学校数学における「深い学び」概念の考察
―広義の数学化過程としての問題解決活動の観点から―

A Consideration of “Deep Learning” Concept in School Mathematics:
From a Viewpoint of Problem Solving Activity as Mathematization Process of the Broad Sense

井口　　浩[*1]・神林　信之[*2]・星野　将直[*3]

1　はじめに

文部科学省(以下，文科省）は，資質・能力の育成を軸に，次期学習指導要領に向けた改善の方向に「主体的・対話的で深い学び」の実現を位置付けた。「幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について（答申）」(平成28年12月21日pp.49-52）には，これら学びの三側面を基に授業改善の視点が示された。以下に，「深い学び」の解説を引用する。

> 習得・活用・探究という学びの過程の中で[※1)]各教科等の特質に応じた見方・考え方を働かせながら，[※2)]知識を相互に関連付けてより深く理解したり，情報を精査して考えを形成したり，問題を見いだして解決策を考えたり，思いや考えを基に創造したりすることに向かう[※3)]「深い学び」が実現できているか。[1)]（※番号筆者）

このことを受け，学びの三側面をどのように成立させるかという指導法が多く論じられている中，東京大学　大学総合教育研究センター　中原淳研究室，日本教育研究イノベーションセンターが開設しているサイト『未来を育てるマナビラボ』では，《「主体的·対話的な学び」はイメージできるのですが，「深い学び」とは，どういうことを指すのですか？》と「深い学び」に焦点付け，前述の内容に解説を加えている。[2)]また，松下(2015)や溝上(2015)は，学習に伴う内的活動と外的活動の両面における能動性に着目して「深い学び」を論じている。[3)] [4)]

一方，中央教育審議会　初等中等教育分科会　教育課程部会　算数・数学ワーキンググループ（平成28年8月26日p.159）は，以下のように解説している。

> 算数・数学では，既習の数学に関わる事象や，日常生活や社会に関わる事象について，「数学的な見方・考え方」を働かせ，数学的活動を通して，新しい概念を形成したり，よりよい方法を見いだしたりするなど，新たな知識・技能を身に付け，知識の構造や思考，態度が変容する「深い学び」を実現することが求められる。[5)]

このことは，平成29年3月に告示された新学習指導要領において，算数と数学それぞれの「指導計画の作成と内容の取扱い」に反映されている。しかし，その内容を授業レベルでより具体的に議論し理解することは，これから…という状況にある。

学校数学における「深い学び」とは何であろうか。先述の「深い学び」の解説は，※１前提条件－※２付帯条件－※３中心結論で捉えられる。その視点から「算数・数学で求められる深い学び」の解説の大まかな構造を次図1のように捉えたとき，それを具体的にどう読み込めば,「指導計画の作成と内容の取扱い」としての現実的な指針が得られるであろうか。

2017.10.20　受理
[*1]新潟大学大学院教育学研究科教育実践開発専攻
[*2]鎌倉女子大学児童学部児童学科
[*3]愛知淑徳大学文学部教育学科

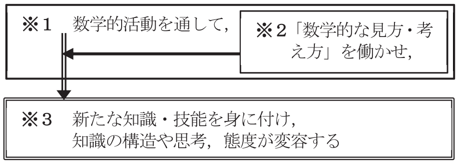


図１　「算数・数学で求められる深い学び」の解説の大まかな構造

「学び」は，動詞「学ぶ」の転成名詞である。「深い」は，物事の程度や様子を表す形容詞であり，ここでは「学び」に係る。学校数学において「学びの深さ」の程度の違いは，何をもってどのように説明できるだろうか。

２　本稿の目的及び目標

本稿では，学校数学における「深い学び」の概念をより明確にすることを目的とし，次の２点を目標とする。

①図1の「深い学び」につながる「数学的活動」（※１）及び特に「知識の構造の変容」（※３）の具体的内容を明らかにする。

②図1において特に「知識の構造や思考の変容」（※３）に着目し，必要となる「数学的な見方･考え方」（※２）の具体的内容を明らかにする。

３　学校数学における「深い学び」の概念に対する検討

本稿では，主に故新潟大学名誉教授金子忠雄氏の算数・数学教育における理論的視座から論じる。なぜなら，同氏は，かつて理論研究中心であった分野に，教育現場における授業実践事例を認知論的考察と自身の経験と独自の発想から価値付け，実践的理論を構築しており，特に，学校数学における数学的諸活動と問題との関係に関する研究の知見は，「主体的・対話的で深い学び」の本質的な意味や構造を考える上で示唆に富むものだからである。

以下では，まず，「深い学び」を対象化するために，3.1節でわれわれの「学び」の意味に対する見解を述べ，3.2節で学校数学における「深い学び」と「主体的な学び」や「対話的な学び」との関係を検討しておく。その上で，3.3及び3.4節で学校数学における「深い学び」の概念を，金子氏の理論を基に考察する。3.3節では目標①に対して，3.4節では目標②に対して，事例を加えながら回答を示す。

3.1 「学び」の意味

「学び」の意味の捉え方には，少なくとも次の二つの立場がある。一つは，「学び」とはこうあるべきだとする理想像を意味に含める立場であり，もう一つは，そのような理想像を意味に含めない立場である。前者の立場として，佐藤学氏が論じている「学び」が挙げられる。同氏（2000）の著書『「学び」から逃走する子どもたち』[6)]は，そのことを示している。一方，算数・数学の授業において「「学び」に主体性と独自性を」と主張している金子氏は，後者の立場である。

文科省の「主体的･対話的で深い学び」の「学び」は，後者の立場で解釈するのが適切である。なぜなら，前者の立場で「主体的な学び」の意味を読み取ろうとすると，「学び」に主体的な営みが含意されているため，“頭痛が痛い”という類の重複表現を使うことになるからである。

本稿では，後者の立場に立ち，「学び」を《何らかの経験を通して変容すること》とする。これは，「学び」が，ある理想的な姿に近付くか，かけ離れるかどうかは，経験の質に関わってくるという相対的な立場である。

3.2 「学び」の三側面の関係

金子ら（2002）は，規範的絶対的な「閉じた学校数学」では，機械的受容的な数学の学びに陥り，包容的相対的な「開いた学校数学」では，個性的協働的な数学の学びに向かうと考えている。その上で，学校現場で理想と現実の間で葛藤している教師が，後者の「学び」への接近を図り確かな学力を育成する学校数学の在り方について，具体的に提言している。その中で，数学科授業における「問題解決活動の意図別類型」と「主体性・社会性」との関係について，下図を示して述べている。以下に一部を引用する。

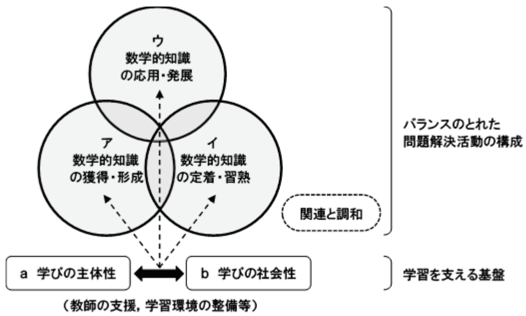


図２　確かな学力の育成を可能にする数学科授業の概念図

（…前略…）数学的活動（数学科授業における問題解決活動）には，（…中略…）「数学的概念，原理，方法，見方，考え方（以下，数学的知識と呼ぶことにする）」の，「ア　獲得・形成」をねらうもの，「イ　定着・習熟」をねらうもの，「ウ　応用・発展」をねらうもの，の３つのタイプの活動があります。（…中略…）
上記いずれの問題解決活動を行う際にも，次の２つが大切です。
a　学習者が，興味，問題意識，課題をもち，自ら主体的に学ぶこと（主体性）
b　学習者が，他との豊かなかかわりの中で協働，合意しながら学ぶこと（社会性）
わたしたちは，上の「a」「b」を基盤にしながら，「ア」「イ」「ウ」を３本の柱として，互いに密接に関連させながら数学科授業を行うことが，確かな学力の育成を可能にすると考えています。（金子ら，2002，p.22，[7] 下線筆者）

「主体的な学び」は，対象とかかわる自己を形成することであるため，「a　学びの主体性」に相当する。「対話的な学び」は，対象を介して他者との関係を構成することであるため，「b　学びの社会性」に相当する。「深い学び」は，対象そのものに対するアプローチや対象そのものの構成をすることであるため，それは，「数学における問題解決活動の意図」が指す「ア　知識を獲得·形成すること」や「イ　知識を定着・習熟すること」や「ウ　知識を応用・発展すること」であり，「ア」「イ」「ウ」は学びの深さの程度と関係すると考えられる。同時に，これらの「意図別問題解決活動」が，図1における「深い学び」につながる「数学的活動」（※１）といえる。

以上から，「主体的・対話的で深い学び」が意味する学びの三側面は，先の図2を基に「深い学び」を中心に考えると，《学習者は「主体的な学び」と「対話的な学び」の相互作用を伴いながら「深い学び」に向かう》という関係として捉えられる。

学校数学における「深い学び」に焦点付けて考察する本稿においては，金子氏らが示している具体的構造に着目して論じることとする。

3.3 「意図別問題解決活動」の観点からみた学校数学における「深い学び」の概念の整理

本節では，《数学的知識を獲得・形成し，定着・習熟し，さらに応用・発展する》という数学の学びを支えるとされる「意図別問題解決活動」の観点から，学校数学における「深い学び」の概念を考察する。

⑴　学校数学における問題解決活動の流れ

中央教育審議会　初等中等教育分科会　教育課程部会（平成28年8月26日p.163）は，以下のとおり算数・数学の学習過程の概念図を示している。[5]

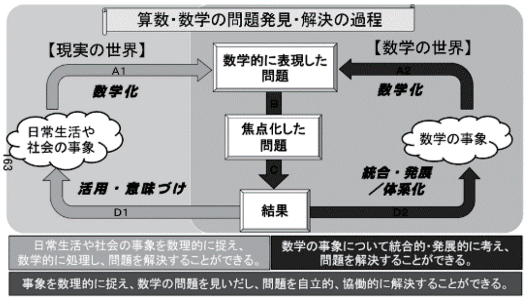


図３　算数・数学の学習過程の概念図（文科省）

この図は，数学の事象だけでなく日常生活や社会の事象から数学の問題を発見し解決することの重要性を示すとともに，概念の形成，体系化の過程を端的に示している。しかし，この学習過程自体が「深い学び」とどう関係しているのか，その過程が問題解決の意図に応じてどのような意味をもつのかについて，この図だけから読み取ることは難しい。

一方，金子ら（2002）は，学校数学において現実的世界とのかかわりや一般化の重要性を指摘し，先の図2における問題解決活動の意図「ア」「イ」「ウ」に応じた活動について，下図「学校数学における問題解決活動の流れ」を用いて論じている。[7]

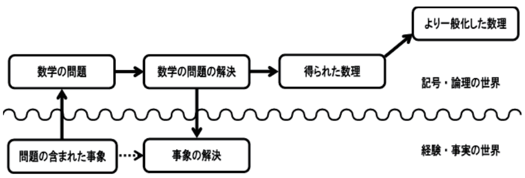


図４　学校数学における問題解決活動の流れ

これは「数学化」を基にしており，同様の図式は先の図3や文部省（1999）の「数学的活動」[8]，OECD（2007）の「数学化サイクル」[9] 等に見られる。

「数学化」とは，「mathematizing」の訳語で，Freudenthal（1968）は，それを「蓄積された内容の数学的方法による組織化」とし，人間の活動としての数学の重要性を強調している。[10] 同氏（1973）は，「学生は数学化することを学ぶべきである―私が意味するのは，始めるのに，現実の場面を数学化する

ことである。数学的な場面を数学化することは終点であって，出発点ではない。」[11] と述べている。

Lange（1987）は，現実の場面への応用の重要性も指摘し，Freudenthalの先述の概念に対する包括的な視点から「数学化」の概念を述べている。[12]

金子氏は，学校現場の授業研究と関連付けた自身の研究及び大学におけるゼミナール等を通して，生活単元学習と教科単元学習及び総合単元学習のメリットとディメリットを踏まえ，各長所を統合的に生かすカリキュラムモデルの検討を重ねた。その結果，日常的・社会的な事象を数学化する場合も数学的事象を数学化する場合もあることから，学校数学の連続した指導系列の要所，要所に位置付く出発点を「問題の含まれた事象」としている。このような問題場面から数学が現われ再構成と活用がされていくという広義の数学化過程の立場において，いずれの場合の事象も児童・生徒にとって生活経験や学習経験から学習価値が触発されるリアリティーが重要である。

図4の「得られた数理」とは，数学の理論でありモデルとされる。それは，既習の数学的知識と，「数学的な見方・考え方」とを基にして得られた新しい数学的な概念や原理である。「より一般化した数理」とは，より一般的で広く解釈と活用が可能な形にしたレベルの理論を指す。例えば，「三平方の定理」は各辺に立つ図形の形状に着目すると，正方形の場合よりも正多角形や半円の場合が，それらの場合よりも相似図形の場合が，「より一般化した数理」である。

⑵　モデリングのタイプの視点からの分析・検討

金子氏は，教育学部数学科4年生とのゼミナール（以下，金子ゼミナール）で，数学学習における知識形成の在り方について，認知科学の視点を入れて検討している。本節では，主に当時の学生の卒業論文（1987-1991）を取り上げ，特に学校数学における問題解決活動の中でのモデリングの位置付けに関する知見について，問題解決活動の流れ（図4）とその活動の意図（図2の「ア」「イ」「ウ」）を関連付けて分析・検討する。

一般的に，数学的モデリングは，数学化過程とほぼ同義で用いられている。それは，現実の世界における問題の解決を目的として，その問題を数学の世界に翻訳し数学的モデルをつくり，それを用いて処理し，その結果を現実の世界で解釈し検討するという一連の活動であるとされている。一方，金子氏は，学校数学におけるモデリングを，知識形成の機構として，より開くことを強調している。

①　問題解決活動の意図と知識形成機構との関係

金子ゼミナール（1987）は，J.S.Berry, D.N.Burghes, I.D.Huntkey, D.J.G.James.（1984）の著書[13] を参考テキストとし，学校数学におけるモデルとモデリングの類型について論じている。モデルについては，理念モデルと具体的モデルを，理論体系を捉え直すためか具体的事象を捉え直すためかという目的と，直接的に構成するのか間接的に構成するのかという方法の視点から整理している。モデリングについての見解は，次のように要約される。[14]

・モデリング1…現実の事象の中から要因を分析して，新しい理論を構築する。
　①学習者にとって新しい数学の理論を開発し，②さらに数学の知識を体系付ける。
・モデリング2…新しい問題状況に直面した時，要因を分析して，既有の知識体系を捉え直し，その状況に最も適した形で当てはめる。
　①既有の数学の知識を応用して，経験・事実の世界で発生した問題を記号・論理の世界の問題にうつしたり，②記号・論理の世界で得られた解を経験・事実の世界にもどしたりする。
・モデリングを，事実をもって後追い的に検証するもので閉じず，見通しをもって先取り的に適応するものへ開くために，次のことを保障する。一つは，モデルを体系的に捉え直すことであり，特にモデリング1①として意識的に行うこと。もう一つは，つくったモデルの用い方を着想したり用いる対象を探索したりすることであり，モデリング2①において確実に行うこと。

金子ゼミナール（1988）は，Robert B.Davis.（1984）の著書[15] を参考テキストとし，検討を進めている。当ゼミでは，知識形成の機構に着目し，それを次のように捉えている。[16]

・上昇過程…「モデル形成」及び「モデル理解」という，新しい知識の獲得の達成を指す。
・下降過程…「モデル選択」及び「モデル適用」という，知識の適用を指す。

ここまでの内容を対照すると，以下のように整理される。

・モデリング1①は，「モデル形成」に相当する。
・モデリング1②は，「モデル理解」に相当する。
・モデリング2①②は，「モデル選択」及び「モデル適用」に相当する。

さらに，当ゼミは，金子氏の指導のもと，モデリング1②は「広い立場からとらえ直し，新しい高次な数学的知識体系を作り出す」ことであるから，そ

れを「再体系化」とし，「学校数学では，知識の再体系化には３つのパターンがある」と言及している。[16] その詳細については後述することとする。

最後に，金子ゼミナール（1991）の報告を取り上げる。当ゼミでは，前年度ゼミ（1990）に引き続き，James Hirbert.（1986）の著書[17] を基に，「概念的知識と手続き的知識」という視点から知識を捉え，それらの形成の在り方を，認知的支援機構の視点から論じている。このことに関わる考察は，後節3.4で行うこととして，ここでは，原理・技能(それは既に学んだものもあれば新たに学んだばかりのものもある）を活用するときの四つの様相についての記述を，以下に引用し検討を加える。

①『広げる』…個々に学んだものを統合する。
②『深める』…別々に思っていたことを，前提より体系的にとらえ直す。
③『適用』……学習に用いられた題材・場面と類似な場面において，原理・技能を再生する。
④『数理化』…学習に用いられた題材･場面とは，あまり似ていない異質な場面において，原理・技能を活用する。
（金子ゼミナール，1991，pp.4，9，[18]）

この内容と先に整理した内容を対照すると，以下のように整理される。

・『広げる』は，ある条件範囲において，いくつかの事例で段々と学んだことを原理としてまとめることであるから，「モデル形成」に相当する。
・『深める』は，ある条件範囲においてまとめた原理と，別の条件範囲において考えた原理とをつき合わせて振り返り，両者がある前提のもとでどのように位置付けられるかを明確にすること，つまり先述の「再体系化」であるから，「モデル理解」に相当する。
・『適用』も『数理化』も，学んだことを他の場面へ用いることである。しかし，用い方の質が異なるので，前者は「モデルの選択・適用」，後者は「モデルの選択・活用」と区別される。

さらに，問題解決活動の意図(図2の「ア」「イ」「ウ」）と照らすと，以下のように整理される。

・『広げる』及び『深める』は，「モデル形成」及び「モデル理解」だから，「数学的知識の獲得･形成」に該当する。
・『適用』は，類似場面への「モデル選択・適用」だから，「数学的知識の定着･習熟」に該当する。
・『数理化』は，異質場面への「モデル選択･活用」だから，「数学的知識の応用･発展」に該当する。

モデルは，本節3.3の⑴で述べたように，図4の「得られた数理」や「より一般化した数理」に当たる。以上をまとめると，次のように整理される。

問題解決活動の意図	知識形成の機構	
数学的知識の ア　獲得・形成	i　数理の形成 （広げる）	上昇過程
	ii　数理の理解：再体系化 （深める）	
イ　定着・習熟	類似場面への 数理の選択・適用	下降過程
ウ　応用・発展	異質場面への 数理の選択・活用	

図５　問題解決活動の意図と知識形成機構との対応

図5から，再体系化が数学的知識への理解を「深める」ことであることから，《算数科・数学科授業において，数学的知識が再体系化された状態で獲得・形成されているとき，はじめて「深い学び」をしている》といえる。その上で，《「深い学び」の質(学びの深まり）は，獲得・形成された数学的知識がどのようにどの程度定着・習熟され応用・発展されるかという，知識の発展性と有用性の認識の観点から解釈される》といえる。

②　広義の数学化過程の観点から見た「深い学び」

本節3.3の⑵①では，問題解決活動の意図と知識形成の機構との対応を基に，学校数学における「深い学び」の意味を述べた。以下では，その「深い学び」の意味を，図4の問題解決活動の流れの中で，問題解決活動の意図別に，知識形成の機構を基に考察してより明確にする。その具体的内容について，主に金子（1984）及び金子ゼミナール（1987，1988）に見られる，問題解決活動の中でのモデリングの位置付け方について検討した結果を基に，小学校５年単元「図形の面積」の事例を補足しながら述べる。

ア　数学的知識の獲得・形成

i　数理の形成

この過程を，金子ゼミナール（1987，1988）では，学習者は「既有の知識体系」をもって「数学の問題」の定式化及び解決にあたるが，既有の概念・原理・見方・考え方(以下，前節3.2で引用した金子ら（2002）の用語と同様，概念･原理･見方･考え方は「数

学的知識」とする）を適用しようとしても解決が困難な場合，「新しい数学的知識」を導入して解決を図る。それは「事象の解決」（解明）を果たしつつ，一方で導入した「新しい数学的知識」を理論としてまとめ，つくりあげることであるとしている。[14][16]

この上昇過程は，図4の中では，「問題の含まれた事象」→「数学の問題」→「数学の問題の解決」→（→「事象の解決」→）「得られた数理」→「より一般化した数理」に位置付けられるので，図6のように考えられる。

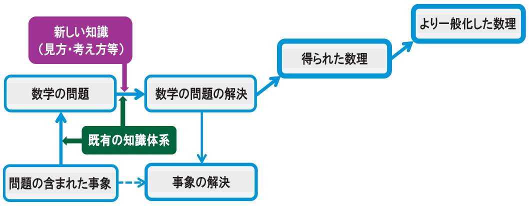


図6　数学的知識の獲得・形成（ｉ　数理の形成）

「得られた数理」ないし「より一般化した数理」をゴールとした過程に“上昇”の意味がある。特に重要なのは，数理を見いだし，より一般化することを目指すこと，そのために「数学的な見方･考え方」を働かせること（詳細は後節3.4）である。

【補足：小学校５年「図形の面積」】

平行四辺形の面積学習を例にすると，先述の「既有の知識体系」は，長方形の面積学習で得られた長方形と正方形の求積公式である。既習の長方形における求積決定要素は縦と横であるが，平行四辺形においては縦と横にあたる量がはっきりしていない。児童は，平行四辺形を底辺に対して下ろした垂線に沿ってハサミで切り，裁ち合わせ（等積変形）を行って，面積が「底辺と高さとの積」で求められることを見いだし，それについて場合を尽くして確かめる。「数学的な見方・考え方」の働きは，「平行四辺形を長方形に変形して関係付けること」であり，「得られた数理」は，平行四辺形の求積公式である。

ⅱ　数理の理解（再体系化）

この過程を，金子ゼミナール（1987，1988）では，学習者は「得られた数理」と「既有の知識体系」とをつき合わせて（接続して）「新しい知識体系」をつくる，再体系化であるとしている。[14][16]

再体系化は，細かく見れば，数理をより一般化する過程で既に起こっていると考えられるが，本稿では，形成された数理や形成過程を省察して行われることに限定する。したがって，この上昇過程は，図6の『数理の形成』からつながる次の過程なので，さらに「新しい知識体系」を加えると，図7のように考えられる。

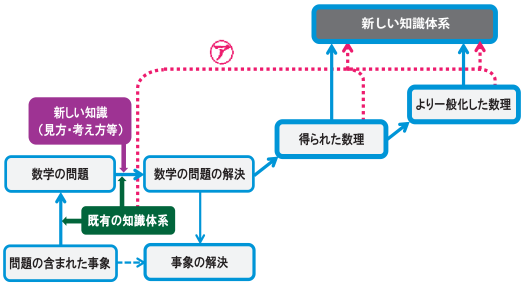


図7　数学的知識の獲得・形成（ⅱ　数理の理解）

図中の点線㋐は，問題解決活動の流れの図では見えにくい上昇過程における重要な機能を示している。『数理の理解』では，「既有の知識体系」よりも高次な「新しい知識体系」をつくることをゴールとした再体系化の過程に“さらなる上昇”の意味がある。

再体系化とは，「数理」がその都度「新しい知識体系」の中でどう位置付くかを確定することであるから，当ゼミは，これを「定位」とも呼び，それが「自己化された数学学習」（課題の設定・解決への自己関与性と知識の自己内再体系化と応用の働きをもった学習）には「定着」以前に必要であるとしている。

金子（1984）は，認知的葛藤に基づいた問題の発生と解決の様相を，学校数学の連続した指導系列の要所，要所で実現するという立場から，先述の「自己化された数学学習」の考え方をもって検討し，その類型を三つに整理している。[19] それが，本節3.3の⑵①で保留にした「学校数学における知識の再体系化の３類型」であり，図1における特に「知識の構造の変容」（※３）を具体的に示すものである。それは，数学の本質にかかわって目から鱗が落ちる経験をもたらす。これについて，本習の中心内容をM2，それに対する先行の関連内容をM1，M1´とし，それらの接続について見ていく。各類型の名称は，金子ら（1989）[20] 以降，以下のように用いられている。

a）累積包括型

累積包括型とは，M1に含まれている中心となる数学的原理がより広いM2にも一貫して通用することに

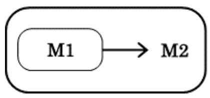


図８　累積包括型

伴って，数学的知識の枠組みが拡大するタイプである。

例えば，小学校算数科で学習する負以外の有理数における加法(M1)と,中学校数学科で学習する正・負の有理数における加法(M2)との関係は，これに当たる。

“M2における数は，M1と違って，量だけでなく符号がある。果たしてM2は，M1と同じように加法を考えることができるだろうか？”と思うことであろう。

しかし，M1における数に符号が省略されているという見方により，M1において中心となる原理は，線分の操作に伴う絶対値の決定原理(アルゴリズム)から，有向線分(矢印)の操作に伴う絶対値と符号の決定原理(アルゴリズム)に自然と読み替えられる。そして，その原理が量と方向をあわせもつ数どうしを足すという，より広いM2にも一貫して通用し，それに伴って有理数の加法の知識の枠組みが拡大する（cf.後節3.4の⑸B1の具体事例)。

b）併立統合型

併立統合型とは，M1に含まれている数学的原理とM1´に含まれている数学的原理が全く対立していて，それにより互いの特徴が際立つとともに，それらの原理を統合して新しくM2をつくるタイプである。

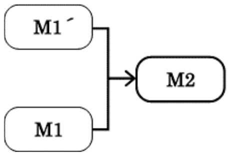


図９　併立統合型

例えば，中学校数学科で学習する一元一次方程式の意味・解法(M1)と，高等学校数学科で学習する一元一次不等式の意味・解法(M1´)との関係は，これに当たる。

“M1の方程式は未知数がある一つの値のときだけ相等関係が成り立つのに対し，M1´の不等式は未知数があるいくつかの値の集合によって大小関係が成り立つ。主要な変形原理も，前者が等式の性質であるのに対し，後者は不等式の性質であり，負の数を乗じる場合や負の数で除する場合に用いると不等号の向きが与式とは逆転する。このように異質で対立して見える両者を，果たしてまとめて見ることはできるだろうか？”と思うことであろう。

しかし，いずれも，恒等式や絶対不等式と違って，左辺と右辺が対等で相対的な関係式であり，それゆえその関係を成立させる条件(解)を，最も簡単な関係式として求めることを要請している条件命題である。このような視点から両者の解法を統合すると，関係式の意味に基づき，目的に合わせながら主要な両辺型相殺の変形原理と計算基本法則とを交互に活用するという，新しい共通原理M2がつくられる。

c）飛躍回帰型

飛躍回帰型とは，M1とM2との間では，中心となる数学的原理に飛躍があるが，M1から態度変更した点を明確にしてM2をつくりつつ，M2の視点からM1を捉え直すタイプである。

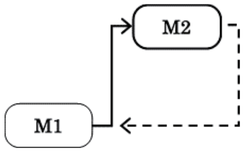


図 10　飛躍回帰型

例えば，小学校算数科で学習する図形の全体的・区分的な捉え方(M1)と，中学校数学科で学習する図形の分析的・関連的な捉え方(M2)との関係は，これに当たる。

三角形を例に挙げると，M1においては，①三角形は三つの辺と三つの角がある図形である，②閉じた基本図形の三角形と開いた基本図形の平行線との関連性は問題にされない，③二等辺三角形と正三角形は長さが等しい辺の数が違うので別々の三角形である，というような捉え方をしている。①のような定義と性質が融合された全体的な捉え方は，M2において定義，性質，なるための条件の３点から分析し，図形の内的関連を明確にした捉え方へと切り替わる。②や③のような形状から見て取られる特徴に基づく区分的な捉え方は，M2において前提となる図形の定理とそこから導かれる図形命題という外的関連を明確にした捉え方や，一般と特殊という包摂関係を明確にした捉え方へと切り替わる。

これらの切り替わりを見直すと，M1では図形の特徴を直観的に網羅し，図形を識別するという分かり方が重視され，M2では図形の特徴や図形間の関係を整理し，順序や筋道を立ててまとめるという新しい分かり方が重視されることが分かってくる。

【補足：小学校５年「図形の面積」】[21）]

長方形の求積公式と平行四辺形の求積公式との接続は，累積包括型である。それは，長方形には「縦と横との積」という固有の原理があるが，長方形にも平行四辺形にも「底辺と高さとの積」という一貫した原理が見られるからである。同様に，平行四辺形の求積公式と三角形の求積公式との接続も累積包括型であるし，さらに，三角形の求積公式と台形の求積公式との接続も累積包括型である。なぜなら，これらはいずれも「図形の中心線の長さと高さとの積」（パップス・ギュルダン）という原理が見られるし，大まかに見ても「底辺と高さとの積」という

原理が一貫して見られるからである。

次に，ひし形の（対角線）×（対角線）÷2という求積公式は，底辺や高さ以外の構成要素で作られているので，先に述べた長方形から台形までの求積公式とは対比的である。しかし，いずれも「直交する構成要素の長さの積」という視点で統合できるので，併立統合型である。

さらに6年生の学習に言及すると，（半径）×（半径）×（円周率）という円の求積公式を，既習の三角形や四角形の面積学習のみから類推することは難しい。その要因には，円は曲線図形であるため，方眼で考えることが難しいこと，底辺や高さや対角線にあたる量が見いだせないこと，円を分割・変形しても既習の三角形や四角形に帰着できるとは考えにくいこと等がある。そこで，5年時の円周の学習経験を生かした新たな視点：（円に内接する正方形の面積）＜（円の面積）＜（円に外接する正方形の面積）というはさみうち法，（円の面積）＝（半径を1辺とする正方形の面積，つまり半径×半径）×（決まった数）という関数的な考え方等を手掛かりにして，求積公式を見いだす。その公式にも既習の図形と同様に「直交する構成要素の長さの積」が関わっていると解釈し直せるので，飛躍回帰型である。

なお，知識の再体系化を促す方略として，次のことが有効であると考えられる。[22]

a）累積包括型の場合

・中心概念や原理が一貫していることを捉えること。

・本習内容の新しさに気付くことにより，原理の適用される範囲が拡がったことの意味やよさを捉えること。

b）併立統合型の場合

・既習内容と本習内容とが対比されている関係であることに気付くこと。

・新たな視点を発見，導入し，既習内容と本習内容とを統合的に捉えること。

c）飛躍回帰型の場合

・既習内容の原理や見方と全く異質の原理や見方の存在に気付くこと。

・見いだした事柄の意味やよさに着目するとともに，それを用いて既習内容が否定されずに解釈し直せることに気付くこと。

イ　数学的知識の定着・習熟

この過程について，金子ゼミナール（1987，1988）では，学習者は，「既有の知識体系」の中から，「問題の含まれた事象」の解決に適当な数学的知識を選択し持ってくる。そして，それを使って，「問題の含まれた事象」を「数学の問題」に定式化し，その問題を解決し，元の事象に戻して事象の解決を図る。さらに，用いた数学的知識を，具体的な適用条件の理解という点で強化して，「既有の知識体系」にとり込むことであるとしている。[14][16]（下線筆者）

選択・適用する数理とは，上述の数学的知識を指し，その引き出し元が「既有の知識体系」である。『数理の選択・適用』は上述のとおりであるが，細かく見れば，『数理の形成』過程においても行われていることである（cf. 本節3.3の(2)①「原理・技能を活用する」ことの意味，本節3.3の(2)②アⅰ）。その上で，ここでは，『数理の形成』及び『数理の理解』からの連続した過程として，『類似場面への数理の選択・適用』について論じることとする。その場合，下線部の「既有の」は「既有となったばかりの（なりつつある）新しい」という意味をなすため，問題解決活動の流れの中では「新しい知識体系」を指す。

この場合の下降過程は，図7の『数理の理解』からつながる次の過程であり，スパイラルに深まる習熟過程なので，図11のように考えられる。

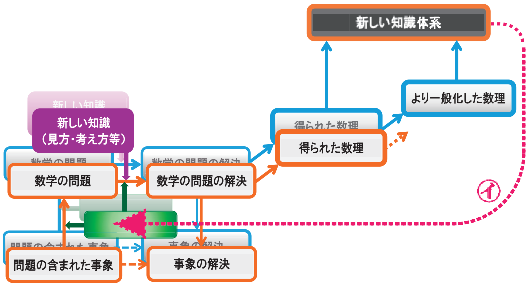


図11　数学的知識の定着・習熟
（類似場面への数理の選択・適用）

図中の点線㋑は，数学的知識の獲得・形成のために取り組んだ場面と類似した「問題の含まれた事象」に「（既有となったばかりの）新しい知識体系」を適用して「数学の問題」に定式化し解決を図ることを表しており，問題解決活動の流れの図では見えにくい下降過程における重要な機能を示している。

例えば，中学校数学科の単元「一元一次方程式」において，基本的な，または標準型の方程式を解くことを通して，その解法の原理及びアルゴリズムを仲間と共につくった後は，まだ扱われていない方程式はどういうタイプがあるかについて考え「数学の問題」として確認することから始める。このこ

とを，授業の中で教師による支援のもと，生徒が思考し判断し共有して実現するのである。そのために，教師は，この場合の対象の領域(scope) 及び系列(sequence) の確定を，まずは数学的知識の獲得・形成と定着・習熟の両方を見据えて行い，教材を構成する必要がある。事象から問題を顕在化させ対象化するために，図12のような２次元マトリクス等を用いることは，一つの教授＝学習方略とされている（cf. 金子ゼミナール，1988，p.12．同ゼミナール，1989，p.10．[23] 金子ら，2002，p.17．他)。

左辺 / 右辺	$cx+d$	cx	d
$ax+b$	M_{11} $ax+b=cx+d$	M_{12} $ax+b=cx$	M_{13} $ax+b=d$
ax	M_{21} $ax=cx+d$	M_{22} $ax=cx$	M_{23} $ax=d$
b	M_{31} $b=cx+d$	M_{32} $b=cx$	M_{33} $b=d$

※M_{33}は方程式にならない

図12　$ax+b=cx+d$に基づく一元一次方程式の類型

ここで取り組むべき「数学の問題」が確定すれば，数学的知識を解法として合目的的に適用しながら確かにしていくことになるので，点線㋑は，「数学の問題」から「数学の問題の解決」へと直接働く。

点線㋑の向きは図7の㋐の向きとは逆になっている点から“下降”の意味が見て取られる。なお，㋑は，対象のいくつかの場合で何回か繰り返される。「一元一次方程式」でいえば，係数や定数が整数のみの場合と小数や分数が含まれる場合，さらに左辺や右辺に括弧付きの一次式が含まれる場合と分数式の形が含まれる場合がある。方程式の複雑さに応じて数学的知識を調節的に適用することを通して，工夫した実行や着実な実行のための見方・考え方も身に付けながら，解法の習熟は一層図られる。

【補足：小学校５年「図形の面積」】

前図11のような，以前に取り組んだ場面と類似した「問題の含まれた事象」は，一般に次の要件を満たすものを扱うことが望ましい。[22]

〔内容面〕

・既習内容での場面を条件変更することによって発展的に追究できるとともに，既習内容の本質を捉え直すことができるもの。

・習得した学習内容を総合的に見直すことができるもの。

〔学習者との関わりの面〕

・以前の学習で習得した内容を使って，自分なりに追究できるもの。

・その学習者なりの妥当性や必要感に支えられての解釈や表現の仕方の違いが許容されたり生かされたりするもの。

例１：四角形や五角形の求積をしよう

四角形や五角形を既習の三角形や四角形に分割して面積を求める。四角形の場合，直角が二つで対角にある場合，直角が一つだけある場合，直角が全くない場合の順に求積していく。

例２：複合図形の求積をしよう

それは例えば，長方形を二つ繋げたＬ字図形である。その場合，二つの図形の面積の和と見なしたり，差と見なしたりする等の多様な求め方が想定される。

例３：折った後の図形の求積をしよう[24]

三角形，ひし形，たこ形を折り紙で折った後の図形(いずれも長方形) を提示して，元の図形を求めるという課題を提示する。児童は，追究を通して，対角線が直交している四角形と三角形の面積の求め方に共通点があることを捉え直していく。

例４：様々な問題に挑戦しよう

中学校入試の過去問題や，よく知られている求積問題を正確に速く解く。円の弧で囲まれた七宝文様にも見られる葉っぱ形(レンズ形)，勾玉形，ヒポクラテスの三日月等，６学年以降で扱う問題もある。

ウ　数学的知識の応用・発展

ここでは,『数理の形成』,『数理の理解』及び『類似場面への数理の選択・適用』という過程からの連続した過程として,『異質場面への数理の選択･活用』について論じることとする。

ウの場合は，問題解決活動の流れの中では「(既有となったばかりの) 新しい知識体系」から，適当な数学的知識を引き出してくる点は，イの場合と同じである。その反面，ウの場合は，その数学的知識をこれまでとは全く異なる「問題の含まれた事象」の解決に用いるため，用いる知識と用いる先の事象との関連が見えにくい点がイの場合と大きく違う。したがって，この下降過程は，次図13のように考えられる。

図中の点線㋒は，問題解決活動の流れの図では見えにくい下降過程における重要な機能を示している。

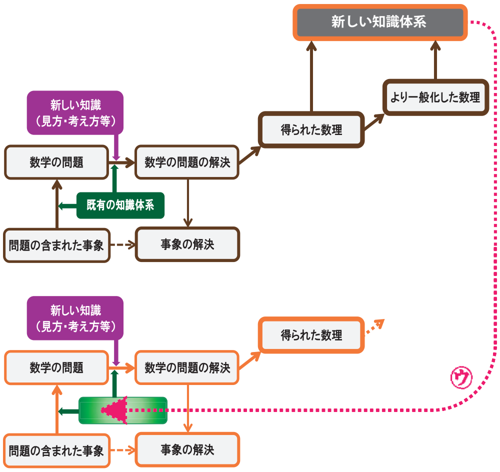


図13　数学的知識の応用・発展
(異質場面への数理の選択・活用)

例えば，中学校数学科の単元「一元一次方程式」において，方程式の活用による文章題解決は，『異質な場面への数理の選択・活用』を学ぶ一つの典型である。そこでは，方程式を活用できるように文章題そのものを捉え直す（対象の構造を読み取る）といった調整と，方程式の活用による解決過程や結果の検証(現実的制約を考慮した解の吟味・解釈・修正，文章題の解法の手順化）が必要となる。このことは例えば，数量やその関係(文脈）の理解が比較的容易とされる買い物場面の文章題であっても，２種類の未知数が含まれている場合や，より現実的な状況ゆえに不等式の文脈となっている場合に，今ある知識・技能を最大限発揮して一元一次方程式を活用するとなれば，なおさらである。このように，数理を選択して用いる場面が認知心理的により遠くのものになり，数理をより高度に用いる思考と態度が求められることが“さらなる下降”の意味である。

他にも，附属長岡中学校で編成している「数学的知識・技能の累積性・系統性を必ずしも前提としない，広義の問題解決活動を組織的に実行する特別カリキュラム」は，これに当たる。それは，「RLA」(Researcher-Like Activityの略称。市川(1996)が「研究者の研究活動の縮図的活動」として提言し[25]，それを受け金子氏の指導により当校は「研究者の研究活動に準ずる研究活動」と解釈）と「課題学習」である。いずれも，生徒が自ら「数学の問題」を設定し，問題解決活動を主体的に展開することをねらっているが，当校の場合，次のような特徴がある。

「RLA」は，ある単元の終末に（例えば，「式の計算」)，その単元で経験する数学的活動を活用して，数学的知識の一層の応用・発展を図る学習機会としている。また，通常の単元とは別に単元を特設し（例えば，「和算の探究」)，問題の設定・解決に必要な数学的知識の探索と総合活用を通して，知識の一層の応用･発展を図る学習機会としている。「数学の問題」の設定は，S.I.Brown, M.I.Walter（1983）のWhat-If-Not Strategy[26]を基に，生徒自身が行い，既習の数学的命題から多様な命題を派生させる。仮定における条件を少し変更しただけで，結論の予想や導き方に困難さが増すことにより，「異質場面への選択・活用」が求められる状況が作られる。問題解決活動は，生徒自身の研究活動として，既有経験の数学的活動自体を活用しながら展開される。[27]

「課題学習」は，通常の単元の題材とは別のトピックを設定して実施している。「問題の含まれた事象」を日常的・文化的な現実事象に求め（例えば，「手つなぎ」のグラフ事象,「ハノイの塔」のパズル事象)，そこから「数学の問題」を設定するという点で「異質場面への選択・活用」の態度を高めている。[28]

【補足：小学校５年「図形の面積」】

前図13のような，『異質な場面への数理の選択・活用』の学習を通して，児童・生徒の算数・数学に対する興味関心や学習意欲を一層喚起していく。そのための教材構成の視点として，一般に次のことが重要である。[22]

・学習者が自分なりの方法や多様な方法で追究できるようにすること。
・既習の算数・数学とは必ずしも累積性・系統性に依存しない課題を設定すること。
・学習者自身が課題を設定すること。

例１：周の長さが等しい図形は面積も等しいか？

周囲の長さ16cmの図形で最も大きい面積の図形はどんな形なのかを考える。児童は，既習の求積公式を使ったり，周囲16cmのひもを使って実験をしたりしながら，既有知識を総動員して追究し，“どうやら円らしい”ということを見いだしていく。

例２：動点問題に挑戦しよう

長方形ABCDから長方形EFGHを取り除いてできる凹八角形ABFEHGCDの周上を，動点Pが一定の速さで移動していく。このときにできる図形(例えば△APD）の面積が変化する様子を追究し，成果をまとめて発表する。

例３：数学の歴史に触れよう

数学史に見られる面積に関する様々な話題を，自

分なりに調べて発表する。例えば，古代エジプトや古代バビロニアでつくられた求積公式, 我が国の『塵劫記』の中の求積問題，居住市町村や都道府県の算額等，様々な発展問題が想定される。

③　ここまでの考察に対する省察と補足

②では，学校数学における「深い学び」について，前節3.1で示した「確かな学力の育成を可能にする数学科授業の概念図」（図2）を基に述べてきた。図2に立ち返って，「ア　数学的知識の獲得・形成」,「イ　数学的知識の定着・習熟」,「ウ　数学的知識の応用･発展」の位置付け方を見ると,「ア」と「イ」が対になっていて，その上に「ウ」がある。

「ア」と「イ」が対に位置付けられているのは，本節3.3の⑵②イで述べたように，「ア」は問題から新しい数学的知識体系をつくり上げるという上昇過程であるのに対し，「イ」はつくられた新しい数学的知識体系を問題に当てはめるという下降過程であるが，源となる問題群は「ア」も「イ」も基本的には領域が共通で類似しており，それらの問題の系統を基に「ア」と「イ」の過程を経て数学的知識体系は確かなものとなるからである。

一方，同じ下降過程でも「ウ」が「イ」より上に位置付けられているのは，本節3.3の⑵②ウで述べたように，数学的知識体系から，適当な数学的知識を選択して用いることを，「イ」がそれまでと類似した場面で行うのに対し，「ウ」は全く異なる場面で行うという点で高度化されるからである。

「ア」「イ」「ウ」の相互の関連は，一連の問題解決活動の流れの中で密に図られることがよく分かる。

3.4　学校数学における「深い学び」を支える「数学的な見方・考え方」

⑴　「数学的な見方・考え方」の捉え方

文部科学省（2017）「学習指導要領解説」では,「数学的な見方・考え方」は,「物事の特徴や本質を捉える視点」や「思考の進め方や方向性」を意味し，数学的に考える資質・能力を支え，方向付けるものであるとしている（小学校:算数編p.22, [29] 中学校:数学編p.21. [30]）。この見解を基に，前図1における※２の具体的内容の考察を進める。本稿では,「どのような数学的な見方・考え方が働くと知識構造が変容するのか」という，思考と知識との関係について検討する。そうすることにより，前節まで述べてきた知識構造の変容過程を詳細に分析でき，より具体的に「深い学び」の概念に迫ることができる。

ここでは，次の二つのことを踏まえて,「数学的な見方・考え方」を捉えることにする。

一つは,「数学的な見方・考え方」は単独で働いたりそれだけで身に付いたりしないということである。「算数・数学の知識・技能の習得」とあるように, 学習者の思考によって知識の獲得及び知識の構造化が生じているのである。したがって，知識形成において，思考を検討することに意味がある。なお，問題解決活動のみならず発見学習や講義形式の授業であっても，教師が知識形成を意図し適切な支援をすれば，学習者の思考は生じ得る。一方，班別学習で生徒の話合いがあっても，必ずしも活発な思考が生じるとは限らない。つまり，思考は学習形態に依存しない。

もう一つは,「数学的な見方･考え方」を「思考力･判断力・表現力等」という汎用的能力として育成するという考え方がある。とはいえ，知識形成における領域固有性を踏まえると,「より広い領域や複雑な事象において，思考・判断・表現ができる力を育成する」ことは容易ではないということである。

以上のことを踏まえると，前節3.3で述べた「ア　数学的知識の獲得・形成」の場面において，一般的で活用できる知識・技能とそのときの思考（「数学的な見方・考え方」の働き）を検討することが必要である。なぜなら，それを明らかにすることが,「イ　数学的知識の定着･習熟」,「ウ　数学的知識の応用･発展」へとつながっていくからである。

⑵　知識及び知識構造についての捉え方

算数・数学教育においては，広義の問題解決活動を経ることによって，児童・生徒は既有の知識構造を組み替え，新しい知識構造をつくる。そのため, 問題解決活動で獲得された知識構造を基に,「深い学び」の様相を検討することが可能である。

前節3.3では,「モデリング理論」を基にした「意図別問題解決活動の３類型」の視点から，知識形成の在り方を考察した。「ア　数学的知識の獲得・形成」の場面では,「数学的知識の再体系化の３類型」の視点から，知識構造の変容を具体的に示した。

本節では,「ア　数学的知識の獲得・形成」の場面に焦点付け，問題解決活動で獲得・形成される知識をさらに分析し,「深い学び」の姿を,「数学的な見方・考え方」を働かせた結果の知識構造という観点から捉える。そのために，まず，知識及び知識構造の意味について確認しておく。

沼尾（2002）は,「自他の経験を，問題解決や理

解に役立つような形式で集積した情報が知識であり，主として外界の事物・事象の重要な属性に関する知識(スキーマやメンタルモデルといった概念的な知識）と，ある目標を達成するためにそれらにいかに働きかけるべきかに関する知識(方略などの手続き的知識）からなる。」[31] としている。(下線筆者)

また，無藤(1995)は，「人が長期記憶に表象している多少とも一般性のある事柄すべてを知識という。通例は，とくにその中でも，２種のことを知識とする。一つは宣言的な知識である。これは世界について一般的な知識であり，たとえば，人は動物であるといったものである。これは意識化，言語化しやすいという特徴がある。もう一つは，手続き的知識である。これは何かの行動の系列を実施するしかたについての知識である。たとえば，スキーの滑り方である。これは言語化しにくい。この知識は系列の最初から実行すれば手早くできるが，途中からはやりにくいものである。」[32] としている。(下線筆者)

数学的な知識・技能も，下線部のように，ほぼ宣言的知識(概念的知識）と手続き的知識とに分けて捉えることができる。

土居(1995)は，「長期記憶内の貯蔵されている情報を一般に知識とよんでおり，長期記憶内で知識がどのようにまとまり体制化されているか，その構造化に対して使用される用語。知識の構造化の様相は，新知識の獲得や旧知識の検索と利用など，知識の学習過程や知的な適応行動の中心的な要因になる。」[33] としている。(下線筆者)

以上より，本節では，知識構造に「宣言的知識と手続き的知識」という視点を導入し，宣言的知識が獲得される過程と手続き的知識が獲得される過程における，学習者の思考内容について分析することとする。それらの視点を導入することには，下線部に関わって次の利点があるからである。[34]

- 宣言的知識は，意味のネットワークでつながっており，ある程度構造化されている。学習者が問題を解決するのに必要な宣言的知識と手続き的知識を探索する思考に着目できる。
- 手続き的知識は，いくつかの宣言的知識を参照しながら解決する段階から，自動的に利用し実行できる段階へ移行する。前者から後者に移行するときに参照する宣言的知識と手続き的知識についての思考に着目できる。

(3)　問題解決活動で獲得される，算数・数学で一般的で活用できる知識・技能と思考との関係

金子(1997)は，教師と児童・生徒が共有的に行う問題解決活動の過程として，「問題設定」－「解決発想」－「解決実行」－「振り返り」の四つの過程を想定し，図14のように表している。[35]

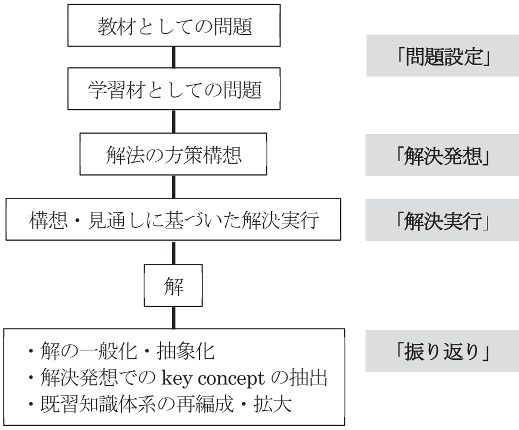


図14　教師と児童・生徒が共有的に行う問題解決活動の過程

この図は，前節3.3の特に図6，図7（数学的知識の獲得・形成を意図した問題解決活動）等が授業の中でどのように展開され得るのか，が分析的に示されている。「振り返り」の過程に注目すると，「解決発想でのkey conceptの抽出」がある。これは，解決発想場面を振り返り，この問題解決を成功させた鍵，つまり宣言的知識の本質と手続き的知識の本質を獲得することをねらったものである。(下線筆者)

その本質はどのように獲得され得るのであろうか。このことについて，少し詳しく見ていこう。

金子ら(1996)は，「学習者が，〈数学化活動を中心とした問題解決学習〉において発見(invention)した問題構造の本質は，学習者の中で有効に働く〈メタ認知〉として学習者に形成・獲得されていく。」[36] と述べている。これは例えば，「微生物の増殖の問題」を関数の問題として見て，その構造は実は指数関数であるという発見があると，そのような本質が他の「銀行の利子の問題」の構造読みにも生かされ得るということである。これによれば，学習者が問題解決活動で発見した本質が，次の問題解決で必要となる宣言的知識適用や手続き的知識実行のための原理となり得る，つまり算数・数学で一般的で活用できる知識・技能となり得る，と考えられる。

このことと関連して，金子ら(1988)は，「概念のための概念」(宣言的知識のための宣言的知識),「手続きのための手続き」(手続き的知識のための手続

き的知識）について述べている。

「「概念のための概念」を導くには，その概念自体の本質を明らかにする必要がある。」，「その方法として，概念の「unit side 単位となる本質的側面」を明確にすること。」と述べている。例として，分配法則をあげている。分配法則の「unit side」は，①「A法の上のB法」という文脈で２種類の演算が行われるので$4 \times 4 = 16$通りの場面があり，さらに②「右分配」と「左分配」の２通りの分配の方向があるので２通りの場面がある。よって，分配法則には計$16 \times 2 = 32$通りの場面が考えられる。その中で「加法の上の乗法の右分配法則」と「加法の上の乗法の左分配法則」の２通りの場面のみが可能となる。この「unit side」を明確にすることで，学習者にとって“分配法則をどんな場面で使えばよいか”を識別する手掛かりとなる。（下線筆者）

また，「手続きのための手続き」については，手続きに合目的性をもたせ，細かすぎず適度な粗さをもったステップを提示する。その最適難易度のステップが「unit step」であり，“次に何をするか”の手続きの選択の理由付けを示すことが必要であると述べている。（下線筆者）例として，２位数＋２位数の筆算において，「くり上がりがあるとき，一の位の数の左下に十の位の1を小さくかき，和の一の位を一の位の下の線にかけ。」という「unit step」を位取り板の操作と対応させることで，くり上がりの1は十の位の1であるという意味付けが明確になると述べている。[16]（後に，このことを，金子（1997）[37]，風間，宮（1999）[38]は，因果関係がはっきりしており，手続きの根拠が分かる状態の知識を形成することとしている。）

一方，宣言的知識と手続き的知識の統合について，J・R・アンダーソンが開発したACT理論がある。それは「宣言的知識は主に命題ネットワークによって，手続き的知識はプロダクションルールによって表現され，両者は宣言的知識の活性化した部分であるワーキングメモリをプロダクションシステムが参照することによって，また，プロダクションシステムが宣言的知識を書き換えることによって結びつけられる。」[39]というものである。この理論からは，「手続き的知識のための宣言的知識」と「宣言的知識のための手続き的知識」の二つの場合があることが示唆される。

このことと関連して，金子ら（1989）は，「宣言的知識により依存した手続き的知識の学習のもたらす有効性」，「手続き的知識による宣言的知識の見直しに見られる有効性」を述べている。前者の有効性として，「①記号に意味を与えること」，「②手続きを意味をもって学ぶこと」の二つをあげている。

加法の演算記号「＋」を，構文論の規則に従う視覚的な模様として学習するのでなく，具体的なモデルや現実的な文章題等の中で合併や添加（増加）といった概念と関係付けながら学習することは，①の例である。（下線筆者）

一元一次方程式の解法手続きには「未知項を左辺へ，既知項を右辺へ移項する。」がある。この手続きの目的として「最簡二項方程式$x = a$を導くため未知項＝既知項にする。」ということを明確にすることは，一元一次方程式の宣言的知識を基盤に学習するという②の例である。（下線筆者）（後に，このことを，金子（1997）[37]，風間，宮（1999）[38]は，手続きとその根拠が分かり，手順を選ぶ目的や意義も分かる状態の知識を形成することとしている。）

後者の「手続き的知識による宣言的知識の見直しに見られる有効性」については，「一元一次方程式の定義を$ax + b = 0$とするのは，「未知項を左辺へ，既知項を右辺へ移項する。」という解法手続きを基にして行われる。それは移項の途中で未知項がなくなり一元一次方程式でなくなる可能性があるからである。」と例示している。[23]（下線筆者）

以上をまとめると，宣言的知識の本質や手続き的知識の本質を思考することによって，算数・数学で一般的で活用できる知識・技能が獲得される，といえる。それには，下線部のように，問題の解決発想場面で“なぜ使うのか”，“どこで使うのか”，“どのような意味として使うのか”，“どのように使うのか”等，対象へのかかわり方について思考することと，振り返り場面で問題解決を成功させた（に役立つ）思考を言語化することの二つが必要である。

(4) 宣言的知識の本質や手続的知識の本質を捉える思考（「数学的な見方・考え方」の働き）

宣言的知識の獲得には２段階ある。最初は標準型の問題において本質を意識しながら問題解決する。次に標準型から退化型（ある観点で特殊化した，標準型の特別なタイプ）へと問題解決を進めることによって意味（概念）のネットワークをつくる。その結果，宣言的知識と宣言的知識の本質が獲得される。このとき対象となる宣言的知識と関連した知識が，主に宣言的知識か手続き的知識かによって，思考内容は以下のA1，A2の二つに区分される。これらは，いずれも「まず関連知識の本質について思考し，概

念を明確に捉えること」である。

A1：宣言的知識を捉えるために，関連する宣言的知識の本質について思考すること

A2：宣言的知識を捉えるために，関連する手続き的知識の本質について思考すること

手続き的知識の獲得にも２段階ある。最初は標準型の問題において本質を意識しながら問題解決する。次に標準型から退化型へと問題解決を進めることによって本質を暗黙知化する。その結果，手続き的知識が獲得される。この過程で意識した本質が，主に宣言的知識か手続き的知識かによって，思考内容は以下のB1，B2の二つに区分される。これらは，いずれも「まず関連知識の本質について思考し，手続きを明確に捉えること」である。

B1：手続き的知識を捉えるために，関連する宣言的知識の本質について思考すること

B2：手続き的知識を捉えるために，関連する手続き的知識の本質について思考すること

以下に，先述の標準型や退化型の問題及びそれらの系列について，前節3.3の⑵②イで示した図12の例を用いて補足しておく。

金子ら（2002）は，図12のように整理した一元一次方程式の類型（範囲）を基に，図15のとおり系統（系列）を示している（p.18）。[7]

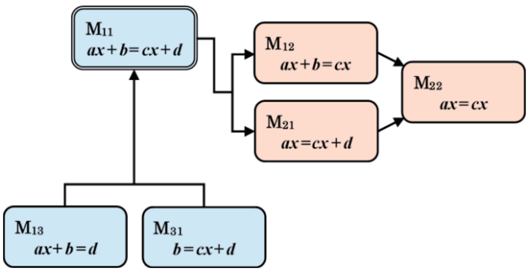


図15　一元一次方程式の解法原理及びアルゴリズムの獲得・形成，定着・習熟のための系統

解法の観点から一元一次方程式を見ると，標準型は左辺も右辺も本来の一次式が完備されたものであり，退化型は左辺や右辺に特別な一次式があるものである。図15は，一元一次方程式の解法原理及びアルゴリズムを獲得・形成するための中心となる標準型の問題（M_{11}）を定め，それに向けて導入が必要となる基本的な問題（M_{13}・M_{31}）を系列化して上昇過程を描き，定着・習熟を図る上でさらに必要となるやや異例的な退化型の問題（M_{12}・M_{21}，M_{22}）を系列化して下降過程を描いたものとなっている。

⑸　宣言的知識の本質や手続的知識の本質を捉える思考（「数学的な見方・考え方」の働き）の例

以下では，前節3.3の「数学的知識の獲得・形成」の場面を中心に，⑷に関する具体例を示すこととする。ここで取り上げる事例は，教師にとって教授価値が見えにくいゆえに授業しにくい題材，すなわち生徒にとって学習価値が見えにくいゆえに学習しにくい題材とする。新学習指導要領において「見方・考え方」の指導が強調されている理由には，児童・生徒が学習の意義や価値を理解できるようにするというねらいがあるため，そのような題材を取り上げて検討することは大きな意義がある。

A1の例：なぜ文字nは数の代わりに使うのか？（中学校１年）

代数記号としての文字nは，数を表す（文字nの宣言的知識）。この宣言的知識の獲得には，文字nについて“どこで使うか”，“どのように使うか”，“なぜ使うか”を思考することが必要である（文字nの宣言的知識）。これを本質と捉えると，文字nの使い方は，「計算対象として使うか」，「計算対象でなく，例えば公式の変数の代わりとして使うか」の２通りと，文字nを使う文脈は，「代数分野の文脈で使うか」，「代数分野の文脈でない図形分野等の文脈で使うか」の２通りがある。したがって，文字nの本質は，図16のとおりN_{11}～N_{22}の４場面を通して，確かに認識されると考えられる。

文脈 ／ 目的	代数分野	図形分野
計算対象である	N_{11}	N_{12}
計算対象でない	N_{21}	N_{22}

図16　文字nの本質の認識枠

そこで，導入場面N_{11}あるいはN_{12}での思考が重要になる。数の代わりとしての文字の役割は，数と同じように計算対象になることで認識できるからである。公式や言葉の式を想起できるような場面でなく，計算してみないと法則や仕組みが分からないような場面が必要である。このことは，“なぜ使うか”という文字nの意義にも通じる。文脈については，代数分野と図形分野のいずれも可能であるが，導入で扱わない方を「応用・発展」の系列に位置付ける。

ここでは代数分野を導入場面とした場合を示す。なお，本授業は，国宗ら（1997）の「文字式による証明を中１から指導することに対する検討の必要性」についての見解[40]と整合する一つの例でもある。

T1：５つの連続する整数の和にはどのような性質がありますか。５つの連続する整数の和の式を３つつくり計算してみましょう。

S1：$1+2+3+4+5=15$
$3+4+5+6+7=25$
$6+7+8+9+10=40$　など

T2：これらの式と答えを見ると，和にはどのようなきまりがあるといえますか。

S2：どれも５の倍数になっています。

S3：どれも式の真ん中の数の５倍になっています。

T3：確かに$3\times5=15$，$5\times5=25$，$8\times5=40$ということから，そういえそうですね。

T4：５つの連続する整数の和は，真ん中の数がどんな数でも，真ん中の数の５倍になりますか。真ん中が911でもいえるか，確かめましょう。

S4：$909+910+911+912+913=4555=911\times5$

T5：答えは4555になりますが，このように4555を直接出さずに，なぜ和が真ん中の911の５倍となるかを，計算を工夫して示せますか。

S5：$909+910+911+912+913$
$=(911-2)+(911-1)+911+(911+1)+(911+2)$
$=911+911+911+911+911-2+2-1+1$
$=911+911+911+911+911$
$=911\times5$

S6：おー，911以外はプラス・マイナス0だから！

T6：なるほど。相殺を上手く使いましたね。では，真ん中の数を代表して文字nにしてみます。真ん中の数がnの場合でも，計算結果が$n\times5$となることを示すことはできますか。

S7：$(n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2)$
$=n+n+n+n+n-2+2-1+1$
$=n+n+n+n+n$
$=n\times5$

T7：数の代わりに文字を使うよさは何ですか。

S8：数のきまりやその仕組みがはっきり分かります。

この授業で想定した思考（「数学的な見方･考え方」の働き）は，「５つの連続する整数の和にある性質を見付けるために具体数を用いて帰納的に推論すること」，「真ん中の数が911のとき成り立つことを調べること」，「準一般数（911）を用いて演繹的に推論すること」，「真ん中の数がどんな数でも成り立つことを示すため，911の式を参考にしながら，文字n（一般数）を用いて演繹的に推論すること」等がある。

準一般数（911）を用いて，「$909+910+911+912+913=(911-2)+(911-1)+911+(911+1)+(911+2)$」という式変形を思考することは，一般数としての数（文字）の本質につながっている。そのため，この思考をS8のように言葉にして振り返らせ，クラスで共有することが大切である。

この例は再体系化の視点からすると，図17のように，この時点では実線矢印に沿って解釈される。

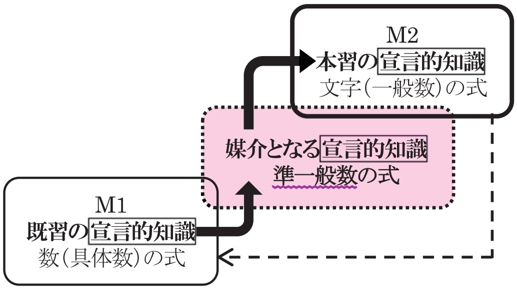


図17　再体系化の視点からのA1の例の解釈

3×5という数の式は，個々の具体数における個別の関係式であるのに対し，$n\times5$という文字式は，任意の数における一般性のある関係式であるため，再体系化は飛躍回帰型となる。そのため，文字式の意味・意義を捉えるための支援として，911×5という準一般数の式を媒介にする（cf. 前節3.3の⑵②ア ii 補足c）に基づく具体的方策）。媒介となる911×5の式の意味・意義を思考することは，911×5の911が示唆する一般性という本質を捉え，一般数としての文字を用いた式の認識を可能にする。

A2の例：なぜ文字式$3+a\times5$は$3+5a$と表すのか？（中学校１年）

「文字式の表し方」では「文字式で積や商を表すときは，①かけ算は記号「×」を省いて書く。②文字と数の積では数を文字の前に書く。③同じ文字の積は指数を使って書く。④わり算は記号「÷」を使わないで分数の形で書く。」というルールがある（文字式の表し方の宣言的知識）。これら文字式の表記のルールを適用するための知識とは，どのような知識だろうか。

例えば，「$2-a\times3\times a$を文字式の表し方に従って表しなさい。」という問題があったとき，「四則混合式なので加減よりも乗除を先に計算する」→「$a\times3\times a$に着目する」→「数を文字の前に出して省略する」→「乗法の交換法則を用いて$3\times a\times a$とする（ルール②）」→「指数を用いて$3\times a^2$とする（ルール③）」→「「×」を省略して$3a^2$とする（ルール①）」→「答えを$2-3a^2$とする」というように処理する。

この手続きを行うためには，まず下線部にあるように，乗除に着目しルールの実行順を決められる知識が必要となる。そこで，表記のルールに従って文字式を表すことができるようになるために，式をパターン認知して，「もしも四則混合式だったら，加減より乗除を先に計算する。もしも乗除混合式だったら，順に計算するか，除法を乗法に還元して計算するかする。」というルールを，四則計算の手続き的知識の本質として捉えるように思考させる。

与式のタイプは「四則混合」，「乗除混合」，「乗法のみ」，「除法のみ」の4通りがあり，文字と積(商)になっている数式は「整数」，「分数」，「同じ文字」，「異なる文字」の4通りがある。したがって，表記のルールの本質は，図18のとおり16場面を通して確かに認識され，ルールに従って文字式表現が正しく行われるようになると考えられる。

乗法構造 ＼ 式	整数と文字の積（商）	分数と文字の積（商）	同じ文字の積（商）	異なる文字の積（商）
四則混合	L_{11}	L_{12}	L_{13}	L_{14}
乗除混合	L_{21}	L_{22}	L_{23}	L_{24}
乗法のみ	L_{31}	L_{32}	L_{33}	L_{34}
除法のみ	L_{41}	L_{42}	L_{43}	L_{44}

図18　文字の表記のルールの本質の認識枠

ここではL_{11}を導入場面とし，そこでの思考をL_{12}・L_{13}・L_{14}の標準型に適用させ，さらに，L_{31}・L_{32}・L_{33}・L_{34}の退化型まで思考させる授業例を示す。

T1：3＋5×2はどこを先に計算しますか。
S1：「×」を先に計算します。(3＋$\boxed{5\times2}$と板書)
T2：四則混合の式では加減より乗除を先に計算します。これを何の原則と言いましたか。
S2：乗除優先の原則です。
T3：では，3＋5×aはどこを先に計算しますか。
S3：「×」を先に計算します。(3＋$\boxed{5\times a}$と板書)
T4：文字も数と同様に乗除優先の原則で計算します。3＋5×a はこれ以上計算できませんが，式を簡単に表すことができます。3＋5×aで「＋」や「×」を省略したらどんな式になりますか。
S4：「＋」を省略すると，35×aで，「×」を省略すると，3＋5aです。全然違う式になります。
T5：元の式の意味がわかるのはどちらですか。
S5：「×」を省略した3＋5aです。
T6：3＋5×aのような文字式では，乗除優先の原則に従い，「＋」より「×」に着目します。
S6：だから，「×」を省略して3＋5aと簡単に表す。
T7：他の場合についても考えてみましょう。次の文字式の表し方を予想しなさい。
・－4－7×a　・9＋a×(－6)　・a×1－b×5
・$\frac{3}{5}$×a－20　・2＋0.7×a　・8＋b×a
・c×c×c－7　・－4×a　・a×($-\frac{1}{3}$)
・x×x×x×x　・b×a×a
※一つずつについて生徒の考えを聞きながら，正誤，ルール②③及び表現の仕方を確認する。

この授業で想定した思考(「数学的な見方・考え方」の働き)は，「3＋5×a＝3＋5aと表現できる理由について，乗除優先の原則を基に考えること」，「L_{11}・L_{12}・L_{13}・L_{14}の式の表し方を乗除優先の原則と数の計算基本法則を基に考えること」等である。特に演算記号「×」の省略は，生徒の認識において飛躍がある。“なぜ文字式では「×」が省略できるのか”について，数計算の手続きの原則を基に思考することは，数の代わりとしての文字を認識するとともに，文字式の表記のルールを認識する上で重要である。

この例は再体系化の視点からすると，図19のように，この時点では実線矢印に沿って解釈される。

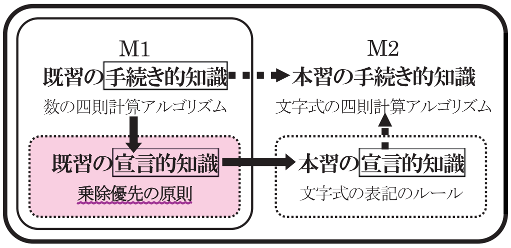


図19　再体系化の視点からのA2の例の解釈

数の四則計算で学習した乗除優先の原則は，文字の表記のルールを適用するときの根拠として一貫して用いられるため，再体系化は累積包括型となる。そのため，数の四則計算アルゴリズム実行時に使う乗除優先の原則を顕在化させる必要がある（cf. 前節3.3の⑵②ア ⅱ 補足a）に基づく具体的方策）。このような支援により，数の四則計算における原則について思考することは，乗除優先の原則という本質を顕在化させ，文字式における「×」を省略する理由とルールを認識することを可能にする。

B1の例：なぜ(＋3)＋(－5)の計算は，－(5－2)という手続きなのか？(中学校1年)

正の数・負の数の加法アルゴリズムは，符号決定と絶対値決定の二つから成り立っている。

和の符号決定アルゴリズムとは，「もしも同符号の２数を加えるならば，２数に共通な符号にせよ。もしも異符号の２数を加えるならば，２数のうち，絶対値の大きい方の符号にせよ。」である。和の絶対値決定アルゴリズムとは，「もしも同符号の２数を加えるならば，絶対値の和を求めよ。もしも異符号の２数を加えるならば，絶対値の差を求めよ。」である（正の数・負の数の加法の手続き的知識）。

“なぜ同符号と異符号に分けるのか”，“なぜ絶対値の和や差を考えるのか”が，正の数・負の数の加法の手続き的知識の本質である。これを捉えるために，数直線矢線図を用いて思考させる。ここでは，正の数・負の数の意味（位置ベクトル，動ベクトル）という宣言的知識に基づいて問題解決する。

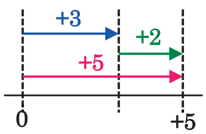
加法場面は，A＋Bとしたとき，被加数が正・0・負の３通り，加数が正・0・負の３通りあるので，図20のとおり全部で９場面ある。

A＼B	(+2)	0	(−2)
(+3)	K_{11}	K_{12}	K_{13}
0	K_{21}	(K_{22})	K_{23}
(−3)	K_{31}	K_{32}	K_{33}

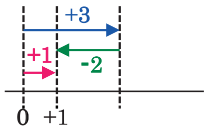
図20　加法（A＋B）アルゴリズムの本質の認識枠

加法の答の求め方ではK_{11}を標準型として，小学校算数における加法の意味（テープ図）を基に数直線矢線図をかき，「第一の矢印の終点に第二の矢印の始点をつなげ，結果は0からの矢印を読む」という図の構造を思考させる。これらの宣言的知識に基づき，加法アルゴリズムの獲得に向かう授業場面を示す。

T1：3＋2＝5という小学校の加法を，符号のついた数の加法に直してみましょう。
S1：（＋3）＋（＋2）＝＋5となります。
T2：意味を確認しながら図で表しましょう。
S2：

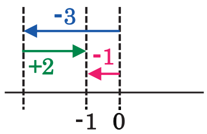


T3：今日は，符号のついた数の加法の計算の仕方を学びます。では，（＋3）＋（－2）の計算は，どのような図になり，答はどうなりますか。
S3：



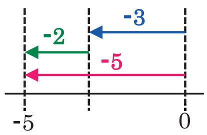
（＋3）＋（－2）＝＋1

T4：（＋3）＋（－2）＝＋1は加法といってよいですか。
S4：減っているので，減法のように見えます。
S5：「＋」があるので，やはり加法だと思います。
S6：結果が元より減っていても，第一矢印に第二矢印を加えて，つながっているので，加法です。
T5：（＋3）＋（＋2）＝＋5と（＋3）＋（－2）＝＋1の矢印と矢印のつながり方は同じですか。
S7：１つ目の矢印の終点に，２つ目の矢印の始点がつながっているので，同じです。
T6：（－3）＋（＋2）と（－3）＋（－2）の計算も図で表して求めましょう。
S8：



（－3）＋（＋2）＝－1

S9：



（－3）＋（－2）＝－5

T7：（＋3）＋（＋2），（＋3）＋（－2），（－3）＋（＋2），（－3）＋（－2）の４つの図の形は２通りに分けることができます。どのように分けられますか。
S10：（＋3）＋（＋2）と（－3）＋（－2）という同符号の場合は行きっぱなしの図，（＋3）＋（－2）と（－3）＋（＋2）という異符号の場合は行って戻る図というように分けられます。
T8：この図のパターンから，同符号の加法では，答の符号と絶対値はそれぞれどのように求められますか。異符号の加法では，答の符号と絶対値はそれぞれどのように求められますか。

この授業で想定した思考（「数学的な見方・考え方」の働き）は，「（＋3）＋（＋2）＝＋5を数直線矢線図で表すとどんな図になるかについて符号の意味に基づいて考えること」，「（＋3）＋（－2）＝＋1の図をかき加法といえるか検討すること」，「観点を定め４つの式を２通りに分けること」等がある。特に（＋3）＋（－2）＝＋1の図について，加法か否か思考し判断させることが重要である。位置ベクトルと動ベクトルを用いた矢線図に保存されている加法原理を見抜くことは，加法アルゴリズムを導く上で必要だからである。

この例は再体系化の視点からすると，次図21の

ように，この時点では実線矢印に沿って解釈される。

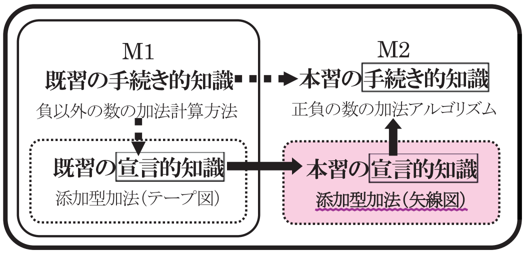


図21　再体系化の視点からのB1の例の解釈

既習の負以外の数の加法は，無符号絶対数の加法であるのに対し，本習の正の数・負の数の加法は，有符号相対数の加法である。しかし，添加(増加）型の加法原理は一貫しているので，再体系化は累積包括型となる。本習の加法アルゴリズムの基になる加法の意味が，既習の加法の意味と整合的に捉えられるためには，3＋2＝5を，これと同型な(＋3)＋(＋2)＝＋5に置き換え，3＋2＝5を表現したテープ図を，自然に矢線図にかき換える必要がある（cf. 前節3.3の⑵②ア ⅱ 補足a）に基づく具体的方策)。このような支援により，(＋3)＋(＋2)＝＋5の意味･意義を思考することは，(＋3)＋(＋2)＝＋5の矢線図が指し示す添加(増加）型加法という本質を顕在化させ，(＋3)＋(－2)＝＋1等の有符号相対数の加法を認識することを可能にする。

B2の例：なぜ $(a+\mathrm{b})(\mathrm{c}+\mathrm{d})=ac+ad+bc+bd$ の手順なのか？(中学校３年)

展開とは，多項式の積の式を単項式の和の式にする計算である。教科書では，$(a+b)(c+d)$ の計算が，$c+d=\mathrm{M}$ と置き換え，$(a+b)\mathrm{M}=a\mathrm{M}+\mathrm{bM}=ac+ad+bc+bd$ となることを示している。これだけだと，展開が分配法則を使った通常(従来）の計算という認識で終わり，特別な計算アルゴリズムという認識をすることができない。展開についての手続き的知識の本質を認識することが必要である。そのために，既習の２桁の筆算手順(手続き的知識）を基にする。

展開という手続き的知識の本質は，「和積型の式(スタート）を積和型の式(ゴール）に変形すること」，「(第一因子の項と第二因子の項の積について全ての組み合わせをつくり）決まった順序で行うこと」である。図22の J_{12} や J_{21} では，分配法則をそのまま用いられるため，「積和」という発想が出にくい。

そこで，J_{22} を標準型として，展開の本質を思考する授業場面を示す。

A ＼ B	c	$(c+d)$	$(c+d+e)$
a	(J_{11})	(J_{12})	J_{13}
$(a+b)$	(J_{21})	J_{22}	J_{23}
$(a+b+f)$	J_{31}	J_{32}	J_{33}

図22　展開(A×B）の手順の本質の認識枠

T1：$(a+b)(c+d)$ の計算を片方の式をMとおいて，分配法則を用いて計算しなさい。

S1：$(a+b)\mathrm{M}=a\mathrm{M}+\mathrm{bM}=a(c+d)+\mathrm{b}(c+d)$ $=ac+ad+bc+bd$ となります。

T2：この計算方法は横書きの方法と見られます。それでは，縦書きの方法だとどうなりますか。

S2：縦書きとはどういう意味ですか。

T3：62×78の計算はどのように計算しましたか。

S3：筆算を使いました。

T4：筆算は縦書きです。筆算はどんな手順ですか。

S4：

$$\begin{array}{r} 62 \\ \times\ \ 78 \\ \hline 496 \\ 434\ \\ \hline 4836 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{rl} 62 & \\ \times\ \ 78 & \\ \hline 16 & ① \\ 48\ \ & ② \\ 14 & ③ \\ +42\ \ & ④ \\ \hline 4836 & \\ ❹❸❷❶ & \end{array}$$

(※①～④はかけた結果，
❶～❹は足した結果のメモの板書)
4回かけ算して，それらを4回足しています。

T5：最初に4回かけ算するので積が先，それらを4回足すので和が後。つまり「積和」の順に4回計算するということですね。

T6：$(a+b)(c+d)$ を積和の順で計算するとは？
62×78を(60＋2)×(70＋8)と書いて，縦書きの方法を当てはめると，(60＋2)×(70＋8)＝8×2＋8×60＋70×2＋70×60となります。この場合，積和の順番は筆算の計算方法，つまり十進法の原理と，位の低い数から位の高い数に順にかけて計算する原則に基づいています。

T7：でも，文字には位がないので，$(a+\mathrm{b})(\mathrm{c}+\mathrm{d})$ のような計算では，他にどんな積和の順序が考えられますか。

S5：$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ です。

S6：$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$ も考えられます。

T8：図形にも位はないです。$(a+b)$ を縦，$(c+d)$ を横にした長方形の面積を求める計算も考えると，積和の順序はどれが分かりやすいですか。

この授業で想定した思考（「数学的な見方・考え方」の働き）は，「横書きでなく縦書きの方法とはどんな方法か考えること」，「筆算の手順から積和の意味を考えること」，「積和の視点で $(a+b)(c+d)$ の手順を考えること」等である。特に，整数の筆算アルゴリズムにおける積和の順序という本質を基に思考することは，展開手順の特殊性を導く上で重要である。

この例は再体系化の視点からすると，図23のように，この時点では実線矢印に沿って解釈される。

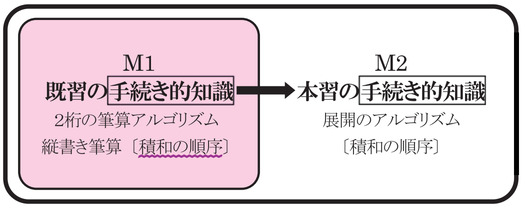


図23　再体系化の視点からのB2の例の解釈

本習内容に関連する既習内容として，２桁の筆算アルゴリズムを位置付ければ，それがもつ積和の順序という本質は，展開のアルゴリズム実行時の根拠として一貫して用いられるため，再体系化は累積包括型となる。そのため，今まで意識していなかった２桁の筆算アルゴリズムの縦書き計算の意義を認識する必要がある（cf. 前節3.3の⑵②アⅱ補足a）に基づく具体的方策）。このような支援により，式の横書き計算のままでは気付かなかった展開の意味を，整数での縦書き計算過程を基に思考することは，積和の順序という本質を捉え，展開のアルゴリズムを認識することを可能にする。

４　結論（要約）

【本稿目標①に対する回答】

◆学校数学における「深い学び」

それは，「数学的知識を獲得･形成し，定着･習熟し，さらに応用・発展するという学び」である。

ただし，数学的知識が再体系化されている状態で獲得・形成されているとき，はじめて「深い学び」をしているといえる。

◆学校数学における「深い学び」の質

「深い学び」の質（学びの深まり）は，「問題解決活動の意図」に応じた実際の学びを見て，つまり，獲得・形成された数学的知識がどのようにどの程度定着・習熟され応用・発展されるかという，知識の発展性と有用性の認識の観点から，解釈される。

ア　数学的知識の獲得・形成

◎数理の形成：広げる（cf. 図6）

「既有の知識体系」をもって「数学の問題」の定式化及び解決にあたるが，「数学的知識」を適用しようとしても解決が困難な場合，「新しい数学的知識」を導入して解決を図る。それは「事象の解決」（解明）を果たしつつ，一方で既習の数学的知識と，「数学的な見方・考え方」とを基に新しい数学的な概念や原理をつくりあげることである。

◎数理の理解（再体系化）：深める（cf. 図7）

「得られた数理」と「既有の知識体系」とをつき合わせて（接続して）「新しい知識体系」をつくる。再体系化の様相は，「累積包括型」，「併立統合型」，「飛躍回帰型」という３類型が考えられる。

イ　数学的知識の定着・習熟

◎類似場面への数理の選択・適用（cf. 図11）

「（既有となったばかりの）新しい知識体系」の中から，「問題の含まれた事象」の解決に適当な数学的知識を引き出してくる。それを使って，「問題の含まれた事象」を「数学の問題」に定式化し，その問題を解決し，元の事象に戻して事象の解決を図る。さらに，用いた数学的知識を，具体的な適用条件の理解という点で強化して，「（既有となったばかりの）新しい知識体系」にとり込む。

以上のように，事象や数学の問題が以前と類似した場面に対して，数理の選択・適用を行う。

ウ　数学的知識の応用・発展

◎異質場面への数理の選択・活用（cf. 図13）

事象や数学の問題が以前とは全く異なる場面に対して，数理の選択・活用を行う。

【本稿目標②に対する回答】

◆学校数学における「深い学び」を支える「数学的な見方・考え方」

数学的知識を宣言的知識と手続き的知識とで捉えた場合，それらを獲得・形成するときに，それぞれの本質を捉えることによって，その後の数学的知識の定着・習熟，応用・発展へとつながっていくと考えられる。宣言的知識または手続き的知識の本質について思考することは，より深い「数学的な見方・考え方」を働かせることと同じであるため，「数学的な見方・考え方」は，“その知識は何のためにあるのか”，“どこで使うのか”，“どのような意味として使うのか”，“どのように使うのか”等，対象へのかかわり方についての思考であると捉えられる。そのような「数学的な見方・考え方」を働かせるときの思考内容は，次の四つの場合がある。

A1：宣言的知識を捉えるために，関連する宣言的知識の本質について思考すること
A2：宣言的知識を捉えるために，関連する手続き的知識の本質について思考すること
B1：手続き的知識を捉えるために，関連する宣言的知識の本質について思考すること
B2：手続き的知識を捉えるために，関連する手続き的知識の本質について思考すること

5　おわりに

本稿では，われわれは，主に“学校数学における「深い学び」とは何か？”，“なぜそういえるのか？”と，追究を協働で重ねた。そして，「数学する」とはどういうことかについての理念を目的的活動の視点から捉え，それに基づき，「知識形成の機構」に着目して，先の問いに対する解釈を述べた。それは，様々あると思われる中の一つの考えではあるが，新学習指導要領に反映された「算数・数学で求められる深い学び」に対する文科省の見解を具体化している。

さらに，それを実現するための「学習過程の概念図」の流れの中からは読み取りにくい「新しい知識体系の位置付けと活用」を明確にするとともに,「問題解決過程と深い学びとの関係」と「深い学びの質」について，広義の数学化過程とその意図に基づいて考察し，一つの見解を示した。具体的には，「深い学び」の要件となる「知識の再体系化」や「数学的な見方・考え方」について，前者は三つの様相類型があり，後者は宣言的知識と手続き的知識の視点からすると四つの働き方があることを，算数・数学の具体例を考えて述べた。これらのことは，文科省が指す「知識の構造や思考，態度の変容」の意味をより明確にしているため，現実的である。

したがって，本稿は，これから「深い学び」の実現を目指して授業をつくるために，授業前に行う教材の解釈・構成や，授業中に行う児童・生徒の学びの見取り，授業後に行う授業の評価を行う上で，参考になると考えられる。

今後は，学校数学における「深い学び」を，実際の授業という社会文化的状況の中で，「主体的な学び」と「対話的な学び」の相互作用を伴いながら実現するための具体的な仕掛けを追究したい。

引用・参考文献

1) 中央教育審議会（2016）.「幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について（答申）」. 平成28年12月21日.

2) 東京大学 大学総合教育研究センター 中原淳研究室，日本教育研究イノベーションセンター.『未来を育てるマナビラボ』.「深い学び」とは，どういうことを指すのですか？ vol.28　manabilab.jp/article/2597

3) 松下佳代（2015）. ディープ・アクティブラーニングへの誘い.（松下佳代・京都大学高等教育研究開発推進センター（編）『ディープ・ラーニング：大学授業を深化させるために』. 勁草書房. 2015, pp.1-27.）

4) 溝上慎一（2015）. アクティブラーニング論から見たディープ・アクティブラーニング.（松下佳代・京都大学高等教育研究開発推進センター（編）『ディープ・ラーニング：大学授業を深化させるために』. 勁草書房. 2015, pp.31-51.）

5) 中央教育審議会　初等中等教育分科会　教育課程部会（2016）.「次期学習指導要領等に向けたこれまでの審議のまとめについて（報告）」. 平成28年8月26日.

6) 佐藤学（2000）.『「学び」から逃走する子どもたち』. 岩波ブックレット.

7) 金子忠雄監修，井口浩，小田暢雄，風間寛司，星野将直，宮宏之，神林信之（2002）.『学びの数学と数学の学び　－参加・協働と「生きる力」の実現を求めて－』. 明治図書.

8) 文部省（1999）.『高等学校学習指導要領解説　数学編・理数編』. 実教出版.

9) OECD，国立教育政策研究所監訳（2007）.『PISA2006調査　評価の枠組み』. ぎょうせい.

10) Freudenthal, H.（1968）. *Why to Teach Mathematics so as to Be Useful.* Educational Studies in Mathematics, vol 1（1）. pp.3-8.

11) Freudenthal, H.（1973）. *Mathematics as an Educational Task.* Dordrecht: D. Reidel.

12) Lange, J. de.（1987）. *Mathematics, Insight and Meaning*, OW&OC, Utrecht.

13) J.S.Berry, D.N.Burghes, I.D.Huntkey, D.J.G.James.（1984）.TEACHING AND APPLYING MATHEMATICAL MODELLING: Halsted Press.

14) 金子ゼミナール：金井克浩，墓前美樹，長谷川和弘，

星野律子，清水幸子，武藤雅雄（1987）．算数・数学科授業における「問題解決と数学的知識化」の在り方 −「授業の成立」と「学習者の知識形成」を中心として−．（新潟大学教育学部数学教室『数学教育研究』，第23号．1987，pp.1-27.）

[15] Robert B.Davis.（1984）. Learning Mathematics − The Cognitive Science Approach to Mathematics Education − : Croom Helm.

[16] 金子ゼミナール：黒田匠，小山英美，丸山正行，寺沢優美子，佐藤薫，宮嶋伸子（1988）．自己化された学校数学の構想と展開 −数学的知識形成の機構と方略を中心として−．（新潟大学教育学部数学教室『数学教育研究』，第24号．1988，pp.1-30.）

[17] James Hirbert.（1986）. CONCEPTUAL AND PROCEDURAL KNOWLEDGE: THE CASE OF MATHEMATICS LAWRENCE ERLBAUM ASSOCIATES.

[18] 金子ゼミナール：木村哲雄，島田曜子，清水雅之，三木俊幸，渡辺憲子，魚野潤，長井博幹，古川真哉（1991）．学校数学における「基礎・基本の獲得と問題解決力の育成との関係」について −「認知的支援機構」と「知識表現の二類型」を中心に−．（新潟大学教育学部数学教室『数学教育研究』，第27号．1991，pp.1-39.）

[19] 金子忠雄（1984）．学校数学の教授＝学習活動と「問題」の構成．（『新潟大学教育学部紀要』，第26巻，第1号．1984，pp.1-6.）

[20] 金子忠雄，酒井勝吉，長谷川浩司（1989）．『対話と探求を深める数学科授業の構築』．教育出版.

[21] 井口浩（2017）. 小学校における「図形の面積公式」の教材分析．（研究資料）

[22] 神林信之（2011）．『教材構成の力を鍛える』．晃洋書房，pp.129-130, 202-204.

[23] 金子ゼミナール：風間寛司，伊藤貴代美，阿部知美，中村装子，白澤知美，矢嶋美佳，久住幸子，栞山仁志（1989）．数学学習における理解と技能の関係 −知識の獲得･形成過程を中心にして−．（新潟大学教育学部数学教室『数学教育研究』，第25号．1989，pp.1-37.）

[24] 松沢要一（2014）．『算数教材かんたんアレンジ34』．明治図書，pp.114-117.

[25] 市川伸一（1996）.「学びの理論と学校教育実践 −Researcher-Like Activityを採り入れた授業づくり」.（『学習評価研究』，No.26．1996，pp.42-51.）

[26] Stephen I. Brown and Marion I. Walter.（1983）. The Art of Problem Posing, The Franklin Institute Press,（S.Iブラウン/M.Iワルター著，平林一榮監訳．『いかにして問題を作るか 問題設定の技術』. 1990．東洋館出版社.）

[27] 井口浩，風間寛司，齋藤忠之（2017）．中学校数学におけるRLAを組み込んだ授業開発の取組と展望 −新潟大学教育学部附属長岡中学校の実践研究の系譜を基に−．（『新潟大学教育学部研究紀要』，第9巻，第2号．2017，pp.369-388.）

[28] 新潟大学教育人間科学部附属長岡校園（2007）．『科学をつくりあげる学びのデザイン −学びの壁を越える幼・小・中連携カリキュラム−』．東洋館出版社，pp.106-107.

[29] 文部科学省（2017）．「小学校学習指導要領解説 算数編」．平成29年6月.

[30] 文部科学省（2017）．「中学校学習指導要領解説 数学編」．平成29年7月.

[31] 沼尾正行（2002）. 知識.（日本認知科学学会編『認知科学辞典』．共立出版，p.545.）

[32] 無藤隆（1995）．知識．（岡本･清水･村井監修『発達心理学辞典』．ミネルヴァ書房，p.454.）

[33] 土居道栄（1995）．知識構造．（岡本・清水・村井監修『発達心理学辞典』．ミネルヴァ書房，p.455.）

[34] 星野将直（2016）．『数学教育とメタ認知的知識』. 考古堂.

[35] 金子忠雄（1997）．学校数学における問題解決の在り方再考 −《教授＝学習意図の組み込み》と《数学的・文化的意義の触発》とを中心として−．（『金子忠雄退官記念誌』．1997，pp.2-16.）

[36] 金子ゼミナール：片野史子，鈴木博子，田脇教子，平野孝治，松本弓子，柳健（1996）．数学化活動とメタ認知形成を中心として．（新潟大学教育学部数学教室『数学教育研究』, 第32号．1996, p.17.）

[37] 金子忠雄（1997）．数学科授業における今後の課題と期待 −《学びの意味》と《生きる力》の実現を求めて−．（『教出ホットライン』 数学科特集，Vol.11．1997.10.25．教育出版，pp.1-2.）

[38] 風間寛司, 宮宏之（1999）. 共に『数学』を創りあげる生徒．（新潟大学教育人間科学部附属長岡中学校研究紀要 『これからの時代をたくましく生き抜く生徒』．1999，pp.57-75.）

[39] 伊藤裕司（2002）．ACT理論．（日本認知科学学会編『認知科学辞典』．共立出版，p.6.）

[40] 国宗進編著（1997）．『確かな理解をめざした文字式の学習指導』．明治図書，pp.65-72, 91-110.