RLAに基づく数学授業において目指す問題解決的活動の質
－中学校３年「式の計算の活用」の授業を事例として－

The Quality of Problem Solving Activities in a Mathematics Class based on RLA：
A Case Study in a Junior High School Class about Calculation of Expressions and Proof.

井　口　　　浩

１　はじめに

RLAとは，市川伸一氏（1996）によって提唱されたResearcher-Like Activityの略称である。同氏は，その基本的なコンセプトは「研究者の活動の縮図的活動を学習の基本形態とする」，そして，「縮図的活動」は，本物の研究者の活動を，学習者のレベルに合わせて模擬したものであると述べている[1)]。それを受け，かつて故新潟大学名誉教授金子忠雄氏はRLAの内実をとらえ研究者の活動の核心的部分や教育的配慮を含む活動を展開するのであれば「研究者の研究活動に準ずる活動」と呼ぶ方が相応しいと提言していた（附属長岡中学校研究紀要，1999）[2)]。RLAは，全国的に普及しているとは言い難いが，今求められている能動的かつ探究的な学習を具現する重要なレパートリーの１つとなると考えられる。

２　本稿の目的及び射程

RLAを中学校や高等学校の数学授業に取り入れることは，生徒の主体的な数学学習に有効に働くということが報告されている。その主体性は，生徒が問題を見付けて取り組む場面や，ポスターセッションにおける説明や質疑応答，修正の場面等で見られている（狩俣, 1996. 青木, 伊禮, 2013.）[3) 4)]。服部，井上(2015)は，生徒同士の査読評価活動を組織することによる成果を，クリティカルシンキングの育成の観点から得ている[5)]。ただし，生徒同士の相互作用自体はあまり対象とされず，その観点からの知見は必ずしも明らかとはいえない。

それでは，そのような生徒の主体性は，RLAに基づく数学授業の中で，どのように出現するのだろうか。生徒の主体性は，問題解決的な活動の質と深く関係していると思われるが，RLAを数学授業に取り入れることは，授業の質をどの程度求めることになるのか？目指す問題解決的活動の質を保証するために必要な要素は何か？これらの問いに対して，生徒の相互作用の観点から，現実的かつ具体的な回答を提出することが本稿の目的である。これにより，多くの数学科教師にとって，今後一層求められるアクティブ･ラーニングの理念を具現することに対し，重要な示唆が得られると考える。

本稿では，新潟大学教育学部附属長岡校園の研究協議会（2015.5.27）における中学３年数学の公開授業を対象とする。その授業は筆者が「式の計算の活用」単元にRLAを取り入れ，グループ学習を位置付けて実践したものである。グループの様子を見ていると，生徒が自ら選んだ問題に対し文字式によって証明を記述し，その問題を解決したと思われたが，結論として導かれている式の意味を説明する必要性を示唆する発言（プロトコル18）が生徒Otaによって自発的になされていた。生徒のこの発言の意味とこの発言がどのようにして実現されたかを明らかにすることは，通常の授業はもちろんのこと，RLAに基づく数学授業の構成を考え，広い意味での証明の意義理解を促すための重要な示唆が得られると考える。したがって，次の３点を本稿の射程とする。

①　文字式により証明された式の意味の説明の必

2016.6.21　受理

要性を示唆する生徒Otaの発言（プロトコル18）の意味を明らかにすること

② ①のような生徒の発言が生じるために必要と考えられる要素を明らかにすること

③ ①②を基に，RLAに基づく数学授業として理想的かつ実現可能な問題解決的活動の質を示すとともに，それを具現するために必要と考えられる要素を明らかにすること

３　理論的視座

3.1　教授学的シツエーションモデル

算数･数学の授業における問題解決的な授業の質をとらえるための枠組みとして，「教授学的シツエーションモデル（Didactical Situation Model）」（以下DSMと略）を援用する。このモデルは，算数･数学の授業における集団思考の場に焦点を当て，生徒と環境（問題）との相互作用を，目標，解決方法の選択，解決方法の使用，結果の妥当性の判断の観点から，教師がどの程度コントロールしているか，生徒がどの程度コントロールを担っているかについて分析して，算数･数学の問題解決的な授業の質をとらえることが可能だからである。その概要を以下に示す（井口，桑原，岩崎，2011, pp.106-108.）[6]。

「教授学的シツエーションモデル（DSM）」

４つの変数の組（G，CM，UM，J）で，授業場面の特徴をとらえる。それぞれの変数は，以下のレベルをコントロールする主体である。

G　:（Goal）**問題解決の目標レベル**

CM:（Choice of Method）**解決方法の選択レベル**

UM:（Use of Method）**解決方法の使用レベル**

J　:（Judgement）**結果の妥当性の判断レベル**

授業は何らかの問題が出され一応の解決がなされると，新たな問題が出されて展開するため，基本的に，場面分けは，問題解決活動のまとまりごととする。それぞれの変数は，授業者Tか子どもSかとなり，それを判定できない場合は＊とする。４つの変数（G，CM，UM，J）のそれぞれを判定した結果は，例えば，（T，T，S，T）というように，上記変数と対応付けて表すこととする。

このモデルは，もともと，Mellin-Olsen(1991)が教授学的場面における知識のコントロールのレベルを同定し分析するために用いているモデル[7]を，日本の算数･数学授業の分析に合うように，問題解決の結果の妥当性の判断を変数に加えてとらえ直したものである。日本の場合，多くの算数･数学の授業において，問題解決の途中や最後に教師がまとめることがよく起こる（Stigler, Hiebert, 1999.）[8]。その場合，判断Jをコントロールする主体はTである。このことは，授業における教師と生徒との間に暗黙の社会的関係があることと関わっていて，そのような社会的関係は，「教授学的契約」の１つといえる（Brousseau,G., 1997.）[9]。上述の場合，教師によるまとめ行為を当然のごとく教師は遂行し生徒は受容する，その行為を生徒は期待し教師は期待されるという関係である。そのため，教室における教師と生徒及び生徒同士の相互作用を観点に，最終的に変数JがTなのかSなのかをとらえるためには，生徒と教師の両方の視点から慎重に分析する必要がある。そこで，その判定に，岩崎，Steinbring(2009)の「教室における多様な‘まとめ’の型」（表1）[10]を援用し，教師による‘まとめ’の場合はT，生徒による‘まとめ’の場合はSとすることとする。

表1　教室における多様な‘まとめ’の型（要約）

教師による‘まとめ’	生徒による‘まとめ’
Ⅰ型：教師が専門的な言葉を使って数学的な説明をし，完全で詳細な数学的要約を提示する。	Ⅲ型ｂ：教師と生徒との閉じた相互作用（質問・解答）の中で数学的要約を作りあげ，生徒の説明で終わる。
Ⅱ型：Ⅰ型の省略形で，生徒の数学的な発言や発表に対して，教師が数学的説明の正しさを保証する短い補足をする。	Ⅳ型：生徒が自身の記述言葉を使って数学的な説明を自ら最後まで行い，詳細な数学的要約を作り出す。
Ⅲ型ａ：教師と生徒との閉じた相互作用（質問・解答）の中で数学的要約を作りあげ，最終的には教師の数学的に正しい説明で終わる。	Ⅴ型：Ⅳ型の省略形で，生徒が自身の記述言葉を使って説明し，短い要約をする。

生徒主体の授業が実現されている最も理想的な状況は，DSMで見ると，目標G，方法選択CM，方法使用UM，判断Jのすべてのレベルをコントロール

している主体が生徒Sの場合であるから，（G，CM，UM, J）＝（S, S, S, S）である。井口，桑原，岩崎(2011)は，この理想的な状況が，Brousseau(1997)のいう「亜教授学的状況」（adidactical situation；生徒は教師の期待を探るのではなく，自分で問題に働き掛けて数学をしている，教師は黒子的な役割を担いあたかも不在であるかのようになっている状況）[9]と合致することを論じている。また，Balacheff(1990)による「知的責任」の概念[11]を援用すれば，先記４つすべてのレベルにおいて生徒が知的責任を担っている状況であることも論じている[6]。授業は，教師が教えるねらいと内容をもって進められるため，通常は教師が知的責任を担っている状況であり，教師の働き掛けに伴い，知的責任が教師から生徒へ徐々に移り，先述の理想的な状況が出現し得るものと考えられる。そのため，DSMの変数は，たいていの場合Tと考え，問題提起，議論点や方法の提出，異議や修正などが生徒（それは１人による場合もあれば複数による場合もある）によって実現されている場合にSとする。

本研究では，グループにおける集団思考の場に焦点を当て，その活動の質をDSMで分析する。その際，次の点に留意する。

- 「非教授学的状況」（non-didactical situation）としない，つまり教師はグループ活動に対して意図的な何らかの働き掛けを想定していること
- 分析対象がクラスかグループかを区別するために，グループの場合は次のように表記すること
  例）グループ１を対象とする場合
  gr １（G，CM，UM，J）＝（T，T，S，T）

3.2 証明の機能

対象とする授業は中学３年における単元「式の計算の活用」であり，文字式による証明はその重要な学習内容の１つである。de Villiers(1990)は，証明には以下の５つの機能があるとしている[12]。

- 「立証」…命題の真に関係すること
- 「説明」…命題が真である理由について洞察を与えること
- 「体系化」…多様な結果を公理，主要概念，定理から成る演繹的体系に組織化すること
- 「発見」…新しい結果を発見･生成すること
- 「コミュニケーション」…数学的知識を伝達すること

当該学年の本単元にRLAを取り入れるのは，授業者（井口）にとって，生徒が自ら命題を予想しそれが成り立つことを文字式により演繹的に説明し一般化することへ向かってほしいという願いがあるからである。その一方で，RLAでは，生徒が自分なりに探究し理解を深め数学を創り上げることが一層重要となるため，文字式による形式的証明でなくとも，数学の内容や生徒の理解状態等に応じて推論を価値付ける視野の広さは必要であるとも考える。

命題のもつ一般性を強調し，学校数学における形式的証明を実行するということは，「立証」の機能に軸を置くこととなる。一方，数学の内容や生徒の理解状態等に応じて，後述の前形式的証明も十分に考慮するということは，「説明」の機能も追究に位置付けることとなる（梅川，2005）[13]。扱う数学的関係や活動の組織の仕方によっては，証明の機能のどれもRLAに位置付けられるかもしれないが，本稿では，主に「立証」及び「説明」に着目する。

3.3 文字式による論証指導に対する示唆

証明の「立証」という機能を授業に位置付けるためには，授業にどのような視点を組み込むことが必要であろうか。国宗(1991)は，中学校数学における文字式による論証指導に対して７つの示唆を与えている[14]。その中で，授業者（井口）が当該学年の授業において特に必要だと考えて注目したのは，「帰納的に確かめそれを証明するという過程の重視」と「命題のもつ一般性の強調」である。

１点目は，小学校での学習においては，帰納的に確かめたことがそのまま命題へと一般化されたのに対し，中学校ではそれだけに終わらずに，文字の使用によりその命題が一般的に成り立つことを示す学習方法をとること，及びその意義をとらえさせるための指導を明確に位置付けることである。その際，命題を発見的に提示すれば，一層その意味がよくとらえられるという。２点目は，取り扱う命題が与えられた条件を満足する個々の場合全てに通用する，ということについて議論しとらえさせることである。

3.4 前形式的証明の教育的意義に関する示唆

授業で証明の「説明」という機能を位置付けるのは，形式的でない点にも意義や価値があるからである。國本(1992)は，ドイツの数学教育における証明の社会学的見方による議論を中心に考察し，形式や一般性の観点から必ずしも厳密とはいえないが，一連の推論は妥当で，そのように根拠に基づいて命題が成り立つことを説明することを前形式的証明と

し，その類型を次の４つとしている[15]。

・「操作的証明」…具体的に与えられた，範例的で属に通用する例に対する具体的行動から成立する証明
・「幾何的-直観的証明」…幾何的概念，面積とその性質のような直観的に明らかな事実を参照する証明
・「現実に方向づけられた証明」…現実に意味があり，学習者にたやすく受け入れられるようなアイデアを用いる証明
・「範例による証明」…モデルあるいは範例による証明

さらに，同氏は，これらの前形式的証明を学校数学で扱う教育的意義を６つに要約している。その１つに，前形式的証明が形式的証明を生成したり，納得･確信させたりする効果があり，形式的証明に対して直観的支えを提供することができるという意義がある。ただし，証明を発見･理解する場合，前形式的証明の方が形式的証明よりも易しいとは必ずしもいえないことを含んでおく必要があるという。

小松(2014)は，前形式的証明を形式的証明の前段階というよりも対等な価値があるとする立場から，操作的活動が形式的証明の生成に機能すること等を理論と実践の両面から議論している[16]。

佐々(2015)は，操作的証明に焦点を当て，ANNA数を題材とした授業を基に，上述の國本(1992)が示唆している前形式的証明の教育的意義として，文字式による証明に慣れていない生徒が形式的証明の一般性の意義を理解する助けとなることを示している。ただし，操作的証明そのものの構想や構成，及び形式的証明への移行に関しては，生徒の素地的経験や教師による方向付けが必要であり，具体レベルでの検証を課題としてあげている[17]。

一方，本稿で取りあげる生徒Otaは，自ら問題を選択して考え，文字式で証明を記述した上で，証明された結論の式の意味を説明する必要性を示唆する発言をしている。そのため，代数的表現や形式的証明に慣れていないわけではない，それらがある程度できる生徒にとっても，前形式的証明が自ら行った形式的証明を振り返らせ，そこで用いた代数的表現や式変形の意味理解の助けになる，ということに着目する。なお，本稿でいう形式的証明は，中学校数学の教育的立場からとらえたレベルのものを指す。

3.5 生徒が証明の意味や意義を理解している状態

中学３年における単元「式の計算の活用」にRLAを取り入れるということは，生徒が命題を証明することに対し，通常の授業以上に自律性を求めることとなる。そうでなければ，生徒の研究とはならないからである。したがって，生徒が自ら命題を証明するためには，生徒が証明の必要性を理解している必要がある。さらに，生徒が証明の必要性を理解するためには，証明の意味や意義を理解している必要がある。なぜなら必要とする事柄がどういうものであるかについて少しも知らないでいて，その事柄が必要だと明確に述べられるとは考えにくいからである。

井口，岩崎(2014)は，中学２年時の「証明」が定義される前段階の証明指導において，証明の機能としての「説明」を重視する立場で考えたとき，授業において，生徒が証明の意味や意義を理解している状態を，相互作用主義の視点から具体的に述べている。以下は，その要約である[18]。

①生徒が「証明の意味」を理解している状態は，少なくとも生徒が教師に依存せずに証明することができている状態と考えられる。それは，授業において，証明の方法や証明としての妥当性の判断に関して，知的責任を担っている主体が生徒であるという状態である。

②生徒が「証明の意義」を理解している状態は，教師が「この問題を証明してみましょう。」と言って，生徒がその要求や期待に応える形で証明を行っている状態ではない。少なくとも証明すべき対象を生徒が自ら判断して証明しようとしている状態と考えられる。

中学３年であれば，それまで証明指導を累積してきていることから，中学２年時に学習した「証明」の意味と手続きを基に，上述の状態が多くの生徒に見られることが望まれる。本稿で取りあげる生徒Otaは，自ら問題を選択して考え，文字式で証明を記述しているため，上述①②の状態であり，かつ証明の機能としての「立証」の文脈においてその状態であると見込まれる。さらに，本人は，文字式により証明された結論の式の意味を説明する必要性を示唆する発言をしていることから，その場合，証明の機能としての「説明」の文脈においてほぼ①②の状態であり，かつ本人が理解するのに必要な説明は，前形式的証明のいずれかの型であると考えられる。もしもそうだとしたら，このことは，「証明の意義」の対象を広い意味でとらえて指導する機会が必要であるとする主張を，具体的に支持するであろう。

井口，岩崎(2014)は，上述の①生徒が証明の意味を理解している状態と②生徒が証明の意義を理解

している状態を，DSMを用いて次のように記述し，その妥当性を，中学２年「三角形の内角の和」の証明の導入授業で実証的に示している[18]。

①生徒が「証明の意味」を理解している状態は，$\boxed{(\mathrm{G},\ \mathrm{CM},\ \mathrm{UM},\ \mathrm{J})=(\mathrm{T},\ \mathrm{S},\ \mathrm{S},\ \mathrm{S})}$ と表される。演繹的な方法による説明がある程度自由にできており，その説明がクラスで共有されている状態であると考えられるから，少なくとも証明方法の選択及び使用，妥当性判断の各レベルをコントロールしている主体が生徒であるといえる。

②生徒が「証明の意義」を理解している状態は，$\boxed{(\mathrm{G},\mathrm{CM},\mathrm{UM},\mathrm{J})=(\mathrm{S},\ *,\ *,\ *)}$ と表される。もしも証明の目標レベルのコントロールの主体が教師であれば，生徒は教師の要求や期待に応える形で証明を行っているのか，生徒が必要だと自ら判断して証明を行っているのかは分からない。しかし，目標レベルのコントロールを生徒が担っていれば，証明すべき対象を生徒が自ら判断して証明しようとしているため，その場合は“なぜ証明しなければならないのか”を生徒が理解している状態と考えられる。

とはいえ，目標レベルをコントロールする主体がSになるようにするのは，並大抵なことではない。それは，通常授業は，教師が知的責任を担っているからである（cf.前節3.1）。教師が問題を提示し，生徒がその解決に取り組むという形で進められる中で，生徒が自ら問題を提起することはなかなか起こらない。ただし，子どもが自ら問題を提起している場面が見られた授業をいくつか取りあげ，教師と子どもたちの相互作用を分析した研究の中に，目標レベルのコントロールが教師から子どもに移る要因として，問題解決の重要な要素を欠いた「不完全な状況」が生起することが考えられるという報告はいくつかある（井口，岩崎，2014．他）[18) 19) 20)]。

本稿で取りあげる授業では，意味理解や意義理解の対象としている証明が，形式的なのか前形式的なのかを明確にする必要がある。また，國本(1992)が前形式的証明の発見･理解は比較的困難な場合があるとし，佐々(2015)が操作的証明の構想･構成に関わって生徒の素地的経験や教師による方向付けが必要であるとしていることから（cf.前節3.4），中学校数学における形式的証明の意義や意味をある程度理解していたとしても，前形式的証明の意味理解においては，$\boxed{(\mathrm{G},\ \mathrm{CM},\ \mathrm{UM},\ \mathrm{J})=(\mathrm{T},\ \mathrm{T},\ \mathrm{S},\ \mathrm{S})}$ という段階が必要となる場合があることは十分考えられる。それは，どのような方法で証明するかについては，教師がある程度の提案をし，それを生徒が理解しながら積極的に受け入れ，その方法を実際どのように用いて妥当な解釈や説明をつくるかについては生徒自身が考え判断している状態である。

４　研究授業の背景

4.1　研究授業を実施した学校の特徴

本研究で取りあげる授業を実施した学校は，新潟大学教育学部附属長岡中学校（各学年３クラスの中規模校，実施当時全校359人）である。

当校園は，当時文部科学省の研究開発延長指定の下，幼小中一貫教育カリキュラムの開発研究に取り組んでいた。研究の１つの柱として，全教科等で，立場や考えの異なる人同士が互恵的にかかわり合いながら，共に見方や考え方を高めることを目指した授業を構想し実践していた。多くの生徒が，考えを説明したり話し合ったりすることに積極的である。

RLAに基づく数学授業の実践は，当校数学科として18年ぶり，対象クラスでは本実践が初めてである。

4.2　授業の構想

授業を次図１のように構想した。

数式領域と図形領域から取りあげる数学的関係の証明に，文字及び式の展開や因数分解を活用する。

⑴　１次の構想

１次では，教科書教材にある次の性質を取りあげ，その予想と証明を共通必修問題として設定する。

【連続する整数の性質】

Q0-0：連続する２つの偶数の積に１を加えると，奇数の２乗になる。

Q0-1：連続する２つの奇数の積に１を加えると，偶数の２乗になる。

【帯図形の求積方法】

Q1-0：１辺の長さhの正方形の池の周囲に，幅aの道がある。道の中央を通る線全体の長さをℓとすると，道の面積は$a\ell$と表される。

１次は，RLAのガイダンスである。２次の導入時に教師がRLAについて説明したとき，生徒がそれは何をすることなのかを理解できるように，教師の先導のもと，問題解決的活動をある程度経験させる。

例えば，Q0-0を証明することを原問題とするために，仮定（連続する２つの偶数の積に１を加える）

１次　式の計算の活用１（３時間）

◎整数や図形の性質に関する問題の追究（ガイダンスによる RLA の経験的理解，次の３問は必修）

連続する整数の性質	Q0-0：連続する２つの偶数の性質，Q0-1：連続する２つの奇数の性質
帯図形の求積方法	Q1-0：正方形の周りの帯図形

２次　式の計算の活用２（５時間）

◎RLA に基づく探究的学習

○オリエンテーション　○発展問題の設定　○問題の選択と追究　○交流　○レポート作成

帯図形の求積方法	Q1-1：円の周りの帯図形 etc.
空間図形の表面積の求積方法	Q2-0：円柱，Q2-1：円錐 etc.
俵杉算（和算）	Q3-0：一番下が n 俵の二等辺三角形状に積まれる俵の総数
	Q3-1：一番下が n^2 俵の正四角錐状に積まれる俵の総数 etc.
整数の乗法（古代インド）	Q4-0：十の位は同じで一の位は和が 10 の２桁の乗法のスートラ etc.
	Q5-0：100 に近い 100 未満の２桁の乗法のスートラ etc.

※原問題と発展問題の系列

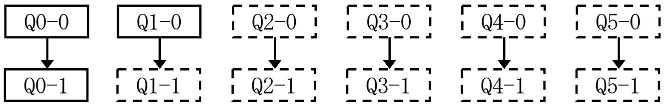


図１　授業の構想（中学校３年単元「式の計算の活用」全８時間計画）

に沿って具体数を用いていくつかの事例を作り，結論を予想させる。そして，予想した結論（平方数になる，奇数の２乗になる）が仮定された範囲ならどんな場合でも成り立つことを証明させる（cf.前節3.3）。次に，“What-if-not?”（もしもそうでなかったら，それはどうなるか？）という条件変更による問題設定の技法を用い[21]，Q0-0の仮定にある「偶数」という条件を「奇数」に変更したら，結論はどうなるかを予想し証明するという発展問題を設定して，取り組ませる。最後に，原問題と発展問題を振り返らせる。この場合，仮定の偶数を奇数に変更すると結論の奇数が偶数に反転すること（双対性）に気付いたり，これらの性質は連続する２つの整数の性質として統合的に一般化されることに気付いたりすることが期待される。以上のことは，「原問題の設定と解決（仮定に沿って帰納的に結論を予想し命題を作る→命題を証明する）」→「原問題の条件変更による発展問題の設定と解決（仮定に沿って帰納的あるいは類比的に結論を予想し命題を作る→命題を証明する）」→「原問題と発展問題の振り返り（価値を探索する）」という一連の活動が，RLAを進める上で生徒にとって参考となることを意図して行う。このタイプの例題を「追究活動のモデル事例１」とする。

一方，Q1-0は，Q0-0のような具体数による帰納的活動ではなく，文字式表現と読式の活動を仕組む。具体的には，まず正方形の周囲に一定の幅の道をかかせ，生徒がどのような場面（図）を作るかを見る。そして，生徒が作る図の上で，正方形の1辺の長さをh，道の幅をaとして，道の面積を求めさせる（道の外形が正方形の場合$4ah + 4a^2$）。次に，図形の面積はたいてい「長さ×長さ」で表現されることから，道の面積も積の形に式変形することを促す（因数分解して$4a(h + a)$）。最後に，aは道の幅であるのに対し，$4(h + a)$は道のどういう数量を表しているかを解釈させる（それは道の中央線の長さℓに当たる，ゆえに道の面積は$a\ell$），というものである[22]。以上のことは，「原問題の設定と解決（問題の条件に沿って場面を作る→対象とする数量を文字式で表現する）」→「原問題の振り返り（文字式を解釈する）」と表される。このタイプの例題を「追究活動のモデル事例２」とする。このタイプでは，文字式の解釈を通して結論が見えてくる。なお，このモデルにも発展問題の設定等のプロセスは付加されていく。

⑵　２次の構想

２次は，表２のようにRLAを組織して進める。

表２　２次におけるRLAの組織

１時間目　オリエンテーション ・RLAの目的・内容と当校の活動の進め方の説明 ・複数の原問題の提示と問題意識の触発
２時間目　発展問題の設定と選択 ・条件変更による問題設定 （４人程度の生活班で活動→クラスで共有） ・共有された問題群から追究問題の選択（各自）
３時間目　個人追究 ・命題の予想と証明
４時間目　同系問題の選択者との交流　【本時】 （教師の意図的な編成によるグループ活動）
５時間目　異系問題の選択者との交流 （教師の意図的な編成によるグループ活動と生徒の自由意思によるグループ活動の組み合わせ）
一部時間外　レポートの作成（宿題）と読み合い

２次はRLAのオリエンテーションで始める。１次で扱った問題の他にも問題を提示し，生徒はそれに触れ発展問題を作ることを通して，自分が取り組む問題を選ぶのである。教師は，この場面を，生徒に問題解決の目標レベルの知的責任を委譲するきっかけとすることを意図している。そのために，RLAで扱う問題を，主に次の３つの視点から考えている。

・「新奇性，意外性」…よく知っている数学的関係とは異質な関係がある。日常で当たり前としている事柄やあまり考えたことがない事柄を数学的にとらえられる。予想と反する結果が出る。

・「多様性」…様々な文化で数学的な考えが生み出されていることが認識されることを期待し様々な文化から集めた数学題材を扱う[23]。生徒の習熟や関心の違いへの対応が見込まれる様々な問題を扱う。１つの問題を解決する考え方や方法が複数考えられる。

・「発展性」…既存の概念や知識を前提として，そこからさらに新しい概念や知識を導き出すことに繋がる問題を，自分なりに考える余地がある。既存の概念や知識の前提となっているより原初的な概念や知識を追究することに繋がる問題を，自分なりに考える余地がある。[24]

以下に，１時間目に提示した原問題，及び２時間目に設定が予想される発展問題を扱う意図と問題意識の触発の仕方について，ここでは紙面の都合上，生徒Otaらが選択した「空間図形の表面積の求積方法」に関する問題を取りあげて説明する。

原問題Q2-0は，「円柱」の表面積を扱う。教師が底面の半径が３，母線の長さが５の円柱を提示し，表面積を問うと，生徒は中学１年で学習した計算方法を用いて求めるであろう（底面積×２＋側面積＝$9\pi \times 2 + 6\pi \times 5 = 48\pi$）。その後，教師は，問題の与件である「底面の半径３」「母線の長さ５」と問題解決に必要な「底面の円周6π」，結果の「表面積48π」に印を付けて注目させ，「３と５を足すと８。そして6π。すると表面積48πか…。」というように含みをもたせた言い方をする。そうすることで，生徒が「８と6πをかけると48πになる」ことに気付き，他の場合でも成り立つかどうかを調べたり，証明に挑戦したりすることが期待される。

発展問題は，原問題の条件の「円柱」を「正四角柱」や「正三角柱」など様々な角柱に変更したり，「円錐」に変更したりして，同じような求積方法があるのかを追究するというものである。その方法は「追究活動のモデル事例１」を基に，帰納的に求積方法を予想してから文字式で証明する方法もあれば，「追究活動のモデル事例２」を基に，表面積を文字式で表現してから，その式を変形し解釈して求積方法を見いだす方法もある。円柱と円錐の結果を比べると，等半径・等母線の場合，表面積は円錐が円柱の２分の１となっていることに気付くであろう。また，この関係が，等底・等高の場合，体積は錐体が柱体の３分の１であることや，面積は三角形が長方形の２分の１であることと似ていることに，美しさや面白さを感じるかもしれない。正多角柱にも円柱と同様の数学的関係があるが，正四角柱以外でそのことを生徒が理解するには未習の知識を要するため，数学学習の奥深さに触れる機会となるかもしれない。

このように原問題を教師が提示し，発展問題はそれぞれの原問題を基に生徒自身が作ってクラスで共有する。その上で，生徒一人一人が問題を選択して追究し，仲間と共に追究を深めていくのである。

4.3　指導案の作成と検討

指導案は，授業者（井口）が構想し，他の数学科教師（教諭１名，非常勤講師１名）と適宜相談しながら作成した。（この３人は，検討を経て修正した指導案を基に，３学年の各クラスでRLAを実施した。）

指導案の検討は，他の複数の人と３回行った。そ

のうちの２回は, 中学校内の教員グループで行った。専門教科が異なる教師が互いに授業の構想を聴き合い意図や内容を理解するとともに，様々な視点から検討した。最後の１回は，当校園の研究協議会への外部協力員（教育事務所指導主事１名，公立中学校数学科教師２名）と共に行った。そこでは，教材の解釈や構成, 本時の展開を中心に細部まで検討した。

4.4 データの収集と分析の方法

対象授業（本時）は，全８時間計画の７時間目，RLAとしては５時間計画の４時間目である。クラスは３年２組（男子16人，女子23人，計39人， １人欠席）である。授業者（井口）は，40代後半の男性教諭, 教職勤務は26年目, 当校は４年目である。

授業の記録は, ビデオを２つのグループに設置し, 外部協力員が，クラス全体を撮りつつ，各グループの生徒を焦点化して録画した。授業参観者のK教師からも，本人の参観目的に沿って録画したグループの記録がいくつか提供された。その他に授業の観察メモ，生徒のワークシートのコピーを残した。

授業後，ビデオ記録を基に詳細なプロトコルを作成した。発話には，授業開始時から順番に番号を付けた。発話の主体の表記は，教師をTとし，生徒は特定できる場合には仮名にしてアルファベットで表し，特定できない場合には単数ならS，複数ならSSとした。観察された様子は，丸括弧内に補足した。その上で,「まとめの型」及びDSM（cf. 前節3.1）を用い，教室における教師と生徒，生徒同士の相互作用を質的に分析した。

５　２次の授業の実際

5.1 前時まで（１～３時間目）の授業

⑴ １，２時間目の授業

提示された原問題の中で，生徒が特に関心を示したものは，Q2-0（円柱の表面積の求積方法）とQ4-0，Q5-0（古代インドの整数の乗法）であった。それは，生徒にとって既習の方法とはまったく異なっていて，今まで考えたことのない方法でありながら，生徒がその方法に気付いたからだと考えられる。Q1 ～ Q5の原問題にひととおり触れた後，条件変更による発展問題の設定は，各生活班に１つずつ原問題を機械的に割り当て，ブレインストーミングで行った。各班から発展問題がクラスに提出されると，Q3系の変形俵杉算なる問題にも生徒の関心が寄せられた。

発展問題は全部で21問提出され，すべてを選択の対象として問題番号が付けられた。問題はいくつ選択してもよく，途中で変更したりクラスに提出されなかった問題を作って考えたりしてもよいこととした。生徒にQ1系～Q5系の各問題群に対し,「興味」と「期待」の観点から４段階で自己評価させた上で問題の選択を指示した。どの生徒も，自分の興味や期待に基づいて問題を選択していて，仲間の選択に後ろ向きに便乗する様子は見られなかった。

選択する問題は，生徒が仲間と共に発展問題を考え共有した上で，個々の生徒が自分の意思で決めている。教師は生徒の問題選択に介入していない。したがって，生徒は各自が自分なりに問題に向かう状態となっていると見込まれる。

⑵ ３時間目の授業

３時間目は，各自が選択した問題を自分なりに追究した。後節5.2で取りあげるグループ12の生徒OtaはQ2-1（円錐の表面積の求積方法）を，一旦具体数を用いて，中学１年で学習した求め方と新しい求め方のそれぞれで円錐の表面積を求め，それぞれの式の立て方を基に文字式で表面積を表し，双方が一致することを確かめる形で解決していた。それは「追究活動のモデル事例１」に当てはまり，証明は形式的に行われ記述も明晰である（cf. 資料１）。

一方，同じグループとなる生徒Ogaは，その問題に対し，一旦具体数を用いて，中学１年で学習した求め方で円錐の表面積を求め，等半径･等母線の円柱の表面積と比較して円錐と円柱の表面積の関係を見いだし，その関係を基に，円錐の表面積の新しい求め方を文字式で表していた。これは，帰納と類推でとどまっていて，形式的証明とはなっていない。ただし，中学１年の求め方と新しい求め方のそれぞれで円錐の表面積を表した文字式が一致することを明確に示せば，それは形式的証明となる答案であった（cf. 資料２）。

クラス全体を見ると，生徒は，なかなか思うように解決が進まなくても，諦めることなく取り組んでいて，その様子は問題の手強さを楽しんでいるように見えた。また，選択した問題によっては，解決に必要な知識が現時点までの学習内容を越えていること（そのことを生徒は自覚していないかもしれないが）が解決を困難にさせていた。その場合であっても，教師は個々の目標レベルをコントロールすることはしていない。むしろ，関連する情報を調べて理解できれば解決可能であることを助言しつつ，問題

に対する知的責任を生徒に委ねていた。したがって，生徒は各自の目標レベルのコントロールを担っている状態であることが見込まれる。

なかなかきまりを見いだせずにいる生徒であっても，例えばQ1系の問題の図の面積について文字式を用いて考えていたことは，「追究活動のモデル事例２」が示す活動に当てはまる。Q4系の問題に対し，具体数を用いて帰納的に考えていたことは，「追究活動のモデル事例１」が示す活動に当てはまる。Q5-1の結論は予想していて，証明の仕方をあれこれと考えていた生徒は，「追究活動のモデル事例１」における帰納的活動を進めることはできていたと考えられる。つまり，生徒は，以前の学習を生かしながら，自分（たち）で方法を考え，問題解決に取り組んでいる。したがって，生徒は各自が解決方法を選択し使用して自分なりに問題にアプローチしている状態であるといえる。

5.2　本時（４時間目）の授業

４時間目は，これまでの各自の追究をより確かなものとするために，同系の問題を選択している生徒同士で交流することとした。交流グループは，１グループ３人程度となるようにし，追究の進度に差がある生徒たちや，追究の仕方や結論に違いが見られる生徒たちができるだけ同じグループとなるように，教師が意図的に12のグループを編成した。そうすることで，追究に遅れが見られる生徒に対して教師が直接介入する前に，生徒たちがかかわる，つまり解決方法の選択及び使用レベルの知的責任を生徒たちに委ねやすくなると考えられるからである。あるいは，追究の仕方や結論に違いがある生徒たちが交流する機会をもてば，同じ問題や類似問題なのに追究の仕方や結論に違いがあることに関心をもち，互いに質問や説明，議論を始める，つまり目標レベルの知的責任を生徒が担うことが期待されるからである。

教師は，生徒がどのように解決を進めているかを見て回り，実際にどのような交流をしているのかに耳を傾け，グループに対して訊くことを意識した。以下では，グループ12の２人の生徒OtaとOgaの交流を取りあげる。２人は，Q2-1を解決した後，Q2-0に戻って議論していた。前時終了時に回収したワークシートの記述から，２人はQ2-0の円柱の表面積が「(底面の半径＋母線の長さ)×底面の円周」で求められることを文字式で示し，Q2-1の円錐の場合に取り組んでいることがうかがえたため，２人のその議論は授業者にとって意外であった。それではOtaとOgaの交流がどのようなものであったか見ていこう。

⑴　教師がグループに介入する前のエピソード

OtaとOgaは，Q2-1（円錐の表面積の問題）に対して，自分なりに文字式を利用して考えた証明や説明（cf.資料１，２）について情報交換をしていた。しばらくすると，Otaは円錐の表面積の式について自ら記述した「(半径＋母線の長さ)×円周÷２」を指し，次のように話した。

18 Ota：これが何を表しているのかが分からない。

OgaはOtaのこの疑問について，円柱の表面積の式「(半径＋母線の長さ)×円周」に置き換えて考え始めたが，答えられず困惑していた。Otaはその様子を見て，当初自分で考えたときに用いていた「母線を回すこと」や「展開図にすること」を話題に出し，２人は議論を進めた。以下のプロトコルは，そのときの様子を表している。

85 Oga：何で母線足す半径なんだろと思ってたの。
86 Ota：うんうん，思ったでしょ。
：　　　：
113 Ota：最初ね。(図２をかいて）長方形を，円周の数だけ回してできた図形だと思ってたんだけど…
114 Oga：それだとうまくいく？
115 Ota：だけどそれだとさ，半径と母線を足したものが回って。図の上ではこうなるけど，分かんない。

【図２】

：　　　：
122 Ota：下の方が何になるのか，ちょっと分からない。
123 Oga：いやーほんと分かんない。
124 Ota：はー（大きなため息をつく）
125 Oga：ちゃんと意味があるの？
126 Ota：あるでしょ。

Otaは，円柱を長方形による回転体として見て，母線と半径がその長方形の要素となっていることに着目し，母線と半径の和を円周に乗ずることの意味を見いだそうとしていたことが見て取れる。この問題の手強さにめげそうな様子を見せているOgaに対

し，Otaは言葉を掛けている。それは，数学的に意味があることを信じ，自他を励ますものである。

その後，２人は，自分たちの疑問点について具体的に考える方向で，以下のように話し合っていった。

137 Oga：（母線を指して）５cmのが（上の底面の円周を鉛筆でなぞり）ぐるって回ってるじゃん。だから，５×６πで30πでしょ。で，３×６πで18πでしょ。（「30π＋18π＝48π」と書き２πr(r＋h)と見比べて）分配すると

：　　　：

140 Ota：あ－，分かった，分かった。

141 Oga：（指で回転の動きを示しながら）ここ回ったときに，

142 Ota：円周は変わらないから，

143 Oga：回ったときにこれができるじゃん。（円柱の展開図の側面に当たる長方形を指して）それが（「30π＋18π＝48π」を指して）これです。（少し考えてから底面を指して）でも，２つあるよ。

144 Ota：そう，２つある。（笑う）

Otaが説明に用いた回転体モデルを，今度はOgaが用いて自分の考えを進めていて，Otaはそれを支持する役割を担っている。２人は，２πr(r＋h)の式の意味が，分配法則を用いると，回転体の図と関係付けて説明できるのではないかと考え，その考えの妥当性を式の計算によって確かめている。そして，自分たちが考えたこの方法だと，底面は１つ分の面積しか求められていないことに気付いている。それによって，問題意識が一層高まっていることが，その後の以下の発言からも読み取られた。

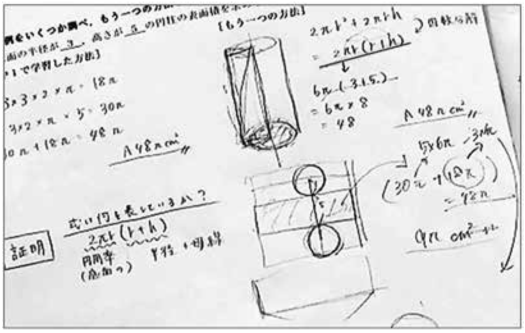
189 Oga：えっ？かける３は？（しばらくOtaと何か意見交換しながら考えた後で）何で？円周×３なの？何で円周×半径なの？何でそれで２つ出るの？

ここまでの議論を要約すると，まずOtaが疑問を言いOgaはそれに答えようと考えるが，解釈ができない。途中Ogaも実は自分も同じ疑問を思っていたことを話し，２人で共にそれについて考え始める。思考が進むにつれ「円柱の表面積を表す文字式の意味が分からない」という疑問の根本に「そもそもなぜ母線足す半径なのかが分からない」という疑問があることが明らかになる。OgaがOtaの回転体モデルを用いてアプロプリエーションを試み，共に探索する過程で「なぜ円周×半径で２つの底面の面積が出るのかが分からない」というように，議論点が焦点化される。こうして，表面積を表しているはずの文字式を，何かしらの方法で図と対応付けて理解することを，自分たちの問題としていったのである。

⑵　教師のグループへの介入時のエピソード

①　グループへの介入開始時

教師がそのグループに立ち止まると，生徒Ogaはワークシート（図３）に記した半径３，高さ５の円柱の見取図と展開図，計算等を教師に見せながら，問題となっていることをすぐに説明し始めた。



【図３　Ogaのワークシート】

193 Oga：この式の（２πr(r＋h) に下線を引き）何で(半径＋母線)×円周が，表面積全体になるんだろうねって…

194 T　：あー

195 Oga：（回転体としての円柱を構成する長方形の周を鉛筆でなぞり）これを切って回転移動ですると５cmがここの（展開図の側面の長方形の横を鉛筆でなぞり）６πって回ってるから，ここ（30πを指し）は出たんですけど（展開図の２つの底面を鉛筆でなぞり）底面積のこれがよく分かんなくなっちゃって…

196 Ota：円周×半径で（展開図の２つの底面を指し）この２つの面積が出るのは何でだろうってなって…

197 T　：この文字式で見ると，そうなることは，分かるわけだよね。でも，図で考えると何でそうなるんだろうということかね？

198 Ota･Oga：（うなずく）

199 T　:何でだろうなー？
200 Ota:そもそも何で半径＋母線なのかってい
う。

議論の対象は，教師に依存することなく，自分たちで決めているため，生徒は問題解決の目標レベルのコントロールを担っている状態であるといえる。教師は２人が問題としていることに関心を示し，それを理解しようとしながら，問題に対して生徒が担っている知的責任を維持しようとしている。

生徒のワークシートの記述を見ると，生徒が解決方法として回転体と展開図，面積を表す文字式の変形を選択して考えていたことがうかがえる。教師は生徒の解法について介入していないので，解決方法の選択及び使用レベルのコントロールの主体は，生徒のままで維持されているといえる。

問題は解決されていないので，この時点で結果の妥当性の判断レベルについては判定されない。

以上のことから，この授業場面は，

gr12（G，CM，UM，J)=(S，S，S，＊）

と解釈される。

②　グループへの介入進行時

教師は，ワークシートの記述から，面積が円周と半径との積によって表される長方形が展開図のどこにあるかを，２人が見いだせると考えた。そこで，生徒に副教材[25]の「円柱の表面積」の頁（図４）を参照することを勧め，面積が円周と半径との積によって表される図が展開図のどこにあり，それが計算上底面積２つ分と等しいことを確かめる方向で質問していった。２人は回答したものの，結局は「文字式では分かるけど，図形だと分かんないね。」と話していた。教師は「この後も考えて図の上でも説明ができるといいなと思う。分かったら教えてください。」と言った。間もなくして本時は終了となった。

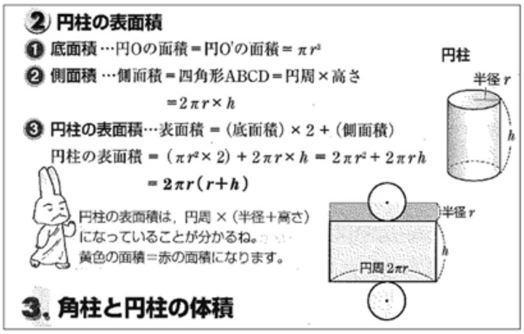


図４　副教材の「円柱の表面積」の頁

教師が副教材の図を導入して質問していく行為は，特に解決方法の選択や使用レベルのコントロールに関わることである。生徒は，解決に行き詰まっていたためか，教師のその行為を受け入れている。その結果，解決方法の選択及び使用のレベルのコントロールを教師が生徒から奪うこととなっている。生徒は「分からない」とし，教師はそれを受け入れ，解決を生徒に預けているため，結果の妥当性の判断レベルのコントロールは，ここでは判定しない。

以上のことから，この授業場面は，

gr12（G，CM，UM，J)=(S，T，T，＊）

と解釈される。

⑶　授業終了直後のエピソード（補足）

前節⑵から，グループ12における問題解決的な活動の質の特徴の１つに，「解決方法の選択及び使用のレベルのコントロールを教師が生徒から奪っていること」が挙げられる。ところが，その後のVTRと生徒の報告から，授業を参観し記録をとっていたK教師が，この授業終了直後，グループ12に数分間介入し，その中で，少なくとも，解決方法の使用及び結果の妥当性の判断レベルのコントロールを生徒が担うように変化したと考えられたのである。

K教師は，生徒に先の副教材の「円柱の表面積」（図４）と「円の面積」（次図５）の両方の頁を参照させ，等積変形により円を長方形に近似して，円の面積を求められることが既知であることを確認した。そして，それを前提に，１つの底面の面積が側面を展開した長方形の面積の半分になるという推論を生徒と共有し，その推論が妥当であることを前提から導かせようとしていた。つまり，解決方法の選択レベルのコントロールの主体は，授業者と同様でK教師である。ただし，授業者が生徒に問題解決の道を辿らせるように，副教材の記載内容を理解させようとする形となっていたのに対し，K教師は生徒が問題解決の道のどの辺りにいるかを確認し，そこを出発点としてその先を指し示すように，副教材の資料を参照させている点が違う。つまり，方法選択レベルの教師のコントロールの仕方が質的に違うのである。

その上で，K教師は，生徒が具体的に推論できるように，側面に当たる長方形の半分の面積への帰着の仕方として，その長方形の縦半分と横半分の２つの選択肢を示し，どちらの方法を用いるかは生徒に考えさせていた。つまり，解決方法の使用及び結果

の妥当性の判断レベルは生徒に委ねているのである。

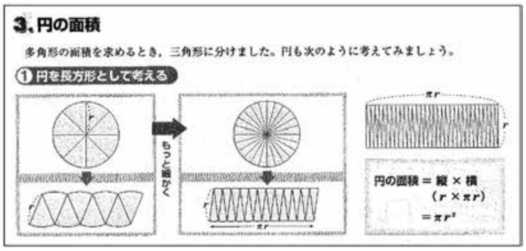


図５ 副教材の「円の面積」の頁

生徒は，K教師との相互作用を通して，自ら１つの底面の面積を長方形の横半分の面積に帰着する方法を用いて結論付け，直ぐさまそれを記述したもの（図６）を授業者に見せて説明した。

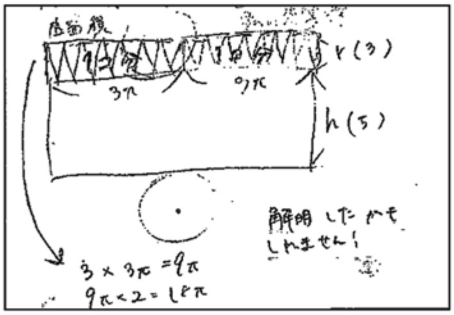


図６ Otaの振り返りシートの記述

したがって，方法の使用レベルのコントロールも，「生徒による‘まとめ’Ⅲ型b」で結果の妥当性の判断レベルのコントロールも生徒が担っている。以上のことから，この場面は

gr12(G, CM, UM, J)=(S, T, S, S)

と解釈される。

６ 考 察

前節５では，４時間目のグループ12における２人の生徒の交流は，１つの問題に対する解決活動として行われていたため，教師の介入の時間的推移の視点から便宜的に大きく３つの局面に分けた。それぞれの場面を「まとめの型」及びDSMを用いて分析・解釈し，その結果を整理したものが図７である。

gr12（ G ， CM ， UM ， J ）

授業者Ｔの介入開始時（ S ， S ， S ， ＊ ）

↓

授業者Ｔの介入進行時（ S ， T ， T ， ＊ ）

↓

参考：K教師の介入時（ S ， T ， S ， S ）

図７ 本時のグループ12の授業場面の特徴

以下では，前節3.5で設定した「生徒が証明の意味を理解している状態」及び，「生徒が証明の意義を理解している状態」等を観点に授業の考察を進め，本研究の目的に迫っていくこととする。

6.1 生徒Otaの発言（プロトコル18）の意味

⑴ 「幾何的-直観的証明」の意義との整合

前節3.5では，授業において，生徒が「証明の意義」を理解している状態は，DSMを用いて表すと，少なくとも（G，CM，UM，J）＝（S，＊，＊，＊）と記述されることを述べた。目標レベルGのコントロールを生徒が担っている場合，証明すべき対象を生徒が自ら判断して証明を試みようとしているため，“なぜ証明しなければならないのか”を生徒が理解している状態であると考えられるからである。

図７を見ると，目標レベルGのコントロールの主体がSとなっている場面が生起し，それがその後も維持されている。したがって，もしもこの目標レベルGの内容が「証明すること」であるならば，このグループの生徒Otaの発言は，何らかの「証明の意義（必要性）」の表明を意味しているといえる。

授業者Tが介入する前の場面で，Otaが，すでにQ2-0（円柱の表面積の問題）について，自ら文字式による証明によって導いた結論「(半径＋母線の長さ)×円周÷２」を指し「何を表しているのかが分からない。」(プロトコル18) と自発的に発言した。この発言は，この生徒が記述した形式的証明では納得できない点があることを示唆している。

この納得できない点を解決するために，生徒Ogaと共に自ら用いていた方法は，円柱を長方形による回転体として見て，その長方形の要素である母線と半径に着目し，母線と半径との和を円周に乗ずることの意味を見いだそうとするものであった。この方法自体は，幾何的であり直観的である。

２人は，この方法を試すことを通して，「なぜ円周×半径で２つの底面の面積が出るのかが分からない」と根拠を明確に問う形で問題を焦点化している。

そして，この問題は，K教師によって「円の面積」と「円柱の表面積」の資料を基に提案された方法を用いることによって，解決されたのであった。その方法とは，①等積変形により円を長方形に近似して円の面積を求められるとし，②それを前提に１つの底面の面積が側面に当たる長方形の半分の面積になるという推論が妥当であることを導く，というものである。つまり，それは，①が小学校算数で学習した幾何的-直観的な方法であり，②が演繹的な方法であり，これらを組み合わせて行う証明である。

以上のことから，Otaの発言の意味は，文字式による証明を納得するためには，結論の式が導かれる根拠を図の上でも示す必要があるというものである。これは，形式的な証明を納得する上で幾何的-直観的証明を必要とする（cf.前節3.4）という広い意味での「証明の意義」と整合するものと特徴付けられる。同時に，代数的表現や形式的証明に慣れていないわけではない，それらがある程度できる生徒にとっても，前形式的証明が形式的証明による代数的な表現や式変形の意味理解の助けになる，という考え（cf.前節3.4）を支持している。

ただし，形式的証明よりも前形式的証明の方が発見･理解が必ずしも易しくないという指摘（cf.前節3.4）があるように，実際Otaらは，自ら考えた回転体を用いた方法だとなぜ結論につながらないのかという原因や誤解を明らかにして方法を修正するには至らなかった。図７で方法選択レベルCMのコントロールの主体がTとなっているのはそのためであるが，それは必要な支援行為であった（cf.前節3.5）。

⑵　「関係的理解」の指向

生徒Otaの発言（プロトコル18）は，文字式による形式的証明を納得するために，幾何的-直観的証明を必要とすることに向かう行為であることが明らかになった。V. Byers & N. Herscovics(1977)は，学校数学を理解することには４つの類型があると述べており[26]，Otaのこの行為は，その１つの理解の様相と整合すると考えられる。

同氏らは，R.R.Skemp(1976)が述べた「関係的理解（relational understanding）」と「道具的理解（instrumental understanding）」[27]では，内容（数学的アイディア）と形式（その表現）の区別が考慮されていないことを指摘し，それらに「直観的理解（intuitive understanding）」と「形式的理解（formal understanding）」を付加した。Skempはそのことを受け1979年と1982年に理解の様相モデルに細かく改善を加えているが，本実践の特徴を理解する場合はV. Byers & N. Herscovics(1977)のモデルで十分であると考え，ここではそちらを援用する。同氏らのいう理解の４類型は，以下のように要約される。

- 「道具的理解」…なぜそのルールが有効かについて直接には意識しないまま，ある問題に対して記憶の中から適当に選び出されたルールを適用する能力。
- 「関係的理解」…より一般的で高次の前提系から特定のルールや過程を導き出す能力。
- 「直観的理解」…１つの問題に直面した時に，先立って特別に仮定や前提等の条件を分析することなく，その問題を解決できる能力。
- 「定式的理解」…直面している数学的概念に対して，適切な数学的シンボルや記号を結び付け，これらの諸概念を論理的な連鎖に結び付けていく能力。これは表現と論理的推論とに限定されていて，「関係的理解」の特別な場合といえる。

これらを視点にすると，Q2系の問題に関する２次１～３時間目の授業は，次のように解釈できる。

底面の半径が３，母線の長さが５の円柱の表面積を，中学１年時に学習した方法で「底面積×２＋側面積＝９π×２＋６π×５＝48π」と求めた後，教師の触発的な支援により，底面の半径３と母線５の和８に，底面の円周６πをかけた結果と，表面積48πが一致することにすぐ気付くことができた。これは，「直観的理解」が見られたエピソードといえる。

新たに知った方法を確かめるために，「(底面の半径＋母線)×底面の円周」を用い，円柱の表面積を計算して求めることが流暢に行われていた。これは，「道具的理解」が見られたエピソードといえる。

円錐の底面の半径をr，母線の長さをhとし，新たに知った方法で表面積が求められることを，中学３年生が文字式により証明する場合，少なくとも，中学１年時に学習した方法で求め，その結果の式Aを式変形して，新たな方法を表す式Bを導くやり方と，AとBをそれぞれ求め，結果が一致することを示すやり方が考えられる。Otaは円柱も円錐も後者の形式で証明していた（cf.資料1）。これは，「定式的理解」が見られたエピソードといえる。

一方，本時４時間目の授業において，Otaは，円錐の表面積が新たに知った方法で求められることをすでに文字式により証明していたが，それによって導かれた結論「(半径＋母線の長さ)×円周÷２」を振り返り，それが「何を表しているのかが分から

ない。」（プロトコル18）と発言し，その意味をOgaと共に追究していった。実際は円柱を用いて追究し，「なぜ円周×半径で２つの底面の面積が出るのかが分からない」と問題を焦点化した。そして，分配法則を用いると，$2\pi r(r+h)$の式の意味を，回転体の図と関係付けて説明できるのではないかと考え，その妥当性を式の計算によって確かめていた。その考え方では説明ができなかったが，最終的には，K教師によって提案された方法を用いて考え説明することができた（cf.図７のUMとJがいずれもS）。それは，等積変形により円を長方形に近似して円の面積を求められるとする幾何的-直観的証明による理解のもと，それを前提に１つの底面の面積が側面に当たる長方形の半分の面積になるという推論が妥当であることを演繹的に導くというものである。これは，「関係的理解」が見られたエピソードといえる。

以上のことから，Otaの自発的な発言（プロトコル18）をきっかけとして生徒が行った追究活動は，「関係的理解」を指向するものと特徴付けられる。

6.2　生徒Otaのような発言が生じるために必要と考えられる要素

一体，何がこの「関係的理解」の指向をもたらしたのであろうか。このことを明らかにするために，文字式による証明を納得するためには，結論の式が導かれる根拠を図の上でも示す必要があることを示唆する発言（プロトコル18）が，授業の中でどのようにして実現されたのかを考察する。そして，そのような「証明の意義」を生徒が自ら理解することを授業の中で実現するために，「前形式的証明」を証明の学習に位置付ける視点をいくつか示したい。

⑴　「不完全な状況」の生起

生徒Otaにとっては，自ら問題を選択して考え，形式的証明を記述したものの，論理的に導かれたはずの「(半径＋母線の長さ)×円周÷２」がその証明では何を表しているのかが分からないのであり（cf.プロトコル18），なぜ円周×半径で２つの底面の面積が出るのかが分からないのである（cf.プロトコル196）。このことは，Otaが命題を納得するのに，文字式による形式的証明のみに依拠することの不十分さを意識していることを強く示唆している。その不十分さとは，形式的証明によって導かれた結論の式の意味がその証明からは見えないという点で，問題解決の重要な要素を欠いているということである。そう考えることは，生徒は前形式的証明である幾何的-直観的証明を通して問題意識が解消され，「関係的理解」に至った点から妥当である（cf.前節6.1）。

以上のことから，Otaが上述の問題意識をもつ状況は，目標レベルのコントロールを生徒が担うようになる要因として考えられる「不完全な状況」（cf.前節3.5）と整合している。したがって，授業の中でOtaのような発言が生じる状況は，「不完全な状況」として特徴付けられる。

ただし，教師は，文字式による形式的証明がされていて「形式的理解」がされていると思われたOtaが，結論として導かれた式の意味を自ら問い，その追究が「関係的理解」に向かうという展開を予想していなかった（cf.前節5.2）。次節では，生徒が「関係的理解」に向かう授業は，どのように組織して実現され得るかについて考察を深めていく。

⑵　問題のもつ新奇性や意外性

生徒Otaは，自ら考えて文字式により証明したにもかかわらず，それによって導かれた結論「(半径＋母線の長さ)×円周÷２」が何を表しているのか分からないとしている。このQ2-0の問題は，“もしかして底面の半径と母線との和と，底面の円周は，表面積と関係があるかもしれない，ありそうだ”と生徒が目を向け気付くように，教師が提示したものである。この問題提示の仕方は，R.R.Skemp(1989)がいう「方法第一」アプローチの正当な場合と整合する。それは「理解第一」アプローチの特別な場合である。

同氏は，問題提示の仕方を注意深く選ぶ必要があるとした上で，「このような方法があります。どうしてそれでうまくいくのでしょう。それはいつでもうまくいきますか。」と問う場合は，いろいろな「理解第一」アプローチの中の特別な一つの場合として正当なアプローチとなり得るとしている[28)]。実際Otaらは教師が提示したQ2-0を自ら選択して追究し「関係的理解」に向かったことから，この生徒たちにとって正当なアプローチとなっていたと考えられる。

それでは，「方法第一」アプローチが正当なものとなり得る要素には何があるのだろうか。同氏は問題提示の仕方を注意深く選ぶ必要があるとしていることから，それを考察することは重要である。そこで，本実践（cf.前節4.2⑵下線部）と，同氏が「方法第一」アプローチとして正当な場合として例示している問題及びその提示の仕方とを比較し，共通点を探ることを通して，先の問いに回答することとす

る。

同氏が例示している問題は，次のとおりである。

（数学的研究）２位数が９の倍数かどうかを見つける方法があります。各位の数を足したときその和が９であれば，もとの数は９の倍数です。

例:36…３＋６＝９，36は９の倍数です。

(i)これはなぜでしょうか。（ヒント，もし行き詰まったなら，数直線をかき，９からはじめて１回に９ずつ移動してみなさい。）

(ii)この方法は，もっと大きな数についても使えますか。もしそうなら，それはなぜでしょうか。

(iii)（より難しい問題）同様な方法が，９以外の倍数にも適用できるでしょうか。

（cf.R.R.Skemp，1989，p.177（訳書p.215）[28]）

倍数の定義とそれに基づいて何の倍数かを判断することは，多くの子どもが通常学習する内容であろうが，この問題のように定義によらない，しかも簡単な方法で９の倍数かどうかを見分けることに触れることは，教師が意図的に扱わなければあまりないと思われる。その場合，この問題は，多くの子どもにとって，あまり考えたことがない事柄，よく知っている数学的関係とは異質な関係を対象とすることになる。これは，本実践における「円柱の表面積の求め方」を中学１年時に学習したものとは異なる見方で考えるというQ2-0の特徴と合致する。つまり，両者に共通する特徴は，問題のもつ新奇性や意外性である。この特徴が際立つからこそ，子どもは(i)のように根拠を問われたとき，それを解明したいと思うようになると考えられる。このように，これまで見馴れた事柄に見馴れない側面があることを「馴質異化」といい[29]，これを用いて問題意識を触発する手法がここでの問題提示の仕方の工夫である[30]。

以上のことから，「方法第一」アプローチであっても，少なくとも，新奇性や意外性を備えた問題を，それが際立つよう「馴質異化」の手法で触発しつつ発見の余地をもって提示することによって，証明の学習に「関係的理解」に向かう文脈を意図的に導入することが可能になることが示唆される。特に，本実践の場合，「関係的理解」の指向を決定付けている生徒Ogaの発言（プロトコル189）は，意外性への驚きとして解釈される。なぜなら，この発言は，OtaとOgaが回転体モデルを用いて解釈することを試みたものの，期待に反する結果が出たことによるものであり，２人が自らの幾何的直観の歪みを，数学的事実と照らして自ら考え判断したこと（cf.プロトコル137-144）によるものだからである。この点からも，意外性が重要であることが分かる。

ところで，(i)には，行き詰まったときに使えるヒントが括弧書きで与えられている。その行き詰まったときとは，“帰納的にそうなることが示されても，そうなるわけは説明できない。でもそれに代わる方法がよく分からない”という葛藤場面が考えられる。これは，本実践の“文字式でそうなることが証明されても，それによって導かれた式の意味を図の上で説明できない。でもそれに代わる方法がよく分からない”という葛藤場面と似ている。そして，そのヒントは，前形式的証明（(i)の場合は操作的証明）への誘発が意図されていて，このことは「理解第一」アプローチの中の特別な場合を確かにする１つの要素と考えられる。本実践の場合，K教師が副教材の資料を複合して解決方法を提案し推論を促していた。解決方法の提案にとどめることは，上述のヒントと同じような役割を果たすと考えられる。

(ii)や(iii)の問い掛けについては，子どもにいろいろと条件変更を促して，発展的に追究できるようにすることが意図されていて，このような発展性や多様性が「数学的研究」としての性格を与えていると考えられる。この点も，本実践のRLAに基づく数学授業の組織と整合していることを補足しておく。

(3)　数学することと相互作用に対する教師のセンシティビティー

グループ12の２人の議論を支えている背景的な要因として考えられることを，授業者の数学授業に対する意識の観点から補足する。

このRLAに基づく数学授業に，授業者は，生徒が数学に対する興味関心を広げ，それに基づくならば，問題の解決に多少困難があっても，粘り強く取り組み，互いに協力しながら，新たな数学的関係をとらえて価値を見いだしていくと，期待をもって臨んだ。

前節5.1(2)で，３時間目の授業について述べたことであるが，生徒は，なかなか思うように解決が進まなくても，諦めることなく取り組んでいて，その様子には問題の手強さを楽しんでいる印象を受けた。このように自己を推進させる姿は，“自分が対象としている問題は，何か数学的関係があるはずだ”という強い思いによるものと考えられる。そのこと

を象徴しているエピソードとして，生徒Ogaが円柱の表面積の新たな求め方を表す式を，図の上で解釈できず困惑して「ちゃんと意味があるの？」（プロトコル125）と言ったことに対し，生徒Otaが「あるでしょ。」（プロトコル126）と答え，その後も２人で追究を続けていったことが挙げられる。

このエピソードは，Yackel & Cobb(1996)の「社会数学的規範」の表れの１つと見ることができる。同氏らの「社会的規範」と「社会数学的規範」[31)]の見解を基に考えると，例えば，みんなで協力して問題を解決すべしという了解は「社会的規範」に当たり，そのときの問題や解決方法等が数学的に受け入れられることについての了解は「社会数学的規範」に当たる。Ogaが解決に行き詰って諦めかけているときに，Otaが諭すように返した言葉は，明らかに追究すべき数学的な意味を含んでおり，その言葉掛けによってそれを考える活動を２人が持続させたことは,「社会数学的規範」の表れによるものといえる。

OtaとOgaは，文字式による証明によって導かれた結論の式の意味を理解するために，この証明とは違った方法が必要だとして，２人は図を駆使して意味を考えたのであった。その過程は, アプロプリエーションの試みが見られ, 協働的かつ探索的であった。このエピソードは，國本(1998)の「社会的活動としての証明」と整合する。同氏は，証明に対するこのような見解をLakatos(1976)の準経験主義[32)]に基づいて主張している。その中で，証明は形式性よりもアイデアや証明に隠された仮定を探求するように求められ，証明を書くことよりも自分の言葉で説明したり批判したりすることに重点が置かれること。そして，社会的グループ（教室）の合意が証明の妥当性の判定の基準となることを述べている[33)]。本実践において, 証明は形式的証明に限定はされないが(cf. 前節3.2，5.2(2))，そのことは，当該の単元名や教科書記述からは必ずしも明らかではないし，そのことを，授業者もオリエンテーションで明言はしていなかった。それだけに，２人が目標達成に必要な証明が何であるかについて共に考えて決め追究していることは明確である。この点に「社会的活動としての証明」の特徴が見られる。

以上のような社会的･文化的特徴は，RLAのような活動を単発で行って形成されるものとは考えにくい。少なくとも，教師が上述のような視点を日ごろの授業づくりに生かそうとする意識をもつことと関係していると考えられる。その意識とは，生徒がどのような数学をしているか，教師と生徒及び生徒同士の相互作用は生徒が数学することとなっているかに対する敏感さ，すなわちセンシティビティーである（井口，大橋，鏡味，岩崎，2012）[34)]。

6.3 RLA に基づく数学授業で目指す問題解決的活動の質とそのために必要と考えられる要素

⑴ 目指す問題解決的活動の質

この４時間目のグループ活動をDSMでとらえると，グループ12は（G，CM，UM，J）が（S，S，S，＊）から（S，T，S，S）へ変化した。結果のみを補足すると，他の５つのグループには（S，S，S，S）が見られ，それ以外の６つのグループは（S，S，S，＊）であった。

このことから，RLAに基づく数学授業は，（G，CM，UM，J）＝（S，S，S，S）となる授業場面をつくることが理想的かつ実現可能であるといえる。通常は，クラス全体での集団思考の場において，教師が担っている知的責任を徐々に生徒に移譲するようにして（S，S，S，S）となる授業場面をつくることを目指す（cf. 前節3.1）。一方，RLAに基づく授業では, グループ活動を取り入れた場合, 各グループにおいて上述の授業場面が成立することを目指す点が質的に違う。

それを目指す上で，生徒が自ら選択した問題に対して，解決方法の選択及び使用レベルのコントロールを担って追究しているのであれば，上手くいかなくても結果の妥当性の判断レベルを教師がコントロールせずに，（S，S，S，＊）と保留する段階が必要な場合もある。

生徒が追究に行き詰まりを感じて，教師の積極的な介入が必要だと判断した場合，教師が解決方法を提案して方法選択レベルをコントロールしても，他のレベルは生徒に委ねて，（S，T，S，S）となるようにすることが大切である。

⑵ 目指す問題解決的活動の実現のために必要と考えられる要素

前節⑴で述べた授業場面をつくるためには，まず教師の生徒たちへの介入の視点から（G, CM, UM, J）＝（S，T，S，S）が想定できることが必要である。そこで，ここでは，問題解決の目標と解決方法の使用レベルに絞り，それぞれをコントロールする主体がSとなるのに必要と考えられる要素を，前節6.2で述べてきたことを振り返って整理する。ただし，限定された単元におけるグループ活動から考えた内容であるため，他の単元における実践等で再検討す

ることは必要である。

① **問題解決の目標レベルをコントロールする主体がＳとなるために必要と考えられる要素**

・新奇性や意外性，発展性，多様性の視点から問題を複数準備し，問題意識が触発されるように提示する。問題を発見的に提示することは，生徒に一種の「直観的理解」を促すことにつながると考えられる。問題設定活動への参加を中心に据えてオリエンテーションを行う。条件変更は発展問題の設定に役立つ。

・生徒が問題を選択し，その問題にいろいろと働き掛けて，生徒にとって少し手強くて追究価値のある問題となるようにする。生徒が問題を選択したからといって，目標レベルのコントロールを生徒が担ったと短絡的に考えない。

・生徒にとって「不完全な状況」が生起するようにする。「道具的理解」や「定式的理解」がされた事柄を振り返る場を設定したり，追究の進度や追究の仕方，結論の差異等を視点にグループを編成して交流活動を組織したりすることにより,「不完全な状況」が生起して「関係的理解」に向かうことがある。

② **解決方法の使用レベルをコントロールする主体がＳとなるために必要と考えられる要素**

・「追究活動のモデル」を活動に埋め込み，それを生徒が経験的に理解し参照できるようにする。

・生徒が自分なりに解決方法を実行する機会を設け，教師は生徒の選択した解決方法に関心をもち，その内容や用い方をよく見聞きしてとらえる。

・必要に応じて，教師が解決方法を提案する場合は，生徒の理解状態をとらえ，選択していた解決方法とその用い方をできるだけ生かして行う。解決方法の選択肢を提示することは，方法使用レベルのコントロールを，一旦生徒に委ねることを可能にする。

７　おわりに

本研究は，RLAに基づいた数学授業には，生徒が主体的に問題解決をする姿が見られるという報告に対して，教師と生徒及び生徒同士の相互作用の観点から授業の質をDSMで分析することにより，問題解決活動を構成するどのレベルにおいて生徒の主体性が発揮されているのかという１つの具体的な見方を与えた。その見方で，RLAに基づいた数学授業として実現可能で目指す問題解決的活動の質，それを実現するための具体的な視点をいくつか提出した。

さらに，中学３年生の段階で求められる文字式による形式的証明がある程度できる生徒であっても，その証明によって得られた結論の意味を構成する（関係的理解をする）ために，前形式的証明が重要な役割をもち得ることを，実践を基に示した。このことから，当該単元の中で，形式的証明だけでなく前形式的証明も含めた広義の「証明の意義」を生徒が学び直す機会が重要であることも示唆された。

（ただし，生徒は，これまでも文字式による証明をある程度記述することができていたが，証明に対する演繹性の視点からの理解については曖昧なところがあると思われた。その反省に基づき，その後の授業の中で，教師は補充指導をした。）

本実践のRLAは，個人研究の性格の強いものであった。研究者の研究活動には，個人研究と共同研究があることから，RLAに基づいた授業も，それら２つの方向があり得る。これからの社会で求められる問題解決能力や，その育成に不可欠とされる問題解決的活動の質を考えると，RLAに基づいた授業デザインも共同研究の視点から可能性や効果を検討することは重要であると考える。

RLAはアクティブ･ラーニングの理念を具現しているが，その普及には課題があることは指摘した。附属長岡中学校の数学科においても，RLAに基づく数学授業の開発及びカリキュラム整備は，近年取り組んでいるものの，最初の研究から長い間行われていなかった。本研究を機に，改めて，RLAに関わる当校の研究の系譜を辿り，研究者と実践者，学習者の思いと，実践の特徴を丁寧にとらえ，RLAに基づく数学の授業デザインの開発研究を進めていきたい。

参考･引用文献

1) 市川伸一.「学びの理論と学校教育実践
－ Researcher-Like Activityを取り入れた授業づくり」学習評価研究No.26, 1996, 42-51.

2) 風間寛司, 宮宏之. 共に『数学』を創りあげる生徒　『これからの時代をたくましく生き抜く生徒』, 新潟大学教育人間科学部附属長岡中学校研究紀要, 1999, 57-75.

[3] 狩俣智.「Researcher-Like Activityによる授業の工夫 －RLAの中学校の数学教育への適用－」(琉球大学教育学部教育実践研究指導センター紀要 第４号, 1996年11月.)
[4] 青木慎恵, 伊禮三之.「数学Aの課題学習の事例研究 ～RLAによる課題学習:「正多面体」～」(福井大学教育実践研究 第38号, 2013, 91-100.)
[5] 服部裕一郎, 井上優輝.「RLAによるクリティカルシンキングを育成する数学科授業の開発 －子ども達による査読評価活動を通して－」(全国数学教育学会『数学教育学研究』第21巻 第２号, 2015, 1-12.)
[6] 井口浩, 桑原恵美子, 岩崎浩.「算数･数学の授業における「知的責任の委譲」の実現の問題 －「教授学的シツエーションモデル」の構築とモデルによる授業過程の分析－」(全国数学教育学会『数学教育学研究』第17巻 第２号, 2011, 103-126.)
[7] Mellin-Olsen,S. (1991). *The Double Bind as a Didactical Trap*. In Alan J. Bishop, S. Mellin-Olsen and J. van Dormolen (Eds.), Mathematical Knowledge : Its Growth Through Teaching (pp.39-59). Dortrecht : Kluwer Academic Publishers.
[8] Stigler,J,W., Hiebert,J. (1999). *The Teaching Gap.* New York: The Free Press. (湊三郎訳.『日本の算数･数学教育に学べ』, 教育出版, 2002.)
[9] Brousseau,G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics : Didactique des Mathématiques,* 1970-1990. Dortrecht : Kluwer Academic Publishers.
[10] 岩崎浩, Steinbring,H.「教師の多様な相互作用の型と社会的･相互作用的活動としての数学学習 －教室における多様な‘まとめ’の型の同定－」(日本数学教育学会『第42回数学教育論文発表会論文集』2009, 493-498.)
[11] Balacheff,N. (1990). *Towards a Problématique for Research on Mathematics Teaching.* Journal for Research in Mathematics Education, 21 (4), 258-272.
[12] de Villiers, M. (1990). *The role and function of proof in mathematics,* Pythagoras, No.24, 17-24.
[13] 梅川貢司.「中学校数学における説明性の理解の様相に関する研究 －同一集団の２年間（中１･中２）の調査を手がかりにして－」(上越教育大学学校教育総合研究センター『教育実践研究』Vol.15, 2005, 43-48.)
[14] 国宗進.「文字式による論証」(静岡大学教育学部研究報告 教科教育学篇, 22, 1991, 55-70.)
[15] 國本景亀.「前形式的証明とその教育的意義 －証明の社会学的見方に関連して－」(高知大学学術研究報告 第41巻 社会科学, 1992, 1-15.)
[16] 小松孝太郎.『算数･数学教育における証明指導の改善』, 東洋館出版社, 2014.
[17] 佐々祐之.「論証指導における操作的証明の機能に関する研究 ～中学校数学科における学習環境デザインを通して～」(兵庫教育大学大学院連合学校教育学研究科 博士論文, 2015.)
[18] 井口浩, 岩崎浩.「三角形の内角定理の証明の必要性を触発する授業デザインの開発研究 －証明の機能，特に「体系化」を視点として－」(全国数学教育学会『数学教育学研究』第20巻 第２号, 2014, 123-140.)
[19] 井口浩, 大橋博, 岩崎浩.「算数･数学科の問題解決的な授業の質を決定する一要因 －子どもによる問題解決の目標のコントロール－」(日本数学教育学会『第44 回数学教育論文発表会論文集』2011, 129-134.)
[20] 井口浩.「数学授業における生徒による問題解決の目標のコントロールの実現 －中学校第２学年「連立方程式の解法」の授業事例－」(日本数学教育学会『第45 回数学教育論文発表会論文集』2012, 251-256.)
[21] S.I.ブラウン／M.I.ワルター著, 平林一栄監訳.『いかにして問題をつくるか問題設定の技術』, 1990, 東洋館出版.
[22] 神林信之, 風間寛司, 星野将直, 井口浩, 小嶋修, 渡部智和.『教えたくなる数学 学びたくなる数学 － 思考力･判断力･表現力を育成する教材解釈･構成－』, 考古堂, 2012, 66-74.
[23] David Nelson, George Gheverghese Joseph, and Julian Williams. (1993). *Multicultural mathematics.* Oxford University Press. (D.ネルソン, G.G.ジョセフ, J.ウィリアムズ著, 根上生也･池田敏和訳.『数学マルチカルチャー 多文化的数学教育のすすめ』, シュプリンガー･フェアラーク東京, 1995.)
－数学の多文化性及び扱う題材を参考にした。
[24] B. Russell. (1919). *Introduction to Mathematical Philosophy.* London: G. Allen & Unwin .(平野智治訳. 岩波文庫『数理哲学序説』,岩波書店, 1954, 9-10.)
－数学は前進的研究と遡及的研究の２つの方向

によって発展するという見解を参考にした。

[25] 『中学校数学資料集　数学の泉』, 地域教材社, 121,143.

[26] V.Byers & N.Herscovics. (1977). *Understanding School Mathematics.* Mathematics Teaching, 81, 24–27.

[27] R.R.Skemp. (1976). *Relational Understanding and Instrumental Understanding*. Mathematics Teaching, 77, 20–26.

[28] R.R.Skemp. (1989). *Mathematics in the Primary School : Subjects in the Primary School*. Routledge.（R.R.スケンプ著, 平林一榮監訳, 佐々木哲郎･重松敬一･國本景亀･崎谷真也･岩崎秀樹･小山正孝･飯田慎司･長谷川順一･村山一三共訳.『新しい学習理論にもとづく算数教育　－小学校の数学－』, 東洋館出版社, 1992.）

[29] Gordon,W.(1961). *Synectics: The development of creative capacity.* NY: Harper & Row.（ゴードン,W.J.J. 著, 鹿譲･金野正訳.『クティクス:創造工学への道』補改訂版, ラテイス, 1968.）

[30] 金子忠雄監修, 酒井勝吉･長谷川浩司.『対話と探求を深める数学科授業の構築』, 教育出版, 1989.

[31] Yackel,E. & Cobb,P. (1996). *Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics.* Journal for Research in Mathematics Education, 27 (4), 458-477.

[32] Lakatos, I .(1976). *Proofs and Refutations.* Cambridge: Cambridge University Press.（I･ラカトシュ.『数学的発見の論理　証明と論駁』, J.ウォラル･E.ザハール編, 佐々木力訳, 共立出版, 1980.）

[33] 國本景亀.「準経験主義の哲学に基づく証明指導の研究」（日本教科教育学会誌, 21(2), 1998, 35-43.）

[34] 井口浩, 大橋博, 鏡味英修, 岩崎浩.「算数の授業における「まとめの型」の生起とその要因－M教諭との授業改善の取組を事例として－」（全国数学教育学会『数学教育学研究』第18巻 第２号, 2012, 99-114.）

付記）2015年10月17日，18日に「第２回RLA研究会」が東京女子学園中学校･高等学校で開催された。その研究会は，伊禮三之氏（琉球大学教育学部附属教育実践総合センター）が研究代表を務め2014年～2016年の科学研究費助成を受けて行っている「探究的な学びを促すResearcher-Like Activityによる授業の事例研究」の一環として行われた。筆者は，その研究会において招待講演を務め，それを齋藤忠之氏（新潟大学教育学部附属長岡中学校）と風間寛司氏（福井大学大学院教育学研究科教職開発専攻）と共同で行った。本稿は，そのときの講演資料のうち，主に筆者が担当した部分を再検討･再構成したものである。

資料1　Otaのワークシートの記述（3時間目終了時）

問題を選択して追究　　3年 2 組 ＿ 番　氏名 Ota

研究課題

「円柱」を「円錐」に変更したら同じ結論がいえるのか？

【Q 2 − 1】

（仮定）
円錐は底面の半径がr，母線の長さがhである

ならば

（結論）
この図形の表面積は，底面積＋半径と母線の積の倍数となる。

★具体例をいくつか調べ，結論を予想し，証明しよう

中1の方法

底面の半径が3，母線の長さが5の場合

$3\times3\times\pi=9\pi$ ←底面積

$3\times2\times\pi=6\pi$

$5\times2\times\pi=10\pi$

$5\times5\times\pi=25\pi$

$25\pi\times\frac{6}{10}\pi=15\pi$ ←側面積

$9\pi+15\pi=24\pi$

A，24π

文字式にすると…

$r\times r\times\pi=\pi r^2$ ←底面積

$r\times2\times\pi=2\pi r$

$h\times2\times\pi=2\pi h$

$h\times h\times\pi=\pi h^2$

$\pi h^2\times\frac{2r}{2h}\pi=\frac{h^2\times2r}{2h}\pi$

$=\pi hr$ ←側面積

$\pi r^2+\pi hr=(r^2+hr)\pi$

A，$\pi(r^2+hr)$

もう1つの方法

底面の半径が3，母線の長さが5の場合

(半径＋母線の長さ)×円周÷2

$(3+5)\times(3\times2\times\pi)\div2$

$=8\times6\pi\div2$

$=48\pi\div2$

$=24\pi$　　A，24π

文字式にすると…

$(r+h)\times2\pi r\div2$

$=(2\pi r^2+2\pi hr)\div2$

$=\pi r^2+\pi hr$

$=(r^2+hr)\pi$

A，$\pi(r^2+hr)$

$\pi(r^2+hr)$

$=\pi r(r+h)$

$=\frac{2\pi r(r+h)}{2}$

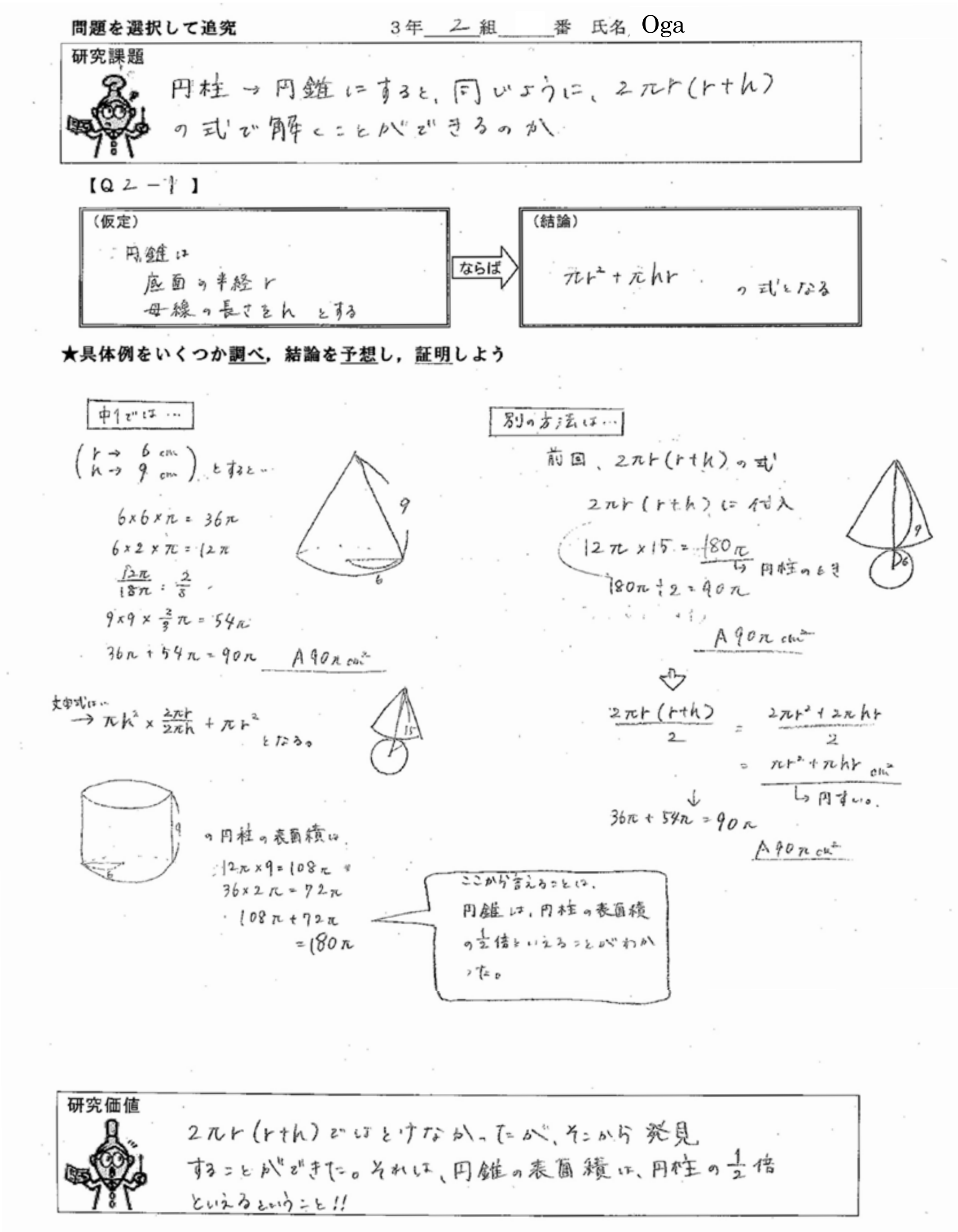
(半径＋母線の長さ)×円周÷2 の「もう1つの方法」の式と同じになる。

研究価値

見方が違っても，「もう1つの方法」の式と一致する。

※中１の方法で，具体数を用いて表面積を求めてから，文字に置き換えて同様の計算をして表面積を $\pi(r^2+hr)$ と求めている。その後，もう１つの方法でも，先と同じ流れで進め，表面積を $\pi(r^2+hr)$ と求めている。そして，２つのそれぞれの方法で求めた結果が一致することが明らかにされている。証明方法としては対等型を採用している。さらに，円錐の表面積 $\pi(r^2+hr)$ が，円柱の表面積 $2\pi r(r+h)$ の 1/2 になることを確かめていると思われる記述も見られる。

資料２　Ogaのワークシートの記述（３時間目終了時）



問題を選択して追究　３年 2 組 ___ 番　氏名 Oga

研究課題
円柱 → 円錐にすると、同じように、$2\pi r(r+h)$の式で解くことができるのか

【Q２－１】

（仮定）
円錐は
底面の半径 r
母線の長さを h とする

ならば

（結論）
$\pi r^2 + \pi hr$ の式となる

★具体例をいくつか調べ，結論を予想し，証明しよう

中1では…
$\begin{pmatrix} r \to 6\text{ cm} \\ h \to 9\text{ cm} \end{pmatrix}$ とすると…
$6 \times 6 \times \pi = 36\pi$
$6 \times 2 \times \pi = 12\pi$
$\frac{12\pi}{18\pi} = \frac{2}{3}$
$9 \times 9 \times \frac{2}{3}\pi = 54\pi$
$36\pi + 54\pi = 90\pi$　A $90\pi\text{ cm}^2$

文字式には
→ $\pi h^2 \times \frac{2\pi r}{2\pi h} + \pi r^2$ となる。

の円柱の表面積は
$12\pi \times 9 = 108\pi$
$36 \times 2\pi = 72\pi$
$108\pi + 72\pi = 180\pi$

ここから言えることは、
円錐は、円柱の表面積の$\frac{1}{2}$倍といえることがわかった。

別の方法は…
前回、$2\pi r(r+h)$の式
$2\pi r(r+h)$に代入
$12\pi \times 15 = 180\pi$ ← 円柱のとき
$180\pi \div 2 = 90\pi$
A $90\pi\text{ cm}^2$

$\frac{2\pi r(r+h)}{2} = \frac{2\pi r^2 + 2\pi hr}{2}$
$= \pi r^2 + \pi hr\text{ cm}^2$ ← 円すい。
$36\pi + 54\pi = 90\pi$
A $90\pi\text{ cm}^2$

研究価値
$2\pi r(r+h)$ではとけなかったが、そこから発見することができた。それは、円錐の表面積は、円柱の$\frac{1}{2}$倍といえるということ!!

※中１の方法で，具体数を用いて表面積を求めてから，文字に置き換えて同様の計算をして表面積を $\pi h^2 \times \frac{2\pi r}{2\pi h} + \pi r^2$ としている。円錐と円柱の表面積をそれぞれ中１の方法で具体数を用いて求めた結果を比べ，表面積は円錐が円柱の 1/2 になると類推し，それを以前求めた円柱の表面積 $2\pi r(r+h)$ に適用して，円錐の表面積を $\pi r^2 + \pi hr$ とし，数値を代入して中１の方法で求めた結果と一致することを確かめている。ただし，この文字式の結果が中１の方法で求めた式と一致することは確かめていないと考えられる。