi + \Delta\psi) = L(\mathbf{u}^*, \psi) + \left\langle \frac{\partial L}{\partial \psi}, \Delta\psi \right\rangle + \dots \quad (19)$$

式 (17)~(19) および  $a(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*, \psi) = L(\mathbf{u}^*, \psi)$  より、一次の増分項に対し次式を得る。

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial a(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*, \psi)}{\partial \mathbf{u}}, \Delta\mathbf{u} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial L(\mathbf{u}^*, \psi)}{\partial \psi}, \Delta\psi \right\rangle \\ &- \left\langle \frac{\partial a(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*, \psi)}{\partial \psi}, \Delta\psi \right\rangle \end{aligned} \quad (20)$$

なお、式 (20) の左辺は、次式のように具体的に書き表すことができる。

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial a(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*, \psi)}{\partial \mathbf{u}}, \Delta\mathbf{u} \right\rangle &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\Delta\mathbf{u}) : \mathbf{E} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^*) \psi \, d\Omega \\ &= a(\Delta\mathbf{u}, \mathbf{u}^*, \psi) \end{aligned} \quad (21)$$

したがって、式 (20) より次式を得る。

$$\begin{aligned} a(\Delta\mathbf{u}, \mathbf{u}^*, \psi) &= \left\langle \frac{\partial L(\mathbf{u}^*, \psi)}{\partial \psi}, \Delta\psi \right\rangle \\ &- \left\langle \frac{\partial a(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*, \psi)}{\partial \psi}, \Delta\psi \right\rangle \end{aligned} \quad (22)$$

VOF 関数  $\psi$  の変動による変位の変動  $\Delta\mathbf{u}$  は、式 (22) を満たすものとして与えられる。しかし、 $\Delta\mathbf{u}$  の  $\Delta\psi$

による陽な表現には  $a(\Delta\mathbf{u}, \mathbf{u}^*, \psi)$  の逆作用素 (逆行列) を求めておく必要があり、計算上効率的でない。そこで、 $\Delta\mathbf{u}$  を直接導出することなく、 $\Delta J$  を  $\Delta\psi$  のみで評価する目的で随伴変数法を用いる。

式 (8) 第 1 式に関して、 $\hat{\mathbf{u}}$  を未知量とした次の随伴問題を考える。

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}^*, \hat{\mathbf{u}}, \psi) &= \int_{\Omega} \frac{dF(\mathbf{u})}{d\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}^* \psi \, d\Omega, \\ \hat{\mathbf{u}} &= 0 \text{ on } \Gamma_u \text{ for } \forall \mathbf{u}^* \in D \end{aligned} \quad (23)$$

式 (23) を満たす解  $\hat{\mathbf{u}}$  が一意に求められた後、 $\mathbf{u}^*$  に  $\Delta\mathbf{u}$  を代入すると、式 (15), (22), (23) より次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}}, \Delta\mathbf{u} \right\rangle &= \int_{\Omega} \frac{dF(\mathbf{u})}{d\mathbf{u}} \cdot \Delta\mathbf{u} \psi \, d\Omega \\ &= a(\Delta\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}, \psi) \\ &= \left\langle \frac{\partial L(\hat{\mathbf{u}}, \psi)}{\partial \psi}, \Delta\psi \right\rangle - \left\langle \frac{\partial a(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}, \psi)}{\partial \psi}, \Delta\psi \right\rangle \end{aligned} \quad (24)$$

すなわち、 $\Delta\mathbf{u}$  を直接求めることなく、 $\left\langle \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}}, \Delta\mathbf{u} \right\rangle$  を  $\Delta\psi$  に基づき評価可能となる。なお、式 (24) 第 3 式の右辺は、次式により具体的に与えられる。

$$\left\langle \frac{\partial L(\hat{\mathbf{u}}, \psi)}{\partial \psi}, \Delta\psi \right\rangle = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}} \Delta\psi \, d\Omega \quad (25)$$

$$\left\langle \frac{\partial a(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}, \psi)}{\partial \psi}, \Delta\psi \right\rangle = \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{E} : \boldsymbol{\epsilon}(\hat{\mathbf{u}}) \Delta\psi \, d\Omega \quad (26)$$

また、 $\Delta\psi$  に伴う体積増分  $\Delta V$  は次式で与えられる。

$$\Delta V = \left\langle \frac{\partial V}{\partial \psi}, \Delta\psi \right\rangle = \int_{\Omega} \Delta\psi \, d\Omega \quad (27)$$

以上より、 $\Delta\bar{J}$  は  $\Delta\psi$  を用いた次式の様に表すことができる。

$$\begin{aligned} \Delta\bar{J} &= \left\langle \frac{\partial L(\hat{\mathbf{u}}, \psi)}{\partial \psi}, \Delta\psi \right\rangle - \left\langle \frac{\partial a(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}, \psi)}{\partial \psi}, \Delta\psi \right\rangle \\ &+ \left\langle \frac{\partial J}{\partial \psi}, \Delta\psi \right\rangle + \lambda \left\langle \frac{\partial V}{\partial \psi}, \Delta\psi \right\rangle \\ &= \int_{\Omega} (\beta + \lambda) \Delta\psi \, d\Omega \end{aligned} \quad (28)$$

ここで、

$$\beta = \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{E} : \boldsymbol{\epsilon}(\hat{\mathbf{u}}) + F(\mathbf{u}) \quad (29)$$

### 3.4 VOF 関数の移流速度

VOF 法の様な Euler 座標系による物質境界移動法では、構造物の形状変化を  $\psi$  の移流により記述する。  $\psi$  の移流速度を  $\mathbf{v}$  としたとき、次の移流方程式を得る。

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \text{grad} \psi \quad (30)$$

本手法では、最適化過程で目的関数  $\bar{J}$  が単調減少するように、移流速度  $\mathbf{v}$  を次式により与えるものとする。

$$\mathbf{v} = (\beta + \lambda) \frac{\text{grad}\psi}{|\text{grad}\psi|} \quad (31)$$

最適化ステップにおける時間増分を  $\Delta t$  とすると、式 (30),(31) より、 $\Delta\psi$  は次式により与えられる。

$$\Delta\psi = \frac{\partial\psi}{\partial t}\Delta t = -(\beta + \lambda)|\text{grad}\psi|\Delta t \quad (32)$$

式 (28) に式 (32) を代入すると、 $\Delta\bar{J}$  は次式のようになり、 $\bar{J} + \Delta\bar{J} \leq \bar{J}$  が保証される。

$$\Delta\bar{J} = - \int_{\Omega} (\beta + \lambda)^2 |\text{grad}\psi| \, d\Omega \, \Delta t \leq 0 \quad (33)$$

なお、実際の解析において、 $\text{grad}\psi = 0$  の場合は  $\mathbf{v} = 0$  とした。

また、 $V = V_{\max}$  においては体積保存の条件より、 $\Delta V = 0$  となる。このとき式 (32) より次式を得る。

$$\begin{aligned} \Delta V &= \int_{\Omega} \Delta\psi \, d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} (\beta + \lambda)|\text{grad}\psi| \, d\Omega \, \Delta t = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

以上より、Lagrange 乗数  $\lambda$  の値が次式により定まる。

$$\lambda = - \frac{\int_{\Omega} \beta |\text{grad}\psi| \, d\Omega}{\int_{\Omega} |\text{grad}\psi| \, d\Omega} \quad (35)$$

## 4. CIVA 法による移流計算

式 (30) で表される移流方程式の数値計算において、通常の一次風上差分を用いると、VOF 関数が拡散し中間密度領域が拡大する。なお、高精度な移流計算手法として CIP 法<sup>12)</sup>が挙げられ、四角形要素や六面体要素を対象とした手法が提案されている。本研究では三角形要素および四面体要素の適用を前提に、CIP 法を任意形状の要素に拡張した CIVA 法<sup>16)</sup>を用いる。

時間増分  $\Delta t$  の下、CIVA 法では位置  $\mathbf{x}$  における次ステップでの関数値を、上流側の点  $\mathbf{x} - \mathbf{v}\Delta t$  での関数値により算出する。この計算は、上流側の要素に 3 次多項式補間を導入することで行う。

### 4.1 数値振動の除去

CIVA 法などの高次多項式を用いた移流スキームでは、関数の急変部で数値振動を起こす可能性がある。これを防ぐ目的で関数補間の振動成分にフィルタリング操作<sup>16)</sup>を適用する。

当該手法の概略を以下に述べる。まず、 $n$  ステップ目の VOF 関数節点値  $\psi_i^n (i = 1, \dots, m)$  の最小値と最大値を要素毎に算出する。

$$\begin{aligned} \psi_{\min}^n &= \min(\psi_i^n : i = 1, \dots, m), \\ \psi_{\max}^n &= \max(\psi_i^n : i = 1, \dots, m) \end{aligned} \quad (36)$$

ここで  $m$  は 1 要素当りの節点総数である。

次に、 $n+1$  ステップ目の VOF 関数値  $\psi_i^{n+1}$  を CIVA 法により一時的に計算する。この時、 $\psi_{\min}^n \leq \psi_i^{n+1} \leq \psi_{\max}^n$  が成り立つ場合はその値を採用する。その範囲外にある場合は 3 次多項式を用いずに、1 次補間により関数値を算出する。以上の操作により不合理な数値振動を除去する。

### 4.2 正接関数変換

CIVA 法は高精度なスキームであるが、物体と空間との界面を、少ない有限要素メッシュでより明瞭に表現する目的で正接関数変換<sup>18)</sup>を採用する。

まず、式 (30) の  $\psi$  を次式で  $T(\psi)$  に変換する。

$$T(\psi) = \tan \left[ \pi \left( \psi - \frac{1}{2} \right) (1 - \epsilon) \right] \quad (37)$$

ここで、 $\epsilon$  は微小な正のパラメータであり、 $\psi = 1, 0$  に対して  $T = \pm\infty$  となる数値計算上の問題を回避する目的で用いる。なお、以下の計算では  $\epsilon = 1.0 \times 10^{-4}$  とした。

式 (30) より、 $T(\psi)$  の移流方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial T(\psi)}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \text{grad}T(\psi) \quad (38)$$

CIVA 法による移流計算には式 (38) を用い、有限要素解析の際は次式で逆変換して求めた  $\psi$  を用いる。

$$\psi = \frac{\arctan F(\psi)}{[\pi(1 - \epsilon)]} + \frac{1}{2} \quad (39)$$

### 4.3 VOF 関数の再初期化

移流計算を進めると、以上に述べたスキームを用いても VOF 関数が次第に拡散し、0 ~ 1 の中間値をとる領域が拡大する恐れがある。これを防ぐ目的で、VOF 関数の再初期化を適切な計算ステップ毎に行う<sup>10)</sup>。再初期化のアルゴリズムは以下のとおりである。

1. 適当な閾値に基づき、節点で定義されている VOF 関数を 0 と 1 に 2 値化し、VOF 関数の勾配を 0 に再初期化する。なお、以下の解析では閾値を 0.5 とした。
2. 2 値化された節点の VOF 関数値を用いて、要素重心での VOF 関数値を算出する。
3. 要素重心で定義された VOF 関数値に、体積 (面積) で重みを付け、再度節点に分配する。

節点値の再配分により、要素単位で見ると中間値を持つものも存在することとなるが、VOF 関数の拡散は大幅に改善されることとなる。

### 4.4 時間増分 $\Delta t$ の設定

移流計算における時間増分  $\Delta t$  は、数値的な安定性を確保するために、十分小さく設定する必要がある。しかしながら、必要以上に小さな時間増分の設定は、多くの計算ステップ数を必要とするため、解析効率の観点から望ましくない。さらに、感度解析を実行するステップ毎に、移流速度  $\mathbf{v}$  の値は異なる。そのため本研

究では、第  $n$  ステップにおける時間増分  $\Delta t^n$  を次式により動的に設定する<sup>10)</sup>。

$$\Delta t^n = \frac{ch_{\min}}{|v^n|_{\max}} \quad (40)$$

ここで、 $c$  は定数 (クーラン数) であり、 $h_{\min}$  は要素の最小代表長、 $|v^n|_{\max}$  は第  $n$  ステップにおける移流速度の絶対最大値である。

## 5. コンプライアンス最小化問題

以下の解析例では、トポロジー最適化問題の具体例として、コンプライアンス最小化問題を対象とする。このとき  $J(\mathbf{u}, \psi)$  は次式で与えられる。

$$J(\mathbf{u}, \psi) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{E} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \psi \, d\Omega \quad (41)$$

すなわち、式 (4) の  $F(\mathbf{u})$  は次式となる。

$$F(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{E} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \quad (42)$$

よって、

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}^* &= \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^*) : \mathbf{E} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{E} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^*) \\ &= 2\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{E} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^*) \end{aligned} \quad (43)$$

したがって、

$$\int_{\Omega} \frac{dF(\mathbf{u})}{d\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}^* \psi \, d\Omega = \int_{\Omega} 2\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{E} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^*) \psi \, d\Omega \quad (44)$$

以上より、随伴問題を与える式 (23) は次式となる。

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\hat{\mathbf{u}}) : \mathbf{E} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^*) \psi \, d\Omega = \int_{\Omega} 2\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{E} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^*) \psi \, d\Omega \quad (45)$$

任意の  $\mathbf{u}^*$  に対する式 (45) の解として次式を得る。

$$\hat{\mathbf{u}} = 2\mathbf{u} \quad (46)$$

式 (46) より、式 (24) および式 (29) の  $\beta$  は次式となる。

$$\left\langle \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}}, \Delta \mathbf{u} \right\rangle = \int_{\Omega} \{2\mathbf{b} \cdot \mathbf{u} - 2\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{E} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})\} \Delta \psi \, d\Omega \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \beta &= 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{u} - 2\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{E} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) + F(\mathbf{u}) \\ &= -\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{E} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) + 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \quad (48)$$

よって、当該問題では随伴問題を改めて解く必要がなく、変位解  $\mathbf{u}$  のみにより最適計算を実施することができる。

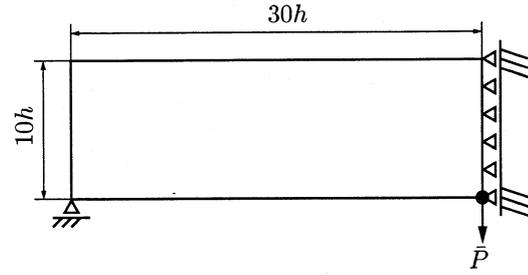
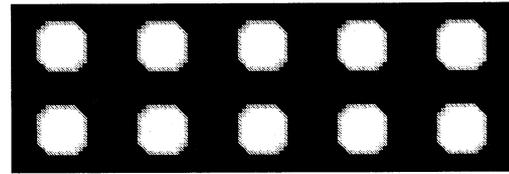
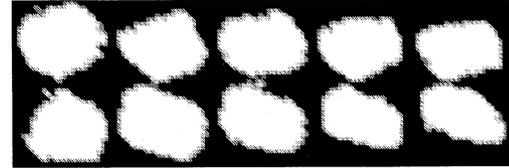


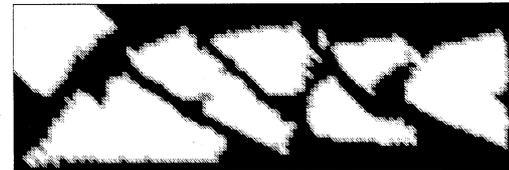
図-1 解析条件 (アスペクト比 1:6 の二次元単純ばり)



(a) 0 ステップ



(b) 200 ステップ



(c) 400 ステップ



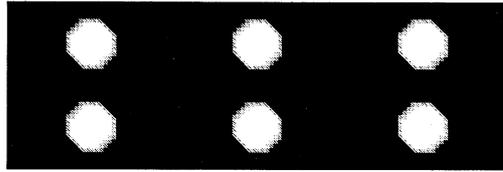
(d) 1000 ステップ

図-2 初期トポロジーおよび最適化過程 (アスペクト比 1:6 の二次元単純ばり, 10 個の初期空洞)。

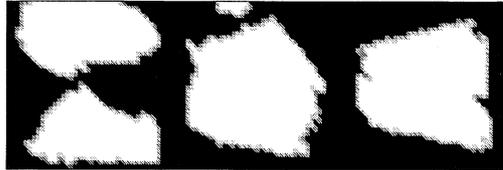
## 6. 解析例

解析例として、等方均質弾性体を対象に、3つのコンプライアンス最小化問題を取り上げる。なお、全ての解析において物体力は作用しないものとし、ポアソン比は 0.3 とする。二次元場を対象とした解析例では、平面応力問題を仮定する。また、求解方程式の安定化を図る目的で、物体が存在しない要素の VOF 関数値を  $1.0 \times 10^{-4}$  と設定する。

なお、level set 法を用いた解析例においては、1 回の



(a) 0 ステップ



(b) 500 ステップ

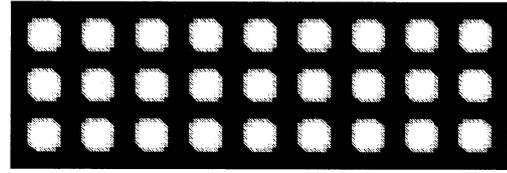


(c) 1000 ステップ

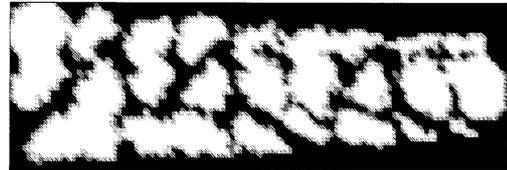


(d) 1500 ステップ

図-3 初期トポロジーおよび最適化過程 (アスペクト比 1:6 の二次元単純ばり, 6 個の初期空洞).



(a) 0 ステップ



(b) 200 ステップ



(c) 300 ステップ



(d) 1000 ステップ

図-4 初期トポロジーおよび最適化過程 (アスペクト比 1:6 の二次元単純ばり, 27 個の初期空洞).

感度解析に基づき、複数ステップの移流計算を実行している例<sup>19)</sup>もある。しかし、以下の適用例では基本的な性能を確認する目的で、1回の感度解析毎に1ステップの移流計算のみ実行する。また、一般には最適化過程の収束状況に基づき計算の終了判定を行うが、ここでは提案手法の有効性の検証が目的であるため、単に反復回数を規定する方法を採った。

### 6.1 アスペクト比 1:6 の二次元単純ばり

下端中央に鉛直荷重  $\bar{P} = P/Gh = 1$  が作用するアスペクト比 1:6 の単純ばりを考える。ここで、 $G$  はせん断弾性係数であり、 $h$  は要素の代表長である。解析に当たり、対称性を考慮して左半分の領域のみ離散化する(図-1)。設計領域は  $30h \times 10h$  とし、三節点三角形要素を用いて節点数 4961・要素数 9600 で分割した。許容最大材料面積は領域面積  $V_0$  の 50% とした。また、再初期化は 50 ステップ毎に行い、移流計算のクーラン数は  $c = 0.5$  とした。

初期トポロジーとして、図-2(a)に示すように 10 個の空洞を設定した。図 2(b)-(d)に最適化の過程を示す。黒色部分が物体が存在する要素 (VOF 関数値=1.0)、白色

部分が物体が存在しない要素 (VOF 関数値= $1.0 \times 10^{-4}$ ) である。物体境界が明瞭に捉えられており、最終的にトラス状の構造物に収束していることが確認できる。

Level set 法や VOF 法を用いた場合、初期トポロジーの設定が最終形状に影響を及ぼすことが知られている<sup>6),10)</sup>。この影響を調べる目的で、図-1と同じ解析条件の下で、2つの異なる初期トポロジーを設定して解析を行った。図-3は、初期トポロジーとして 6 個の空洞を設定したものである。最終的には図-2よりも部材数の少ないトラス形状に収束している。一方、図-4は、初期トポロジーとして 27 個の空洞を設定したものである。最終的には図-2とほぼ同一の形状に収束していることが確認できる。これらの結果から、初期トポロジーに十分な数の空洞を与えることで、同一トポロジーへの安定な収束が確保できることがわかる。

図-5に最適化過程における無次元化コンプライアンス  $\tilde{J} = J/Gh^2$  の変化を、また図-6に物体面積比  $V/V_0$  の変化をそれぞれ示す。初期の段階で物体面積は速やかに許容値以下に収束し、その過程で一旦  $\tilde{J}$  が急激に増加している。その後、最適なトポロジーに近づくに従って  $\tilde{J}$  は減少し、一定値に収束している。図-5より、

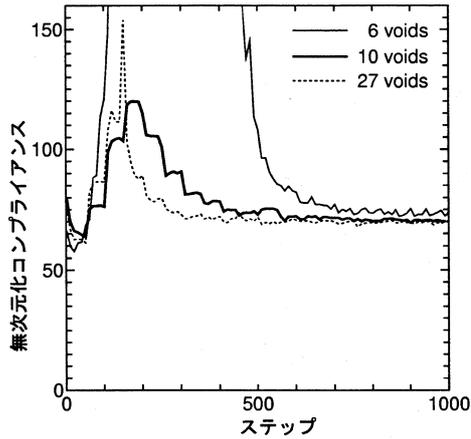


図-5 目的関数の変化。(二次元アスペクト比 1:6 の二次元単純ばり)

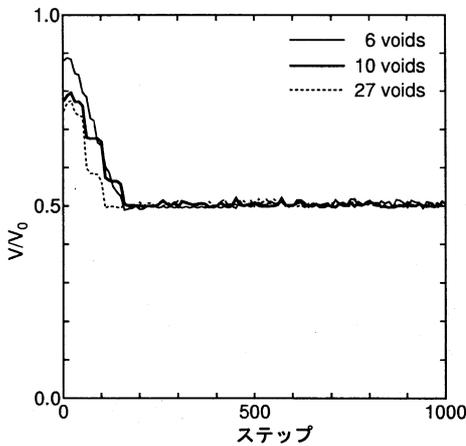
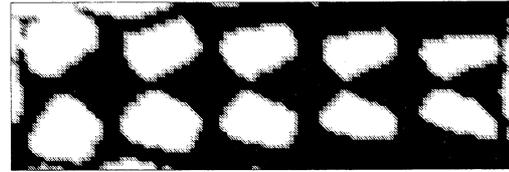


図-6 部材面積の変化。(二次元アスペクト比 1:6 の二次元単純ばり)

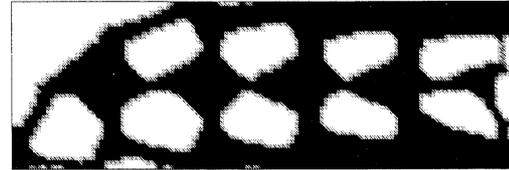
初期空洞を 10 個および 27 個設定したものは、ほぼ同じ目的関数値に収束している。一方、初期空洞が 6 個の場合、他に比べて幾分大きめの値に収束した。また、初期トポロジーに空洞が少ない場合、収束に多くのステップ数を必要とする傾向が認められる。これらの結果より、一般に十分な数の空洞を初期トポロジーに与えることで、収束性や得られるトポロジーの性質が改善されるものと思われる。なお、目的関数や物体面積が一定のステップ間隔で急変動しているのは、VOF 関数の再初期化によるものであり、その際にコンプライアンスも変動している。

## 6.2 正接関数変換の効果

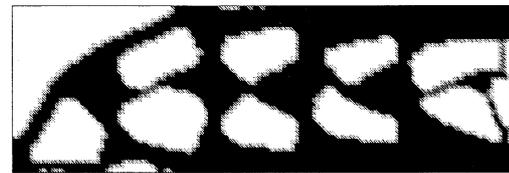
正接関数変換の効果を確認する目的で、当該変換を用いない場合の解析結果を示す。前節のアスペクト比 1:6 の二次元単純ばりを対象とし、正接関数変換の有無以外は、全て同条件に設定した。初期トポロジーは、図-2(a) に示した 10 個の空洞のものを用いた。



(a) 200 ステップ



(b) 500 ステップ



(c) 1000 ステップ

図-7 最適化の過程 (正接関数変換を用いないアスペクト比 1:6 の二次元単純ばり)。

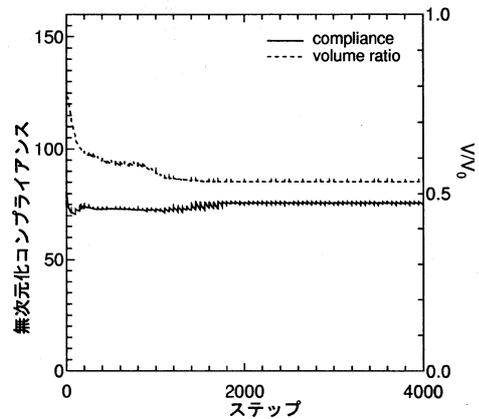


図-8 目的関数と物体体積の変化。(正接関数変換を用いないアスペクト比 1:6 の二次元単純ばり)

図 7(a)–(c) に最適化の過程を示す。200~1000 ステップにおいて、トポロジーがほとんど変化していない様子が認められる。なお、4000 ステップの最適化計算を経ても、形状の変化はほとんど見られなかった。

図-8 に無次元コンプライアンス  $\bar{J}$  と物体面積比  $V/V_0$  の最適化過程における変化の様子を示す。物体面積は許容値にまで達していない。また、 $\bar{J}$  にもほとんど変化が認められない。

なお、トポロジー変化の停滞は、再初期化間隔を適宜調節することでいくらか改善される場合があったが、結果は再初期化間隔に強く依存し、一定の傾向は認め

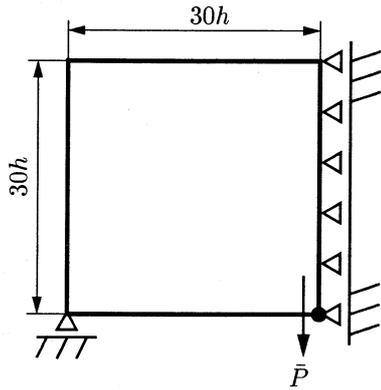


図-9 解析条件 (アスペクト比 1:2 の二次元片持ち梁)

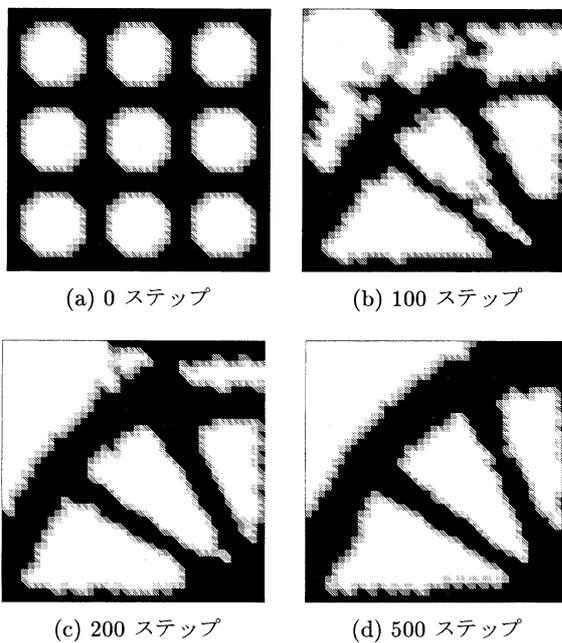


図-10 初期トポロジーおよび最適化過程 (アスペクト比 1:2 の二次元片持ち梁, 40 × 40 分割).

られなかった。

当初、物体境界のさらなる明瞭化の目的で正接関数変換を採用した。しかし、以上に示した様に、その理由は明らかではないが、当該手法の併用がトポロジー最適化過程の促進に有効であることがわかった。

### 6.3 アスペクト比 1:2 の二次元単純ばり

下端中央に鉛直荷重  $\bar{P} = 1$  が作用するアスペクト比 1:2 の単純ばりを考える。解析に当たり対称性を考慮して左半分の領域のみ離散化し、設計領域を  $40h \times 40h$  と設定した (図-9)。また、許容最大材料面積は領域の 50% とした。再初期化は 20 ステップ毎に行い、移流計算のクーラン数は  $c = 0.5$  とした。初期トポロジーとして、9 個の空洞を与えた。

有限要素解析を用いてトポロジー最適化を行う場合、結果が要素分割数に依存することがある。本手法にお

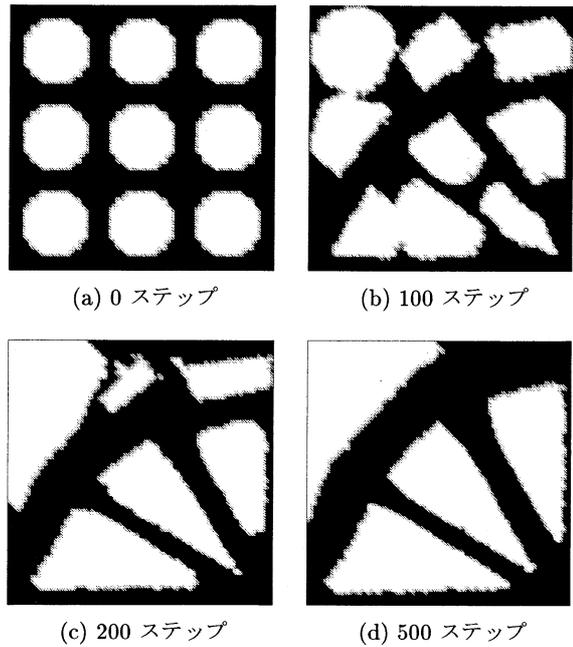


図-11 初期トポロジーおよび最適化過程 (アスペクト比 1:2 の二次元片持ち梁, 80 × 80 分割).

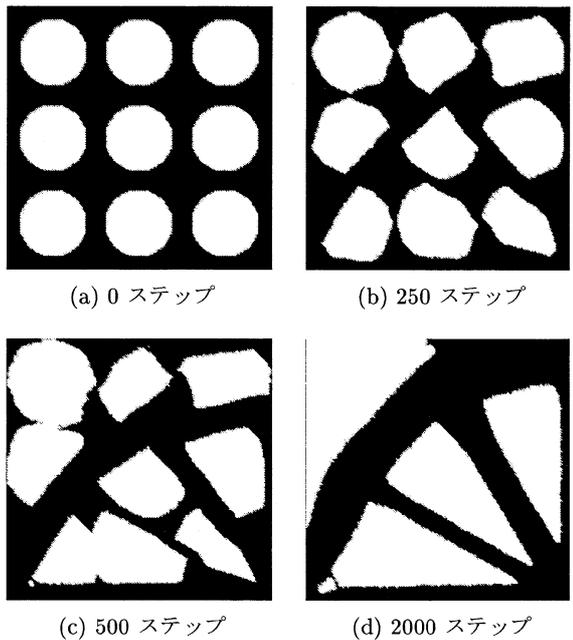


図-12 初期トポロジーおよび最適化過程 (アスペクト比 1:2 の二次元片持ち梁, 160 × 160 分割).

ける当該問題の有無を検証する目的で、要素分割数の異なるメッシュを用いて解析を行う。節点数 1681・要素数 3200 (40 × 40 分割)、節点数 6561・要素数 12800 (80 × 80 分割)、節点数 25921・要素数 51200 (160 × 160 分割) の 3 ケースに対する初期トポロジーと最適化過程を各々図-10、図-11、図-12 に示す。なお、分割は全て三節点三角形要素を用いて行った。

当然のことながら解像度が高い程、物体境界が明瞭

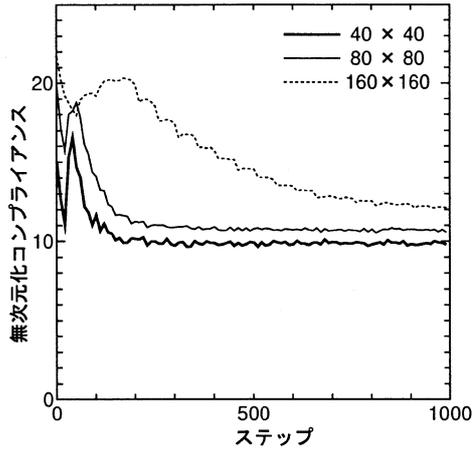


図-13 目的関数の変化。(アスペクト比 1:2 の二次元片持ち梁)

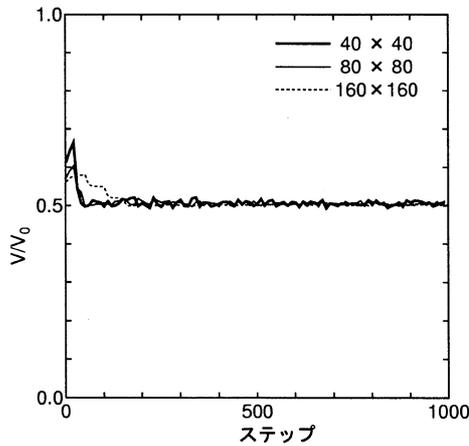


図-14 部材面積の変化。(アスペクト比 1:2 の二次元片持ち梁)

に捉えられている。しかし、少なくとも本解析例においては、収束後のトポロジー自体に差異は認められない。

図-13に最適化過程における $\bar{J}$ の変化を、図-14に物体面積比の変化をそれぞれ示す。目的関数は概ね10~12前後に収束している。なお、それらの差異は有限要素解の近似精度の違いによるものと思われる。最も解像度の高い160×160分割の例では、収束に多くのステップ数を費やしている。これは、要素が小さいため、移流計算における1ステップ当たりの移動量が相対的に小さな値に制限されたためである。なお、本研究では、1回の感度解析に基づき1ステップの移流計算を行った。計算効率の観点からは、移流計算を複数ステップ行うことが望ましいと考えられる。

一方、材料面積の変動には要素分割数の影響が多少認められるものの、比較的初期の段階で許容面積に達しており、いずれの解像度においてもその収束性は速やかである。

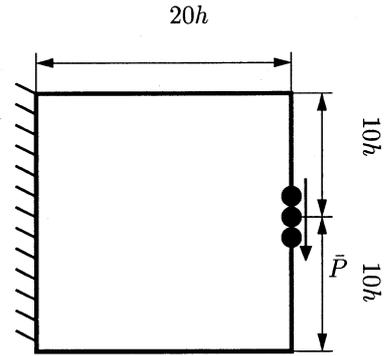


図-15 解析条件(三次元片持ち梁)

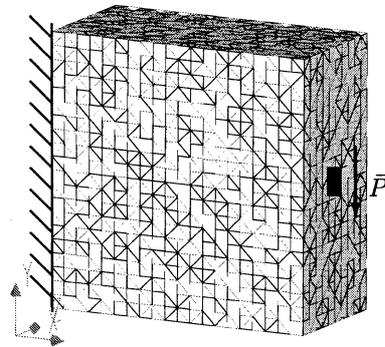


図-16 有限要素分割。(三次元片持ち梁)

#### 6.4 三次元片持ち梁

図-15に示すように左端を固定し、右端中央部に鉛直荷重 $\bar{P} = P/Gh^2 = 1.0$ を作用させた三次元片持ち梁を考える。設計領域は $20h \times 20h \times 10h$ とし、四節点四面体要素を用いて節点数4851・要素数20000で分割した(図-16)。また、許容最大体積は領域体積の20%、再初期化は10ステップ間隔とし、クーラン数は $c = 0.2$ とした。

図-17(a)に示すように、表面に18個の凹みを設けた初期トポロジーを設定した。図-17(b)-(d)に最適化過程を示す。最終的には2部材トラスに収束している。

図-18に最適化過程における無次元コンプライアンス $\bar{J} = J/Gh^3$ と物体体積比の変化を示す。50ステップ目以降、 $\bar{J}, V/V_0$ 共に大きな変動は見られず、速やかに収束しており、三次元問題に対しても本手法が適切に機能している様子が確認できる。

#### 7. おわりに

本研究では、VOF法を用いたトポロジー最適化手法を三角形および四面体要素に拡張し、具体的な数値解析を通してその有効性を確認した。

提案手法では物体領域の定義にVOF関数を用い、トポロジー変化をその移流で表現している。本研究では

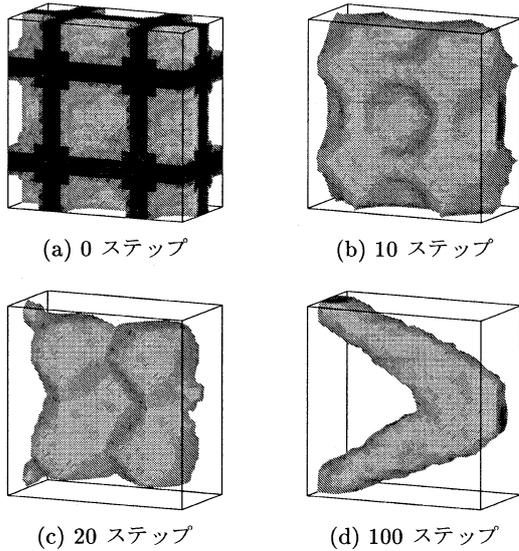


図-17 初期トポロジーおよび最適化過程 (三次元片持ち梁).

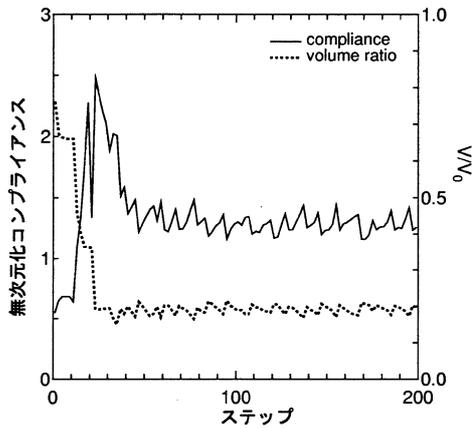


図-18 目的関数と物体体積の変化. (三次元片持ち梁)

三角形および四面体要素の適用を前提に、その移流計算に際し、CIP法を任意座標系に拡張したCIVA法を用いた。CIVA法は高精度なスキームであるが、物体境界をより明瞭に表現する目的で、正接関数変換を併用した。この操作は数値計算上、非常に簡単に組み込むことができるが、適切なトポロジー変化の促進に極めて有効であることがわかった。

また、初期トポロジーが最終トポロジーに影響を及ぼす場合が認められた。設計領域に対して比較的少ない初期空洞を設定した場合、収束性の低下や、トポロジーの局所解への収束などが懸念される。これらの問題点の改善には、level set法<sup>7)</sup>と同様に十分な数の初期空洞の設定が必要である。

本研究では、二次元および三次元の線形弾性問題を対象として具体的な解法を構成した。今後、提案手法を非圧縮超弾性体の大変形問題に拡張することを検討している。なお、非圧縮性物質の安定化解析において、本研究で検討した定ひずみ要素の採用は定式化を容易

にし、安定化を図る上で有効になるものと考えている。

#### 参考文献

- 1) Bendsøe, M.P. & Kikuchi, N.: Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Compt. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **71**, 197-224, 1988.
- 2) Eschenauer, H.A. & Olhoff, N.: Topology optimization of continuum structures: A review, *Appl. Mech. Rev.*, **54**, 4, 331-390, 2001.
- 3) Sigmund, O.: Materials with prescribed constitutive parameters: An inverse homogenization problem, *Int. J. Solids Struct.*, **31**, 2313-2329, 1994.
- 4) Matsui, K. & Terada, K.: Continuous approximation of material distribution for topology optimization, *Int. J. Numer. Meth. Engrng.*, **59**, 1925-1944, 2004.
- 5) Bendsøe, M. P. & Sigmund, O.: Material interpolation schemes in topology optimization, *Arch. Appl. Mech.*, **69**, 635-654, 1999.
- 6) Allaire, G., Jouve, F. & Toader, A-M.: A level set method for shape optimization, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I*, **334**, 1125-1130, 2002.
- 7) Wang, M. Y., Wang, X. & Guo, D.: A level set method for structural topology optimization, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **192**, 227-246, 2003.
- 8) Kwak, J & Cho, S.: Topological shape optimization of geometrically nonlinear structures using level set method, *Compt. Struct.*, **83**, 2257-2268, 2005.
- 9) Susman, M., Smercea, P. & Osher, S.: A level set approach for computing solutions for incompressible two-phase flow, *J. Comput. Phys.*, **114**, 146-159, 1994.
- 10) Abe, K. & Kouro, K.: A topology optimization approach using VOF method, *Struct. Multidisc. Optim.*, **31**, 470-479, 2006.
- 11) Hirt, C. W. & Nichols, B. D.: Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries, *J. Comput. Phys.*, **39**, 201-225, 1981.
- 12) Yabe, T.: A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation: I. One-dimensional solver, II. Two- and three-dimensional solvers. *Comput. Phys. Commun.*, **66**, 219-242, 1991.
- 13) 紅露一寛, 阿部和久, 西宮裕騎: 軌道防振用ゴムパッドの大変形応力解析, 土木学会鉄道力学論文集, 第9号, 7-12, 2005.
- 14) 渡辺浩志, 久田俊明: 超弾性体の混合型有限要素解析に関する基礎的検討, 日本機械学会論文集 (A 編), 62 巻 595 号, 745-752, 1996.
- 15) Klaas, O., Maniatty, A. & Shephard, M. S.: A stabilized mixed finite element method for finite elasticity, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **180**, 65-79, 1999.

- 16) Tanaka, N.: Development of highly accurate interpolation method for mesh-free flow simulations III. Analysis of accuracy and stability, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **41**, 675–694, 2003.
- 17) Tanaka, N.: Development of a highly accurate interpolation method for mesh-free flow simulations I. Integration of Gridless, Particle and CIP Methods, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **30**, 957–976, 1999.
- 18) Xiao, F.; Yabe, T.; Ito, T. & Tajima, M.: An algorithm for simulating solid objects suspended in stratified flow, *Compt. Phys. Commun.*, **102**, 147–160, 1997.
- 19) Allaire, G., Jouve, F. & Toader, A. M.: Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method, *J. Comput. Phys.*, **194**, 363–393, 2004.

(2006年4月13日 受付)