一般相対論における FLRW モデルに基づく跳ね返り宇宙

On a bounce solution based on the FLRW model in general relativity

岸本 功 [1]， 石塚 祐太郎 [2]，和田 龍彦 [3]，萩原 真志 [4]

Isao Kishimoto, Yutaro Ishizuka, Tatsuhiko Wada, Masashi Hagiwara

[1] 新潟大学教育学部

[2] 新潟県立柏崎工業高等学校

[3] 株式会社タップ

[4] 富岡市立富岡中学校

概要

一般相対論的宇宙論において，Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) モデルに基づき，膨張と収縮を繰り返す跳ね返り宇宙の可能性を数値的に調べた。放射のエネルギー密度とハッブル定数を観測されている値に固定し，物質および真空のエネルギー密度の値を動かして探った結果，概して宇宙年齢が短くなり，観測事実とはうまく整合しないことがわかった。

1 はじめに

一般相対論がアインシュタインにより提唱されて 100 年目となる今，現代的な宇宙論において，少なくとも古典論の範囲では，一般相対論を用いた計算が不可欠である。一般相対論は，時空の計量テンソル $g_{\mu\nu}$ に関するアインシュタイン方程式：

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{1}$$

で記述される。以下では，簡単のため真空中の光速と万有引力定数を 1 とする幾何学単位系 ($c = 1, G = 1$) をとる。(1) の左辺は時空の幾何学による項であるのに対し，右辺のエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ は時空内にある放射，物質，宇宙項等で決まるものである。ここでは，（少なくとも第 0 近似では）COBE 衛星等の観測と矛盾しない[*1] 一様で等方な宇宙を仮定した Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) モデルを考える。この理論的枠組みで，特に膨張と収縮を繰り返す跳ね返り宇宙の可能性について議論する。[*2]

以下の節では，まず，アインシュタイン方程式 (1) と FLRW モデルについて簡単に説明し，ここで用いる仮定について述べる。次に，主題の跳ね返り宇宙を表す解について解析的な積分表式を導出し，数値計算の結果についても述べていく。なお，定量的な計算で用いた宇宙の観測値については [4] を参照している。

2 FLRW モデル

まず，アインシュタイン方程式 (1) の左辺について，リッチ曲率テンソル $R_{\mu\nu}$ およびスカラー曲率 R は，リーマン曲率テンソル $R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}$ から

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}, \qquad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{2}$$

で定義される。ここでリーマン曲率テンソルは

$$R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^{\mu}_{\sigma\nu} - \partial_\sigma \Gamma^{\mu}_{\rho\nu} + \Gamma^{\mu}_{\rho\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}, \qquad \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda}(\partial_\nu g_{\lambda\rho} + \partial_\rho g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda g_{\nu\rho}) \tag{3}$$

[*1] COBE の後，WMAP そして Planck 衛星による観測結果が出てきており，精度を上げた観測で一様等方宇宙の揺らぎがあることがわかってきている。これを理論的に解明するには初期宇宙の量子論的効果を取り入れた理論に基づく計算が必須であると思われるが，ここでは，そこまでは立ち入らない。

[*2] これは 2013 年度に著者らが行った卒業研究 [1, 2, 3] に基づく。

である。FLRW モデルは，一様で等方な宇宙を仮定するものであり，時空の計量はスケールファクタ $a(t)$ を用いて

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a(t)^2\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\phi^2\right) \tag{4}$$

の形をとる。ここで定数 k は 3 次元空間の曲率に対応しており，$k=1$, $k=0$, $k=-1$ がそれぞれ閉じた宇宙，平坦宇宙，開いた宇宙を表す。

一方，アインシュタイン方程式 (1) の右辺のエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ については，完全流体を仮定し，密度 ρ と圧力 p を用いて

$$T^{\mu\nu} = (\rho+p)u^\mu u^\nu + p\, g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p\,a(t)^{-2}(1-kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p\,a(t)^{-2}r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p\,a(t)^{-2}r^{-2}(\sin\theta)^{-2} \end{pmatrix} \tag{5}$$

の形をとる。今，流体の静止系を扱っているので 4 元速度ベクトルは $u^\mu = (1,\vec{0})$ であることと $T_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}T^{\rho\lambda}$ であることに注意する。以上の ansatz のもとでクリストッフェル記号のゼロでない成分は，

$$\Gamma^t_{rr} = a\dot{a}(1-kr^2)^{-1}, \quad \Gamma^t_{\theta\theta} = a\dot{a}r^2, \quad \Gamma^t_{\phi\phi} = a\dot{a}r^2\sin^2\theta, \quad \Gamma^r_{tr} = \Gamma^r_{rt} = \frac{\dot{a}}{a}, \tag{6}$$

$$\Gamma^r_{rr} = (1-kr^2)^{-1}kr, \quad \Gamma^r_{\theta\theta} = -r(1-kr^2), \quad \Gamma^r_{\phi\phi} = -r(1-kr^2)\sin^2\theta, \quad \Gamma^\theta_{t\theta} = \Gamma^\theta_{\theta t} = \frac{\dot{a}}{a}, \tag{7}$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma^\phi_{t\phi} = \Gamma^\phi_{\phi t} = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \Gamma^\phi_{r\phi} = \Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \cot\theta \tag{8}$$

(ドットは d/dt を表す) と計算され，アインシュタイン方程式 (1) の左辺でゼロでない成分は

$$R_{tt} - \frac{1}{2}g_{tt}R = 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 3\frac{k}{a^2}, \qquad R_{rr} - \frac{1}{2}g_{rr}R = -(2a\ddot{a}+\dot{a}^2+k)(1-kr^2)^{-1}, \tag{9}$$

$$R_{\theta\theta} - \frac{1}{2}g_{\theta\theta}R = -(2a\ddot{a}+\dot{a}^2+k)r^2, \qquad R_{\phi\phi} - \frac{1}{2}g_{\phi\phi}R = -(2a\ddot{a}+\dot{a}^2+k)r^2\sin^2\theta \tag{10}$$

となることがわかる。これと (5) よりアインシュタイン方程式 (1) から導かれる方程式は次の 2 つである：

$$3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 3\frac{k}{a^2} = 8\pi\rho, \qquad -(2a\ddot{a}+\dot{a}^2+k) = 8\pi p\, a^2. \tag{11}$$

これらの式から ρ, p はともに t のみの関数であることがわかる。現在の宇宙の時刻を $t=t_0$ とし，現在のスケールファクタを a_0（つまり $a(t_0)=a_0$），現在のハッブル定数を H_0（つまり $H_0 = \dot{a}(t_0)/a_0$）として，

$$\tilde{a} = a/a_0, \qquad \tilde{t} = H_0 t, \qquad \rho_{\rm crit} = \frac{3H_0^2}{8\pi} \tag{12}$$

とすると (11) の第 1 式は，無次元の $\tilde{a}, \tilde{t}$ を用いて，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}}\right)^2 + U_{\rm eff} = \frac{\Omega_c}{2}; \qquad U_{\rm eff} = -\frac{\tilde{a}^2\rho}{2\rho_{\rm crit}}, \qquad \Omega_c = -\frac{k}{(H_0 a_0)^2} \tag{13}$$

のように書き換えられる。第 1 式は 1 次元空間における，ポテンシャル $U_{\rm eff}$ のもとでの単位質量の質点の（非相対論的）運動を表す「エネルギー保存則」の式と同じ形をしている。この意味での「エネルギー」に対応する右辺に現れている Ω_c は曲率に依存する項である。一方，「ポテンシャル」$U_{\rm eff}$ を与える宇宙のエネルギー密度 ρ については

$$\rho = \rho_{\rm crit}\left(\Omega_v + \frac{\Omega_m}{\tilde{a}^3} + \frac{\Omega_r}{\tilde{a}^4}\right); \qquad \Omega_v = \frac{\rho_v(t_0)}{\rho_{\rm crit}}, \qquad \Omega_m = \frac{\rho_m(t_0)}{\rho_{\rm crit}}, \qquad \Omega_r = \frac{\rho_r(t_0)}{\rho_{\rm crit}} \tag{14}$$

の形をしていると仮定する。ここで ρ_v, ρ_m, ρ_r はそれぞれ真空，物質，放射のエネルギー密度に対応し，$\Omega_v, \Omega_m, \Omega_r$ はそれぞれの現在 $t=t_0$ での値と $\rho_{\rm crit}$ との比を表す。すると，(13) において

$$U_{\rm eff}(\tilde{a}) = -\frac{1}{2}\left(\Omega_v\tilde{a}^2 + \frac{\Omega_m}{\tilde{a}} + \frac{\Omega_r}{\tilde{a}^2}\right), \qquad \Omega_c = 1 - \Omega_v - \Omega_m - \Omega_r \tag{15}$$

と表されることがわかる。

時刻 t が $t = t_{\rm i}(< t_0)$ のとき $a = a_{\rm i}$ (つまり $a(t_{\rm i}) = a_{\rm i}$) だったとし，その時点から現在まで，宇宙は膨張していた（つまり $\dot{a} = a_0 H_0\, d\tilde{a}/d\tilde{t} > 0$）としよう。この間に経過した時間 $t_{0\rm i} \equiv t_0 - t_{\rm i}$ は (13) より

$$t_{0\rm i} = \frac{\tilde{t}_{0\rm i}}{H_0}; \qquad \tilde{t}_{0\rm i} = \int_{\tilde{a}_{\rm i}}^{1} d\tilde{a} \left(1 - \Omega_r - \Omega_m - \Omega_v + \frac{\Omega_r}{\tilde{a}^2} + \frac{\Omega_m}{\tilde{a}} + \Omega_v \tilde{a}^2\right)^{-1/2} \tag{16}$$

($\tilde{a}_{\rm i} \equiv a_{\rm i}/a_0$) の積分をすることで，$H_0, \Omega_v, \Omega_m, \Omega_r$ の値から計算できる。

3 跳ね返り宇宙

前節の準備を元に，ここでは宇宙のスケールファクタの a の振る舞いとして，膨張と収縮を繰り返す跳ね返りモデル[*3]を議論する。跳ね返りが可能なポテンシャル $U_{\rm eff}$ として図 1 のようなものを考えよう。

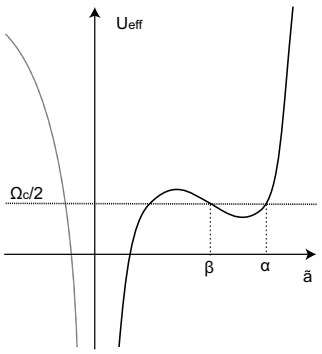


図 1　跳ね返りモデルとなるポテンシャル $U_{\rm eff}(\tilde{a})$ の概形と「エネルギー」$\Omega_c/2$ の関係

この場合，(13) より $|\tilde{a}| \to \infty$ と $|\tilde{a}| \to 0$ の振る舞いから，それぞれ $\Omega_v < 0, \Omega_r > 0$ であることがわかる。さらに，$U_{\rm eff}(\tilde{a})$ が極大，極小を $\tilde{a} > 0$ でとるという条件から $U'_{\rm eff}(\tilde{a}) = -(2\Omega_v \tilde{a}^3 - \Omega_m \tilde{a} - 2\Omega_r)/(2\tilde{a}^3) = 0$ が正の実数解を持たねばならない。このことより $\Omega_m < 0$ という条件が必要となる。古典力学との類似から，図 1 の中の「エネルギー」$\Omega_c/2$ と $U_{\rm eff}(\tilde{a})$ の正の交点のうちの 2 つ α, β ($\alpha > \beta$) の値で決まる区間 $[\beta, \alpha]$ を $\tilde{a}(\tilde{t})$ は振動することができ，跳ね返りの状況を実現できる。ところが，現実の観測から宇宙は膨張していることがわかっているので，観測可能な宇宙のある時刻 $t_{\rm i}$ から現在 t_0 までの間 $d\tilde{a}/d\tilde{t} > 0$ という条件が必要である。つまり，$\beta \le \tilde{a}_{\rm i} < \tilde{a}_0 \le \alpha$ となっていれば，現在は最初の $\tilde{a} = \alpha$ における跳ね返りを起こす前である，ということになり，膨張宇宙と矛盾しない。

3.1 積分表式

まず，(16) の積分を評価するために被積分関数を書き換えよう。一般に，ある $\tilde{a}$ の範囲を動く間にかかる時間を計算するには不定積分：

$$\begin{aligned} &\int dx \left(1 - \Omega_r - \Omega_m - \Omega_v + \frac{\Omega_r}{x^2} + \frac{\Omega_m}{x} + \Omega_v x\right)^{-1/2} \\ &= \int \frac{x dx}{\sqrt{(1 - \Omega_r - \Omega_m - \Omega_v)x^2 + \Omega_r + \Omega_m x + \Omega_v x^4}} \end{aligned} \tag{17}$$

がわかればよい。（積分変数を $\tilde{a}$ の代わりに x とした。）この被積分関数の分母の平方根の中の 4 次式は

$$(1 - \Omega_r - \Omega_m - \Omega_v)x^2 + \Omega_r + \Omega_m x + \Omega_v x^4 = \Omega_v (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta) \tag{18}$$

[*3] 文献 [4] の第 18 章問題 27 を参考にして，議論を展開している。

と因数分解できる。ここで $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は 4 次方程式 $(1-\Omega_r-\Omega_m-\Omega_v)x^2+\Omega_r+\Omega_m x+\Omega_v x^4=0$ の解であり，(18) の左辺に x^3 の項がないことから $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ という関係が成立する。これらの解のうち 3 つが正だとすると残りは負となるので $\delta<0<\gamma<\beta<\alpha$ という大小関係を仮定しよう。（ここでは重解はないとする。）今，跳ね返りモデルとして $\Omega_v<0$ で $\beta\le x\le\alpha$ を運動する場合を想定していることに注意して，(17) から

$$\frac{1}{\sqrt{-\Omega_v}}\int\frac{xdx}{\sqrt{(\alpha-x)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}} \tag{19}$$

がわかればよい。この積分を楕円積分の標準形にもっていくために一次分数変換の形：$x=h(t)\equiv\dfrac{at+b}{ct+d}$ (a, b, c, d は実数定数。$d\neq 0$ とする。）の変数変換を考えよう。

$$\alpha=h(1),\quad \beta=h(-1),\quad \gamma=h(-1/k),\quad \delta=h(1/k) \tag{20}$$

が成り立つように実数 a, b, c, d, k を決める。まず，(20) の最初の 2 つを連立させて a, b について解くと $a=\dfrac{\alpha+\beta}{2}c+\dfrac{\alpha-\beta}{2}d$, $b=\dfrac{\alpha-\beta}{2}c+\dfrac{\alpha+\beta}{2}d$ が得られる。これを (20) の第 3 式に代入すると

$$c=\frac{(2\gamma-\alpha-\beta)k+\alpha-\beta}{2\gamma-\alpha-\beta+(\alpha-\beta)k}\,d \tag{21}$$

となるので

$$a=\frac{((\alpha+\beta)\gamma-2\alpha\beta)k+(\alpha-\beta)\gamma}{2\gamma-\alpha-\beta+(\alpha-\beta)k}\,d,\qquad b=\frac{(\alpha-\beta)\gamma k+(\alpha+\beta)\gamma-2\alpha\beta}{2\gamma-\alpha-\beta+(\alpha-\beta)k}\,d \tag{22}$$

を得る。このとき (22), (21) から $ad-bc$ を計算すると

$$ad-bc=\frac{2d^2}{(2\gamma-\alpha-\beta+(\alpha-\beta)k)^2}(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(1-k^2) \tag{23}$$

となる。つまり $\alpha>\beta>\gamma$ より $k^2<1$ なら $ad-bc>0$ となる。次に (20) の第 4 式から $k=\dfrac{-c\delta+a}{d\delta-b}$ となるがこの右辺に (22), (21) を代入すると

$$k=\frac{((\alpha+\beta)(\gamma+\delta)-2(\alpha\beta+\gamma\delta))\,k+(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{-(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)k-(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)+2(\alpha\beta+\gamma\delta)} \tag{24}$$

という関係式になる。これから k についての 2 次方程式

$$k^2-2Bk+1=0,\qquad B\equiv\frac{-(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)+2(\alpha\beta+\gamma\delta)}{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)} \tag{25}$$

が得られる。この判別式/4 を計算すると

$$B^2-1=\frac{4}{(\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2}(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\delta) \tag{26}$$

となり，これは $\alpha>\beta>\gamma>\delta$ より正である。従って，2 次方程式 (25) は 2 つの異なる実数解

$$k=B\pm\sqrt{B^2-1}=\frac{1}{B\mp\sqrt{B^2-1}} \tag{27}$$

（複号同順）をもつ。ここで B は

$$B=\frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)+(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)} \tag{28}$$

と書き直せるので $\alpha>\beta>\gamma>\delta$ より正であり，さらに $B^2-1>0$ と合わせると $B>1$ であることがわかる。したがって (27) のうち

$$k=B-\sqrt{B^2-1}=\frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)+(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)-2\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\delta)}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)} \tag{29}$$

のほうだけが $0<k<1$ を満たす。ここで (20) より

$$\alpha-\beta=\frac{2(ad-bc)}{d^2-c^2},\qquad\qquad \gamma-\delta=\frac{2k(ad-bc)}{c^2-k^2d^2} \tag{30}$$

となるので，$0<k<1,\ ad-bc>0$ より $d^2-c^2>0,\ c^2-k^2d^2>0$ が成り立つことに注意しておこう。また (20) より $\alpha-\delta=\dfrac{ad-bc}{(c+d)(c+kd)}(k-1)$ から $(c+d)(c+kd)<0$ がわかり，$\alpha>\delta,\ 0<k<1$ を使うと $(c+d)(c+kd)/(kc^2)=(-d/c-1)\,(-d/c-1/k)<0$, したがって $1<-d/c<1/k$ である。つまり、$h'(t)$ の分母がゼロになる（$h(t)$ の微分が発散する）$t=-d/c$ は $1=h^{-1}(\alpha)$ と $1/k=h^{-1}(\delta)$ の間にある。したがって，$\delta<\gamma<\beta<\alpha$ であることと，

$$-\frac{1}{k}=h^{-1}(\gamma)<-1=h^{-1}(\beta)<1=h^{-1}(\alpha)<\frac{1}{k}=h^{-1}(\delta) \tag{31}$$

および $h'(t)=\dfrac{ad-bc}{(ct+d)^2}>0$ (つまり $h(t)$ は単調増加であること) が整合する。この一次分数変換を用いると

$$\begin{aligned}\frac{xdx}{\sqrt{(\alpha-x)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}}&=h(t)h'(t)dt\left(\frac{(ad-bc)^4(1-t)(t+1)(t+1/k)(t-1/k)}{(c+d)(-c+d)(-c/k+d)(c/k+d)(ct+d)^4}\right)^{-1/2}\\
&=\frac{a\sqrt{(c^2-d^2)(k^2d^2-c^2)}}{c(ad-bc)}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}-\frac{\sqrt{(c^2-d^2)(k^2d^2-c^2)}}{cd}\frac{dt}{(1-\frac{c^2}{d^2}t^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\\
&\quad-\sqrt{(c^2-d^2)(k^2d^2-c^2)}\frac{tdt}{(c^2t^2-d^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\end{aligned} \tag{32}$$

となる。最後の項でさらに変数変換：$u=\sqrt{\dfrac{1-t^2}{1-k^2t^2}}$ をすると $du=-\dfrac{1-k^2}{1-k^2t^2}\dfrac{tdt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$, $t^2=\dfrac{1-u^2}{1-k^2u^2}$ より

$$\begin{aligned}\frac{tdt}{(c^2t^2-d^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}&=-\frac{du}{c^2-d^2+(k^2d^2-c^2)u^2}\\
&=-\frac{1}{\sqrt{(c^2-d^2)(k^2d^2-c^2)}}\,d\left(\arctan\sqrt{\left(\frac{k^2d^2-c^2}{c^2-d^2}\right)\left(\frac{1-t^2}{1-k^2t^2}\right)}\right)\end{aligned} \tag{33}$$

が成立する。以上まとめると不定積分は

$$\begin{aligned}\int\frac{xdx}{\sqrt{(\alpha-x)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}}&=\frac{a\sqrt{(c^2-d^2)(k^2d^2-c^2)}}{c(ad-bc)}\int\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\\
&\quad-\frac{\sqrt{(c^2-d^2)(k^2d^2-c^2)}}{cd}\int\frac{dt}{(1-\frac{c^2}{d^2}t^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\\
&\quad+\arctan\sqrt{\left(\frac{k^2d^2-c^2}{c^2-d^2}\right)\left(\frac{1-t^2}{1-k^2t^2}\right)}+C\end{aligned} \tag{34}$$

(C は積分定数) となる。ここで右辺第 1 項，第 2 項において，$t=\sin\theta$ とすると積分の部分はそれぞれ第 1 種楕円積分 $F(\phi\,|\,m)$，第 3 種楕円積分 $\Pi(n;\phi\,|\,m)$：

$$F(\phi\,|\,m)=\int_0^{\sin\phi}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}}=\int_0^{\phi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-m\sin^2\theta}}, \tag{35}$$

$$\Pi(n;\phi\,|\,m)=\int_0^{\sin\phi}\frac{dt}{(1-nt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}}=\int_0^{\phi}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-m\sin^2\theta}} \tag{36}$$

を用いて表せる。以上より (16) の $\tilde{t}_{0\mathrm{i}}$ は

$$\begin{aligned}\tilde{t}_{0\mathrm{i}} &= \frac{1}{\sqrt{-\Omega_v}}\int_{\tilde{a}_\mathrm{i}}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{(\alpha-x)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}}\\ &= \frac{\sqrt{(d^2-c^2)(c^2-k^2d^2)}}{\sqrt{-\Omega_v}}\Bigg(\frac{a}{c(ad-bc)}\left(F(\arcsin(h^{-1}(1))\,|\,k^2)-F(\arcsin(h^{-1}(\tilde{a}_\mathrm{i}))\,|\,k^2)\right)\\ &\qquad -\frac{1}{cd}\left(\Pi(c^2/d^2;\arcsin(h^{-1}(1))\,|\,k^2)-\Pi(c^2/d^2;\arcsin(h^{-1}(\tilde{a}_\mathrm{i}))\,|\,k^2)\right)\Bigg)\\ &\quad +\frac{1}{\sqrt{-\Omega_v}}\left(\arctan\sqrt{\left(\frac{c^2-k^2d^2}{d^2-c^2}\right)\left(\frac{1-(h^{-1}(1))^2}{1-k^2(h^{-1}(1))^2}\right)}-\arctan\sqrt{\left(\frac{c^2-k^2d^2}{d^2-c^2}\right)\left(\frac{1-(h^{-1}(\tilde{a}_\mathrm{i}))^2}{1-k^2(h^{-1}(\tilde{a}_\mathrm{i}))^2}\right)}\right)\end{aligned} \tag{37}$$

のようになる。なお，跳ね返りモデルとして，宇宙が膨張と収縮を繰り返すときの周期 T は，$\tilde{a}$ が $[\beta,\alpha]$ 間を往復する時間なので，$T=\tilde{T}/H_0$ としたとき，

$$\tilde{T}=\frac{2}{\sqrt{-\Omega_v}}\int_\beta^\alpha\frac{xdx}{\sqrt{(\alpha-x)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}}=\frac{4\sqrt{(d^2-c^2)(c^2-k^2d^2)}}{\sqrt{-\Omega_v}}\left(\frac{aK(k^2)}{c(ad-bc)}-\frac{\Pi(c^2/d^2\,|\,k^2)}{cd}\right) \tag{38}$$

で与えられる。ここで $K(m)=F(\pi/2|m)$, $\Pi(n|m)=\Pi(n;\pi/2|m)$ は第 1 種，第 3 種完全楕円積分である。

3.2 数値的評価

次に §3.1 で得られた積分表式 (37) を数値として具体的に評価する。今の跳ね返りモデルでは $\Omega_r>0$ であり，実際に知られている放射によるエネルギー密度の観測値 $\Omega_r\simeq 8\times10^{-5}>0$ と整合する。よって以下の数値的評価においては $\Omega_r=8\times10^{-5}$ ととる。また，(37) の積分の下限としては，$\tilde{a}_\mathrm{i}=0.2$ の場合と $\tilde{a}_\mathrm{i}=2.34\times10^{-11}$ の場合を調べる。これらは，放射の温度がスケールファクタの逆数に比例することに注意すると，宇宙の放射の温度がそれぞれ $2.73\,\mathrm{K}/0.2=14\mathrm{K}=1.2\times10^{-3}\mathrm{eV}/k_\mathrm{B}$, $2.73\,\mathrm{K}/(2.34\times10^{-11})=1.2\times10^{11}\mathrm{K}=10\,\mathrm{MeV}/k_\mathrm{B}$ だったときの場合に相当する。（$2.73\,\mathrm{K}$ は現在の宇宙背景放射の温度である。）なお，宇宙年齢を $t_{0\mathrm{i}}=\tilde{t}_{0\mathrm{i}}/H_0$ で評価する場合は，ビッグバン宇宙で元素合成以前に相当する $\tilde{a}_\mathrm{i}=2.34\times10^{-11}$ 程度を用いるのが妥当であるが，数値的評価の比較のために $\tilde{a}_\mathrm{i}=0.2$ の場合についても調べた。

まずは，今の跳ね返りモデルの条件：$\Omega_v<0$, $\Omega_m<0$, $\beta\le a_\mathrm{i}$, $1\le\alpha$, $U_\mathrm{eff}=\Omega_c/2$ が正の異なる実数解を 3 つ (および負の実数解を 1 つ) もつ，を満たす Ω_m,Ω_v の領域を探し出した。そして，その領域の様々な (Ω_m,Ω_v) の値に対し，数式処理ソフト *Mathematica* を用いて数値的に (37) を評価した。得られた数値データを *gnuplot* を用いて図示したものが，図 2，図 3（$\tilde{a}_\mathrm{i}=0.2$ の場合）および図 4，図 5（$\tilde{a}_\mathrm{i}=2.34\times10^{-11}$ の場合）である。

図 2, 図 4 では，横軸 Ω_m，縦軸 Ω_v として，それぞれの値での同じ $\tilde{t}_{0\mathrm{i}}$ の値を線で結んだ「等高線」プロットである。一方，図 3, 図 5 は，それぞれ図 2, 図 4 の等高線を間引いて，$t_{0\mathrm{i}}=\tilde{t}_{0\mathrm{i}}/H_0$ に換算した値を記したものである。ただし，図 3 のほうの単位は「億年」で，図 4 のほうの単位は「年」であることに注意する。ここで，現在のハッブル定数の観測値として $H_0=72(\mathrm{km/s})/\mathrm{Mpc}$ をとり，

$$t=\frac{\tilde{t}}{72(\mathrm{km/s})/\mathrm{Mpc}}=13.61\times10^9\,\tilde{t}\ \mathrm{yr} \tag{39}$$

により無次元時間 $\tilde{t}$ を通常の時間 t（年）に換算している。（1pc（パーセク）は $3.09\times10^{18}\mathrm{cm}$ である。）

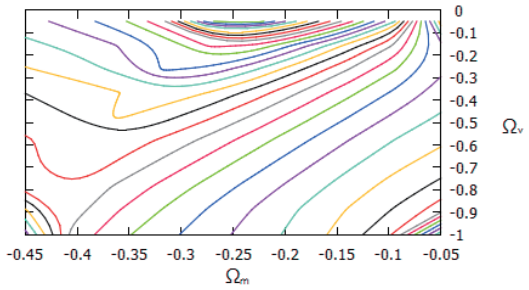


図 2　$\tilde{a}_{\rm i} = 0.2$ の場合の各 Ω_m, Ω_v に対する $\tilde{t}_{0\rm i}$ の等高線。（同じ $\tilde{t}_{0\rm i}$ の値を線で結んだもの。）

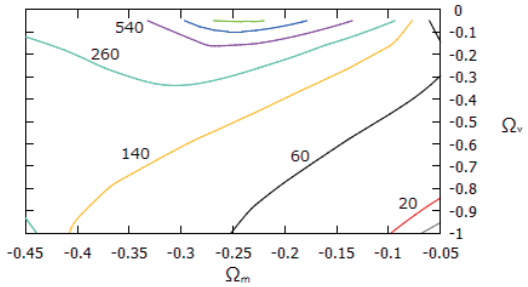


図 3　$\tilde{a}_{\rm i} = 0.2$ の場合の各 Ω_m, Ω_v に対する $t_{0\rm i}$(億年)。（図 2 の等高線を間引いて $t_{0\rm i}$ に換算した。）

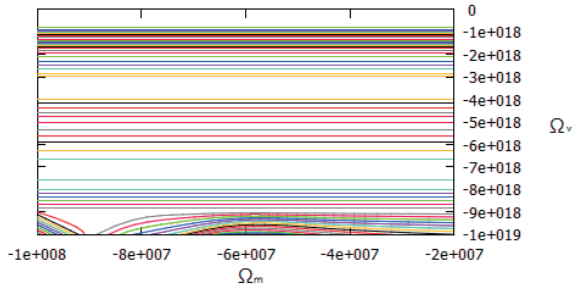


図 4　$\tilde{a}_{\rm i} = 2.34 \times 10^{-11}$ の場合の各 Ω_m, Ω_v に対する $\tilde{t}_{0\rm i}$ の等高線。（同じ $\tilde{t}_{0\rm i}$ の値を線で結んだもの。）

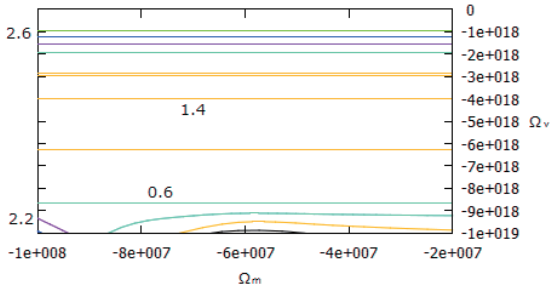


図 5　$\tilde{a}_{\rm i} = 2.34 \times 10^{-11}$ の場合の各 Ω_m, Ω_v に対する $t_{0\rm i}$(年)。（図 4 の等高線を間引いて $t_{0\rm i}$ に換算した。）

ここで宇宙年齢との関係を論じるために，$\tilde{a}_{\rm i} = 2.34 \times 10^{-11}$ の場合の結果に着目しよう。この場合，図 4 に示したとおり，跳ね返りモデルを実現するための Ω_m, Ω_v の値の範囲が，それぞれ $\sim -10^7$, $\sim -10^{18}$ のように絶対値が非常に大きな負の値になっている。通常の物質ではエネルギー密度は正なので，奇妙な物質（および真空）の大きな負のエネルギーが必要である。このようなポテンシャル $U_{\rm eff}$ が実現したとしても，図 5 に示したとおり，元素合成以前 (10MeV) から現在までの時間が，高々数年程度という非常に短い時間になり，知られている最も古い星の年齢（120 億年）と矛盾する。以上の結果から，今の跳ね返りモデルでは（Ω_m, Ω_v の値を微調整しない限り）宇宙年齢を説明できないと思われる。

ただし，仮に宇宙が 14 K 程度 ($\tilde{a}_{\rm i} = 0.2$) から始まったとすれば，図 3 のように現在までの時間 $t_{0\rm i}$ が 120 億年を超える (Ω_m, Ω_v) の領域が存在し，この矛盾はない。

3.3　ポテンシャル $U_{\rm eff}$ と $\Omega_c/2$ が接する場合

ここまでは図 1 のような跳ね返りモデルを想定し，方程式 $U_{\rm eff}(\tilde{a}) = \Omega_c/2$ が異なる 3 つの正の実数解（と 1 つの負の実数解）をもつ場合を考えてきたが，ここでは，図 1 において $\Omega_c/2$ の直線がポテンシャル $U_{\rm eff}$ の極大となるところで接する場合を考えよう。つまり，$\gamma \to \beta$ の極限の場合：$\delta < 0 < \gamma = \beta < \alpha$ に相当し，(16) における $\tilde{a}(= x)$ の積分範囲は区間 $[\beta, \alpha]$ に含まれる部分である。今，

$$f(x) = \Omega_c x^2 + \Omega_r + \Omega_m x + \Omega_v x^4, \qquad \Omega_c \equiv 1 - \Omega_r - \Omega_m - \Omega_v \tag{40}$$

とおくと (18) は

$$f(x) = \Omega_v (x-\alpha)(x-\beta)^2(x-\delta) \tag{41}$$

となる。したがって $f(\beta) = 0, f'(\beta) = 0$，つまり，

$$\Omega_c \beta^2 + \Omega_r + \Omega_m \beta + \Omega_v \beta^4 = 0, \qquad 2\Omega_c \beta + \Omega_m + 4\Omega_v \beta^3 = 0, \tag{42}$$

を満たす。第 2 式に $\beta/4$ をかけて第 1 式から β^4 の項を消去すると β に関する 2 次方程式：

$\Omega_c \beta^2 + 3\Omega_m \beta/2 + 2\Omega_r = 0$ が得られる。これを解くと

$$\beta = -\frac{3\,\Omega_m}{4\,\Omega_c}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{32\,\Omega_r \Omega_c}{9\,\Omega_m^2}}\right) \tag{43}$$

となる。これをもう一度 (42) の第 2 式に代入し，$\Omega_m, \Omega_r, \Omega_v$ の間の関係を導こう。これは方程式 $f(x) = 0$ が重根をもつための係数の間の条件になる。まず，

$$\begin{aligned} 2\Omega_c \beta + \Omega_m + 4\Omega_v \beta^3 = &\left(\frac{4\Omega_v}{\Omega_c}\beta - \frac{6\Omega_m \Omega_v}{\Omega_c^2}\right)\left(\Omega_c \beta^2 + \frac{3}{2}\Omega_m \beta + 2\Omega_r\right) \\ &+ \left(\frac{9\Omega_v \Omega_m^2}{\Omega_c^2} - \frac{8\Omega_r \Omega_v}{\Omega_c} + 2\Omega_c\right)\beta + \frac{12\Omega_r \Omega_m \Omega_v}{\Omega_c^2} + \Omega_m \end{aligned} \tag{44}$$

としておいて (43) を用いて整理すると関係式：

$$\pm\left(\frac{9\Omega_v \Omega_m^2}{2\Omega_c^3} - \frac{4\Omega_r \Omega_v}{\Omega_c^2} + 1\right)\sqrt{1 - \frac{32\,\Omega_r \Omega_c}{9\,\Omega_m^2}} - \frac{1}{3} + \frac{12\Omega_r \Omega_v}{\Omega_c^2} - \frac{9\Omega_v \Omega_m^2}{2\Omega_c^3} = 0 \tag{45}$$

が得られる。（ここで (43) と複号同順。）この関係を満たしつつ (43) の β が $\delta < 0 < \beta < \alpha$ を満たせばよい。ところで (40), (41) より解と係数の関係から

$$\alpha + \delta = -2\beta, \qquad \alpha\delta = 3\beta^2 + \frac{\Omega_c}{\Omega_v}, \qquad \alpha\delta = \beta^2 - \frac{\Omega_m}{2\beta\Omega_v}, \qquad \alpha\delta = \frac{\Omega_r}{\beta^2 \Omega_v}. \tag{46}$$

第 1,4 式から α, δ は 2 次方程式 $x^2 + 2\beta x + \dfrac{\Omega_r}{\beta^2 \Omega_v} = 0$ の解なので，$\delta < 0 < \alpha, \Omega_r > 0, \Omega_v < 0$ を考慮して

$$\alpha = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \frac{\Omega_r}{\beta^2 \Omega_v}}, \qquad \delta = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \frac{\Omega_r}{\beta^2 \Omega_v}} \tag{47}$$

となる。(46) の第 2,3 式は (46) の第 4 式，(42),(43) を用いれば自動的に満たされることがわかる。

次に積分 (17) を書き換えよう。今度は (19) の代わりに

$$\frac{1}{\sqrt{-\Omega_v}}\int\frac{xdx}{(x-\beta)\sqrt{(\alpha-x)(x-\delta)}}=\frac{1}{\sqrt{-\Omega_v}}\int\frac{dx}{\sqrt{(\alpha-x)(x-\delta)}}+\frac{\beta}{\sqrt{-\Omega_v}}\int\frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{(\alpha-x)(x-\delta)}} \tag{48}$$

がわかればよい。まず第 1 項の積分については $x=\delta+(\alpha-\delta)\sin^2\theta$ とおくと $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(\alpha-x)(x-\delta)}}=2\theta+C$ となるが $\tan^2\theta=\dfrac{x-\delta}{\alpha-x}$ を使うと $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(\alpha-x)(x-\delta)}}=2\arctan\sqrt{\frac{x-\delta}{\alpha-x}}+C$ が得られる。また (48) の第 2 項の積分については $\delta<\beta<x<\alpha$ の範囲で $\tanh y=\sqrt{\dfrac{(\beta-\delta)(\alpha-x)}{(\alpha-\beta)(x-\delta)}}$ という変数変換をすると $(\operatorname{arctanh}x)'=\dfrac{1}{1-x^2}$ に注意して $\displaystyle dy=-\frac{\sqrt{(\alpha-\beta)(\beta-\delta)}}{2}\frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{(\alpha-x)(x-\delta)}}$, したがって

$$\int\frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{(\alpha-x)(x-\delta)}}=-\frac{2}{\sqrt{(\alpha-\beta)(\beta-\delta)}}\operatorname{arctanh}\sqrt{\frac{(\beta-\delta)(\alpha-x)}{(\alpha-\beta)(x-\delta)}}+C \tag{49}$$

となる。まとめると (48) は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{-\Omega_v}}\int\frac{xdx}{(x-\beta)\sqrt{(\alpha-x)(x-\delta)}}\\&=\frac{2}{\sqrt{-\Omega_v}}\arctan\sqrt{\frac{x-\delta}{\alpha-x}}-\frac{2\beta}{\sqrt{-\Omega_v(\alpha-\beta)(\beta-\delta)}}\operatorname{arctanh}\sqrt{\frac{(\beta-\delta)(\alpha-x)}{(\alpha-\beta)(x-\delta)}}+C\end{aligned} \tag{50}$$

(C は積分定数) となる。よって，このとき (16) の $\tilde{t}_{0\mathrm{i}}$ は

$$\begin{aligned}\tilde{t}_{0\mathrm{i}}&=\frac{1}{\sqrt{-\Omega_v}}\int_{\tilde{a}_\mathrm{i}}^{1}\frac{xdx}{(x-\beta)\sqrt{(\alpha-x)(x-\delta)}}\\&=\frac{2}{\sqrt{-\Omega_v}}\left(\arctan\sqrt{\frac{1-\delta}{\alpha-1}}-\arctan\sqrt{\frac{\tilde{a}_\mathrm{i}-\delta}{\alpha-\tilde{a}_\mathrm{i}}}\right)\\&\quad-\frac{2\beta}{\sqrt{-\Omega_v(\alpha-\beta)(\beta-\delta)}}\left(\operatorname{arctanh}\sqrt{\frac{(\beta-\delta)(\alpha-1)}{(\alpha-\beta)(1-\delta)}}-\operatorname{arctanh}\sqrt{\frac{(\beta-\delta)(\alpha-\tilde{a}_\mathrm{i})}{(\alpha-\beta)(\tilde{a}_\mathrm{i}-\delta)}}\right)\end{aligned} \tag{51}$$

となる。実は，この $\tilde{t}_{0\mathrm{i}}$ の値は $\beta\to\tilde{a}_\mathrm{i}-0$ のとき log 発散する。このことを見るために，まず，第 1 項 arctan の値は有限であることに注意する。そして

$$\operatorname{arctanh}X=\frac{1}{2}\ln\frac{1+X}{1-X},\qquad\sqrt{\frac{(\beta-\delta)(\alpha-x)}{(\alpha-\beta)(x-\delta)}}=1-\frac{\alpha-\delta}{2(\alpha-\beta)(\beta-\delta)}(x-\beta)+O((x-\beta)^2) \tag{52}$$

を使うと $\beta\to\tilde{a}_\mathrm{i}-0$ のとき

$$\tilde{t}_{0\mathrm{i}}\simeq\frac{\tilde{a}_\mathrm{i}}{\sqrt{-\Omega_v(\alpha-\tilde{a}_\mathrm{i})(\tilde{a}_\mathrm{i}-\delta)}}\ln\frac{1}{\tilde{a}_\mathrm{i}-\beta} \tag{53}$$

となる。

特に $\Omega_r=8\times10^{-5}$, $\tilde{a}_\mathrm{i}=2\times10^{-11}$ として，数値的に探ってみると (40) の $f(x)$ に対し $f(x)=0$ が（大体）重解をもち $\beta\simeq\tilde{a}_\mathrm{i}$ となるのは $\Omega_m\simeq-8\times10^6,\Omega_v\simeq-2\times10^{17}$ 付近であることがわかる。実際，このとき $\sqrt{1-\dfrac{32\,\Omega_r\Omega_c}{9\,\Omega_m^2}}\simeq\dfrac{1}{3}$ となることに注意すると (45) の左辺はプラス符号のとき 9×10^{-21} 程度となり，ほぼゼロとみなしてよいだろう。そして，対応する β は (43) より $\beta=-\dfrac{3\,\Omega_m}{4\,\Omega_c}\left(1-\sqrt{1-\dfrac{32\,\Omega_r\Omega_c}{9\,\Omega_m^2}}\right)\simeq$

$2\times10^{-11}=\tilde{a}_{\rm i}$ となる。このときの α,δ は (47) より $\alpha\simeq\dfrac{1}{\beta}\sqrt{\dfrac{\Omega_r}{-\Omega_v}}=1$, $\delta\simeq-\dfrac{1}{\beta}\sqrt{\dfrac{\Omega_r}{-\Omega_v}}=-1$ となり $\alpha\geq1$ の条件は満たされている。なお，このとき (51) の arctan の中が発散するが

$$\frac{2}{\sqrt{-\Omega_v}}\left(\arctan\sqrt{\frac{1-\delta}{\alpha-1}}-\arctan\sqrt{\frac{\tilde{a}_{\rm i}-\delta}{\alpha-\tilde{a}_{\rm i}}}\right)\simeq\frac{2}{\sqrt{-\Omega_v}}\left(\arctan(+\infty)-\arctan 1\right)\simeq\frac{2}{\sqrt{2\times10^{17}}}\frac{\pi}{4}\quad(54)$$

となるので，小さい値であり $\beta\simeq\tilde{a}_{\rm i}$ では $\tilde{t}_{0\rm i}$ において無視できる。結局，上記の数値の場合，(53) は

$$\tilde{t}_{0\rm i}\simeq\frac{\tilde{a}_{\rm i}}{\sqrt{-\Omega_v}}\ln\frac{1}{\tilde{a}_{\rm i}-\beta}\simeq4.47\times10^{-20}\ln\frac{1}{\tilde{a}_{\rm i}-\beta}\quad(55)$$

となる。この式から $\tilde{t}_{0\rm i}\sim1$ となるのは $\tilde{a}_{\rm i}-\beta\sim e^{-2.24\times10^{19}}\simeq10^{-9.7\times10^{18}}$ という非常に小さい数となる。ここまで小さい数を数値的に区別するのは，誤差を考えると事実上不可能である。しかし，原理的には $\beta\to\tilde{a}_{\rm i}-0$ の極限が存在すれば，(53) のようにいくらでも $\tilde{t}_{0\rm i}$ は大きくなりうる。

なお，以上の計算からわかるように，今の場合，$\tilde{t}_{0\rm i}$ がいくらでも大きくなれることに対応して，(38) の周期は無限大になる。つまり，$\tilde{a}$ が β に近づく際に無限の時間がかかり，宇宙が収縮から膨張へ跳ね返ることはできなくなる。一方，$\tilde{a}$ が α で跳ね返る，つまり膨張から収縮になる，ことは有限の時間で可能である。

4 まとめ

この研究では，一般相対論的宇宙論の枠組みで一様で等方な宇宙を記述するために標準的に用いられている FLRW モデルに基づき，宇宙が膨張と収縮を繰り返す跳ね返りモデルの実現可能性を探った。観測されている放射のエネルギー密度の値 $\Omega_r=8\times10^{-5}$ とハッブル定数の値 $H_0=72({\rm km/s})/{\rm Mpc}$ は正しいとして固定した上で，宇宙のスケールファクタ $\tilde{a}$ の運動に関するポテンシャル $U_{\rm eff}(\tilde{a})$ が図 1 の状況となるような跳ね返りモデルを調べた。その結果，観測されている膨張宇宙と矛盾しないためには，真空のエネルギー密度 Ω_v および物質のエネルギー密度 Ω_m は，ともに負であり，かつ，その絶対値が大きい値である必要があることがわかった。しかし，このときの宇宙年齢を評価すると高々数年程度となってしまい，120 億歳の古い星の存在と大きく矛盾する。ただし，§3.3 のように，$U_{\rm eff}(\tilde{a})=\Omega_c/2$ が重解をもつ跳ね返りモデルの極限の場合は，Ω_m,Ω_v を微調整することで宇宙年齢を引き延ばすことができると思われる。その場合でも，負で絶対値が大きなエネルギー密度をもつ奇妙な物質および真空が存在しなければならない。いずれにせよ，現在の観測事実と矛盾せず，もっともらしい跳ね返り宇宙のモデルを構築することは難しい，と解釈すべきであろう。

今回調べた FLRW モデルに基づく跳ね返り宇宙は，現時点で知られている観測事実と整合しないという否定的な結果であったが，ここで解析したことが一般相対論的宇宙論の今後の発展に多少なりとも寄与することを期待する。

References

[1] 石塚 祐太郎，“宇宙モデル ～跳ね返り宇宙～,” 新潟大学教育学部理科専修卒業論文 (2014)
[2] 和田 龍彦，“一般相対論における宇宙論と跳ね返りモデル,” 新潟大学教育学部理科専修卒業論文 (2014)
[3] 萩原 真志，“FLRW モデルと跳ね返り宇宙論,” 新潟大学教育学部理科専修卒業論文 (2014)
[4] ジェームズ・B・ハートル（著），牧野伸義（訳）“重力：アインシュタインの一般相対性理論入門,” ピアソンエデュケーション (2008).