

# 数学教師教育における教科内容知に関する研究 (1)

— 三平方の定理の拡張に着目して —

## A Study on Subject Matter Knowledge in Mathematics Teacher Education (1)

— Focusing on an Extension of Pythagorean Theorem —

阿部 好貴・垣水 修・長谷川 敬三

張間 忠人・伏木 忠義・渡邊 道之

Abe Yoshitaka, Kakimizu Osamu, Hasegawa Keizo

Harima Tadahito, Fushiki Tadayoshi and Watanabe Michiyuki

### 1 はじめに

中等教育数学においては、「論証」が中心的な数学的活動として位置づけられている。ここでの論証は、厳密な数学的証明 (proof) のみを意味する概念ではなく、それを含んだ広義の意味での argumentation として解釈すべきであろう。これまでの論証指導を反省的に捉えるとき、そこでの学習指導が数学的活動を組織してきたかどうかは議論の余地がある。与えられた命題の定型的な証明は求められても、仮説を立て、仮説的推論と帰納的・演繹的推論との間をジグザグに進む試行錯誤のプロセスを、生徒たちはおこなっているのであろうか。また、小学校段階から算数・数学の授業で日常的になされる、解法の説明 (なぜそう考えたか) やその後の議論について、それを論証指導の場面として、教師も生徒も意識してきたであろうか。「論証」を、静的な内容として捉えるのではなく、こうした日常的な数学的活動に埋め込まれている動的なプロセスとして捉えていくことが、求められている (阿部・石井, 2015)。

このような問題の解決を、中等教育段階におけるカリキュラム開発や教授法に求める方策も考えられる。その一方で、このような問題は、教師の数学観、数学教育観に大きく関わる問題であり、教師がこのような数学的活動を授業として組織化するためには、単なる指導方法論の議論だけでは十分とはいえないし、証明を知識として有してそれを説明できればよい、ともならない。例えば、教師が円周角の定理や正弦定理の証明を理解していて、丁寧に説明することは、生徒が定理を知識として記憶し、テストで使えるようにするためには十分かもしれない。しかし、それでは学習指導要領に記述されている目標「数学的活動を通して、数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め、事象を数学的に考察し表現する能力を高め、創造性の基礎を培うとともに、数学のよさを認識し、それらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断

する態度を育てる」を達成することは難しい。

このように中等教育において数学教師に必要とされることは、単に多くの数学的事実や手続きに関する知識を有することだけではなく、教科内容に関する明確な理解とそれを超えるより広くて体系的な知識や、数学が社会や他の学問とどのように関わっているか、関われば良いのかに関する開かれた認識、さらには数学を教育的に捉える視点や教材開発および教科内容を自ら発展的・教育的に展開できること、といった様々な知識や能力が求められる。本研究では、このような知識や能力を教科内容知 (Ball et al, 2008) として捉え、数学教師を志す学生に対する教師教育の文脈において、学生が数学的活動としての論証をどのようにおこなうのか、それによってどのような教科内容知が構成されるのか、さらにその育成はどのようにしてなされるのか、ということをも明らかにすることを目的とする。

そのための基礎研究として本稿では、三平方の定理の拡張としての「四平方の定理」、および「 $n$ -平方の定理」への一般化の数学的考察をおこない、それぞれにおいて学生に期待する数学的活動、そしてそこで構成される教科内容知を考察する。三平方の定理は、中学校数学の「図形」領域における 1 つの頂点として位置づいているが、その証明は 200 以上存在するといわれ、多様な数学的活動が期待される。無論、学生に中学校数学水準の活動を求めるだけではなく、その定理の拡張としての「四平方の定理」を命題として構成し、証明する中で、学生自身が数学的活動をおこなうこと、それによって教科内容知としての数学的な見方・考え方を構成することができると思われる。さらに、 $n$ -単体や  $n$  次元体積について理解し、 $n$ -平方の定理について理解しようと務めることは、日常生活との関連が深いレベルにある数学と抽象性の高い数学とのつながりを理解するために格好の題材になっていると考えられる。

## 2 四平方の定理の数学的考察

本節では、四平方の定理とその 7 通りの証明方法を紹介する。四平方の定理は古くから知られており、四平方の定理を記述した古い文献も複数ある。歴史的な経緯に関してはたとえば Quardrat et al (2001) などを参照されたい。

四面体において、ある一つの頂点に集まる 3 つの三角形の角がすべて直角のとき、直角四面体と呼ぶことにする。直角四面体の四平方の定理は次のように述べられる。

定理 2.1 四面体  $OABC$  において、 $\triangle OAB$ ,  $\triangle OBC$ ,  $\triangle OCA$ ,  $\triangle ABC$  の面積をそれぞれ  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S$  とする。3 つの角  $\angle AOB$ ,  $\angle BOC$ ,  $\angle COA$  が  $90^\circ$  のとき

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \quad (1)$$

が成り立つ。

### 2.1 三平方の定理を用いた証明

中学校数学の内容だけで解く方法を紹介する。

直角四面体  $OABC$  において、 $OA$  の長さを  $a$ ,  $OB$  の長さを  $b$ ,  $OC$  の長さを  $c$  とする。示すべき等式 (1) の右辺の値は

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = \frac{1}{4}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

である。そこで等式 (1) を示すためには、 $S^2$  の値が  $\frac{1}{4}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$  になることを示せばよい。3 辺

$OA, OB, OC$  の長さを  $a, b, c$  とする. このとき, 三平方の定理から 3 辺  $AB, BC, CA$  の長さは, それぞれ,  $\sqrt{a^2 + b^2}, \sqrt{b^2 + c^2}, \sqrt{c^2 + a^2}$  である.

四面体  $OABC$  は直角四面体なので,  $\triangle ABC$  は鋭角三角形であることに注意しよう. いま, 点  $A$  から辺  $BC$  に垂線を下し, その交点を  $D$  とする.  $AD$  の長さを  $h$ ,  $BD$  の長さを  $x$  とする. このとき, 三平方の定理より

$$(a^2 + b^2) - x^2 = (c^2 + a^2) - (\sqrt{b^2 + c^2} - x)^2.$$

ゆえに

$$x = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

再び, 三平方の定理より

$$h^2 = (a^2 + b^2) - \frac{b^4}{b^2 + c^2} = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{b^2 + c^2}$$

となり,

$$S^2 = \frac{1}{4} \cdot BC^2 \cdot h^2 = \frac{1}{4}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

がわかる.

## 2.2 ヘロンの公式を用いた証明

次に高校数学でお馴染みのヘロンの公式を用いた証明方法を紹介する.

$s = AB, t = BC, u = CA, \ell = \frac{s+t+u}{2}$  とおく. ヘロンの公式から

$$\begin{aligned} S^2 &= \ell(\ell - s)(\ell - t)(\ell - u) \\ &= \frac{1}{16}(2s^2t^2 + 2t^2u^2 + 2u^2s^2 - s^4 - t^4 - u^4) \\ &= \frac{1}{16}\{2(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) + 2(b^2 + c^2)(c^2 + a^2) \\ &\quad + 2(c^2 + a^2)(a^2 + b^2) - (a^2 + b^2)^2 - (b^2 + c^2)^2 - (c^2 + a^2)^2\} \end{aligned} \tag{2}$$

を得る. これを計算して

$$S^2 = \frac{1}{4}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

## 2.3 三角関数の公式を用いた証明

三角形の面積を 2 辺の長さとその挟む角の正弦で表した公式と余弦定理を使えば, 次のように証明できる.

$\theta = \triangle BAC, s = AB, t = BC, u = CA$  とおく.

$$S^2 = \left(\frac{1}{2}su \sin \theta\right)^2 = \frac{1}{4}s^2u^2(1 - \cos^2 \theta)$$

に

$$\cos \theta = \frac{s^2 + u^2 - t^2}{2su}$$

を代入すると

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{4}s^2u^2 - \frac{1}{16}(s^2 + u^2 - t^2)^2 \\ &= \frac{1}{16}(2s^2t^2 + 2t^2u^2 + 2u^2s^2 - s^4 - t^4 - u^4) \end{aligned}$$

を得る。以下、等式 (2) の第3式に続く。

## 2.4 初等幾何を用いた証明

空間図形における直線や平面の位置関係については、高校数学の数学Aで学習する。三垂線の定理等を使って、 $\triangle ABC$  において  $BC$  を底辺としたときの高さを求めてみよう。

点  $O$  から  $\triangle ABC$  に下した垂線の足を  $H$ 、2点  $A, H$  を通る直線と辺  $BC$  との交点を  $D$  とする。このとき、 $OA \perp BC$ ,  $OH \perp BC$  なので  $AD \perp BC$ 。ゆえに、三垂線の定理より、 $OD \perp BC$ 。よって、 $\triangle DBO$  と  $\triangle OBC$  は相似な直角三角形なので、

$$OD : c = b : \sqrt{b^2 + c^2}.$$

ゆえに

$$OD = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

であり、 $\triangle OAD$  は直角三角形なので、高さ  $AD$  の長さは

$$AD = \sqrt{a^2 + \frac{b^2c^2}{b^2 + c^2}} = \sqrt{\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{b^2 + c^2}}$$

となる。よって

$$S^2 = \frac{1}{4} \cdot BC^2 \cdot AD^2 = \frac{1}{4}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

## 2.5 座標空間を用いた証明

点  $O$  を原点、点  $A(a, 0, 0)$  を  $x$  軸上に、点  $B(0, b, 0)$  を  $y$  軸上に、点  $C(0, 0, c)$  を  $z$  軸上にとる。ただし  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$  とする。このとき、3点  $A, B, C$  を含む平面の方程式は

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

ゆえに、原点  $O$  から平面までの距離は

$$\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

また、直角四面体  $OABC$  の体積は  $\frac{abc}{6}$ 。よって、 $\triangle ABC$  の面積  $S$  の2乗は

$$S^2 = \frac{1}{2}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

## 2.6 正射影の考え方を用いた証明

$\triangle ABC$  を含む平面  $\pi$  と  $\triangle OAB$  を含む平面  $\pi_1$  のなす角を  $\theta_1$  とすると、平面  $\pi_1$  と辺  $OC$  は直交している。

$$S_1 = S \cos \theta_1$$

と書ける. 同様に, 平面  $\pi$  と  $\triangle OBC$  を含む平面  $\pi_2$  のなす角を  $\theta_2$ , 平面  $\pi$  と  $\triangle OCA$  を含む平面  $\pi_3$  のなす角を  $\theta_3$  とすると

$$S_2 = S \cos \theta_2, S_3 = S \cos \theta_3$$

を得る. ゆえに, 方向余弦の関係式  $\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3 = 1$  を使って

$$\begin{aligned} S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 &= S^2 \cos^2 \theta_1 + S^2 \cos^2 \theta_2 + S^2 \cos^2 \theta_3 \\ &= S^2 \{ \cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3 \} \\ &= S^2. \end{aligned}$$

法線ベクトルの内積を用いると上の証明は以下のように記述できる.  $\triangle ABC$  を含む平面  $\pi$  と  $\triangle OAB$  を含む平面  $\pi_1$  のなす角を  $\theta_1$  とすると, 平面  $\pi_1$  と辺  $OC$  は直交しているので

$$S_1 = S \cdot \cos \theta_1$$

と書ける. さらに,  $\cos \theta_1$  は  $\pi$  の単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  と  $\pi_1$  の単位法線ベクトル  $\mathbf{e}_1$  の内積に等しいので

$$S_1 = S \cdot (\mathbf{n}, \mathbf{e}_1)$$

同様に,  $\triangle OBC$  を含む平面の単位法線ベクトルを  $\mathbf{e}_2$ ,  $\triangle OCA$  を含む平面の単位法線ベクトルを  $\mathbf{e}_3$  とすると

$$S_2 = S \cdot (\mathbf{n}, \mathbf{e}_2), S_3 = S \cdot (\mathbf{n}, \mathbf{e}_3)$$

を得る. ゆえに

$$\begin{aligned} S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 &= S^2 \cdot (\mathbf{n}, \mathbf{e}_1)^2 + S^2 \cdot (\mathbf{n}, \mathbf{e}_2)^2 + S^2 \cdot (\mathbf{n}, \mathbf{e}_3)^2 \\ &= S^2 \{ (\mathbf{n}, \mathbf{e}_1)^2 + (\mathbf{n}, \mathbf{e}_2)^2 + (\mathbf{n}, \mathbf{e}_3)^2 \} \\ &= S^2 \cdot (\mathbf{n}, \mathbf{n}) \\ &= S^2. \end{aligned}$$

正射影の考え方をういた証明方法から, 四平方の定理は以下の状況でも成り立つことがわかる.

**定理 2.2** 面積が  $S$  であるような 3 次元空間内の平面上にある図形を  $xy$  平面に正射影した図形の面積を  $S_1$ ,  $yz$  平面に正射影した図形の面積を  $S_2$ ,  $zx$  平面に正射影した図形の面積を  $S_3$  とする. このとき

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$$

が成り立つ.

## 2.7 外積を用いた証明

3 次元座標空間における原点  $O$  と 3 点  $A, B, C$  を頂点とする 4 面体  $OABC$  に対して,  $a = \overrightarrow{OA}, b = \overrightarrow{OB}, c = \overrightarrow{OC}$  とおく.  $\triangle OBC, \triangle OCA, \triangle OAB$  の面積をそれぞれ  $v_A, v_B, v_C$  とするとき,

$$v_A = \frac{1}{2} \|b \times c\|, v_B = \frac{1}{2} \|c \times a\|, v_C = \frac{1}{2} \|a \times b\|$$

で与えられ,  $\triangle ABC$  の面積  $v_O$  は

$$v_O = \frac{1}{2} \|b \times c + c \times a + a \times b\|$$

で与えられる. これより

$$v_O^2 = \frac{1}{4} \|b \times c + c \times a + a \times b\|^2 =$$

$$\frac{1}{4} \{ \|b \times c\|^2 + \|c \times a\|^2 + \|a \times b\|^2 \} + \frac{1}{2} \{ (b \times c, c \times a) + (c \times a, a \times b) + (a \times b, b \times c) \}$$

が得られる。

$\triangle OCA$  と  $\triangle OAB$  のなす角を  $\theta_{BC}$ ,  $\triangle OAB$  と  $\triangle OBC$  のなす角を  $\theta_{CA}$ ,  $\triangle OBC$  と  $\triangle OCA$  のなす角を  $\theta_{AB}$  とおくと,

$$(c \times a, a \times b) = -\|c \times a\| \|a \times b\| \cos \theta_{BC}$$

$$(a \times b, b \times c) = -\|a \times b\| \|b \times c\| \cos \theta_{CA}$$

$$(b \times c, c \times a) = -\|b \times c\| \|c \times a\| \cos \theta_{AB}$$

が成り立つから, 3次元の余弦定理

$$v_O^2 = v_A^2 + v_B^2 + v_C^2 - 2\{v_B v_C \cos \theta_{BC} + v_C v_A \cos \theta_{CA} + v_A v_B \cos \theta_{AB}\}$$

が得られる. 特に,  $\theta_{BC} = \theta_{CA} = \theta_{AB} = 90^\circ$  のとき, 四平方の定理が得られる.

3次元余弦定理の「角」を含まない形は, 公式

$$(b \times c, c \times a) = (b, c)(c, a) - (a, b)\|c\|^2,$$

$$(c \times a, a \times b) = (c, a)(a, b) - (b, c)\|a\|^2,$$

$$(a \times b, b \times c) = (a, b)(b, c) - (c, a)\|b\|^2$$

を適用して,

$$v_O^2 = v_A^2 + v_B^2 + v_C^2 + \frac{1}{2} \{ (b, c)(c, a) + (c, a)(a, b) + (a, b)(b, c) - \|a\|^2(b, c) - \|b\|^2(c, a) - \|c\|^2(a, b) \}$$

と表される.

### 3 $n$ -平方の定理

四平方の定理のさらに一般の  $n$ 次元への拡張を考えるにあたり,  $n$ 次元ユークリッド空間と, 多角形, 多面体の拡張として「 $n$ -多胞体 ( $n$ -polytope)」, および面積, 体積の拡張として「 $n$ 次元体積 ( $n$ -dimensional volume)」を定義しておく.

2点を結ぶと「辺」ができ, 一直線上にない3点を2点ずつ結ぶと3つの辺からなる「三角形」ができる. 同様に, 一平面上にない4点をそれぞれ3点ずつ結ぶと4つの三角形からなる「四面体」ができる.  $n$ 次元のユークリッド空間内で,  $(n-1)$ 次元超平面上にない  $(n+1)$ 点に対して, それぞれ  $n$ 点ずつ結ぶと  $(n+1)$ 個の  $(n-1)$ -面単体からなる「 $n$ -単体 ( $n$ -simplex)」ができる. 2-単体が三角形で, 3-単体が四面体になる.  $n$ -単体はそれぞれ  ${}_{n+1}C_{k+1}$  個の  $k$ -単体から成っている. 幾つかの  $n$ -単体をその共通の  $(n-1)$ -面単体において合わせたものが「 $n$ -多胞体 ( $n$ -polytope)」である.

2-単体, すなわち三角形  $OAB$  の面積は

$$\frac{1}{2} \det(\vec{OA}, \vec{OB})$$

で与えられる. 3-単体, すなわち四面体  $OABC$  の体積は

$$\frac{1}{3!} \det(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$$

で与えられる.

面積, 体積の拡張として「 $n$ 次元体積」は標準的な  $n$ 次元ユークリッド空間  $E$  上の「測度」である. すなわち,  $E$  の  $n$ -多胞体の集合  $P$  から非負の実数への写像  $m$  で, 次の条件を満たすものとして一意的に定まる.

1.  $X \subset Y \rightarrow m(X) \leq m(Y)$
2.  $X$  と  $Y$  が内部を共有しないとき,  $m(X \cup Y) = m(X) + m(Y)$
3.  $m(F) = 1$

ここで,  $F$  は単位  $n$ -方体である.

この測度に対して,  $n$ -単体  $OA_1A_2 \cdots A_n$  の体積は

$$V = \frac{1}{n!} \det(\vec{OA_1}, \vec{OA_2}, \dots, \vec{OA_n})$$

で与えられ, 特に,  $A_1 = (a_1, 0, \dots, 0), A_2 = (0, a_2, 0, \dots, 0), \dots, A_n = (0, \dots, 0, a_n)$  のとき,

$$V = \frac{1}{n!} a_1 a_2 \cdots a_n$$

で与えられる.

$n$ -単体は  $(n+1)$  個の  $(n-1)$ -単体で囲まれている. 原点  $O$  を頂点とする  $n$  個の  $(n-1)$ -単体の体積は, 上の場合は, それぞれ

$$V_i = \frac{1}{(n-1)!} a_1 \cdots \hat{a}_i \cdots a_n, i = 1, \dots, n$$

である. 一方, 底面の  $(n-1)$ -単体の体積  $V_0$  は

$$V = \frac{1}{n} h V_0,$$

ここで,  $h$  は原点  $O$  から頂点  $A_1, A_2, \dots, A_n$  で張られる超平面  $\alpha$  への垂線の足を  $H$  としたときの  $\vec{OH}$  の長さによって定まる. 超平面  $\alpha$  の方程式は

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \cdots + \frac{x_n}{a_n} = 1$$

で与えられるから,  $H$  の座標は,

$$H = \frac{1}{a} \left( \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n} \right),$$

ここで,

$$a = \frac{1}{(a_1)^2} + \frac{1}{(a_2)^2} + \cdots + \frac{1}{(a_n)^2}.$$

したがって,

$$h = \frac{1}{\sqrt{a}}, V_0 = n\sqrt{a}V$$

が成り立つ.

これより,  $n$ -平方の定理

$$V_0^2 = V_1^2 + V_2^2 + \cdots + V_n^2$$

が導かれる.

この  $n$ -平方の定理は, さらに次の「 $n$ 次元余弦定理」に拡張される. すなわち,  $n$ 次元座標空間における原点  $O$  と  $A_1, A_2, \dots, A_n$  を頂点とする  $n$ -単体  $OA_1A_2 \cdots A_n$  に対して,

$$v_O^2 = v_{A_1}^2 + v_{A_2}^2 + \cdots + v_{A_n}^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} v_{A_i} v_{A_j} \cos \theta_{i,j}$$

が成り立つ. ここで,  $v_O$  は  $(n-1)$ -面単体  $A_1 \cdots A_i \cdots A_n$  の体積,  $v_{A_i}$  は  $(n-1)$ -単体  $OA_1 \cdots \hat{A}_i \cdots A_n$  の体積,  $\theta_{i,j}$  は  $(n-1)$ -面単体  $OA_1 \cdots \hat{A}_i \cdots A_n$  と  $(n-1)$ -面単体  $OA_1 \cdots \hat{A}_j \cdots A_n$  のなす角である.

証明は3次元ユークリッド空間の「外積」を拡張した  $n$ 次元ユークリッド空間の「外積」を使用する.

$n$ 次元ユークリッド空間の  $(n-1)$ 個のベクトル  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  の外積  $[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$  は, 3次元の場合と同様に, 等式

$$([x_1, x_2, \dots, x_{n-1}], x) = \det(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x)$$

によって一意的に定義される. ここで, かっこは  $n$ 次元ユークリッド空間の標準内積,  $x$  は任意のベクトルである.

$$\alpha_1 = \overrightarrow{OA_1}, \alpha_2 = \overrightarrow{OA_2}, \dots, \alpha_n = \overrightarrow{OA_n}$$

とおくとき,  $n$ -単体  $OA_1A_2 \cdots A_n$  の  $(n+1)$ 個の  $(n-1)$ -面単体の体積は

$$v_O = \frac{1}{(n-1)!} \left\| \sum_{i=1}^n [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_n] \right\|,$$

$$v_{\alpha_i} = \frac{1}{(n-1)!} \left\| [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_n] \right\|, i = 1, \dots, n$$

で与えられ, 一方

$$([\alpha_1, \alpha_2, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_n], [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_n]) = -\left\| [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_n] \right\| \left\| [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_n] \right\| \cos \theta_{i,j}$$

が成り立つことから「 $n$ 次元余弦定理」が得られる. ここで, ベクトル  $\alpha_i$  は  $n$ 個の点  $O, A_1, \dots, \hat{A}_i, \dots, A_n$  で張られる超平面に垂直, すなわちこの超平面の法ベクトルであることに注意.

外積は「グラスマン代数」としてさらに体系的に捉えることができ, 数学(幾何学)においてのみならず理論物理学においても基本的な概念である(大森, 2004).

## 4 三平方の定理の拡張に関する教科内容知について

三平方の定理は中学校数学の学習課程において到達目標の一つとして位置づけられており、様々な応用例を通して定理の意味の理解と定着が図られている。さらに高校数学においては、余弦定理や平面ベクトル、空間ベクトル等の扱いからもわかる通り、三平方の定理は、図形領域での理論的な展開において出発点となっている。したがって四平方の定理の学習課題としての意義は、まず一つには三平方の定理の拡張の新しい方向性を示していることにあり、同時に、既存の学習課程のなかでの三平方の定理の位置づけを振り返り、再確認する点にもあると言える。

三平方の定理は、1次元量である長さの関係式を平面図形において記述したものであり、3つの線分が直角三角形を作るとき、それらの線分の長さの関係式を与えている。これを2次元量の面積について3次元空間に拡張したものが四平方の定理である。四平方の定理は、4つの三角形が直角四面体を作るとき、それらの三角形の面積の関係を平方式で与えたものである。四平方の定理が使える興味深い状況を考えよう。3次元座標空間において、平面上にある図形を考える。この図形を  $xy$  平面に影を落とした図形の面積を  $S_1$ 、 $yz$  平面に影を落とした図形の面積を  $S_2$ 、 $zx$  平面に影を落とした図形の面積を  $S_3$  とする。このとき、元の図形の面積の平方は  $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$  によって求めることができる。

平面図形で最も基本的な図形が三角形（2次元単体）であり、空間図形で最も基本的な図形が四面体（3次元単体）である。三平方の定理と四平方の定理は、これらの基本図形において  $90^\circ$  の角をもつ条件の下で記述された基本計量（長さと面積）の2次の関係式である。前節では、一般次元の単体における体積についても2次の関係式が同じように成り立つことを紹介している。なお、一般次元の幾何学的概念については、例えば参考文献（佐武，1974）の附録の §4 に詳しくある。

空間図形に関する数学的考察は、小学校から中学、高等学校においても児童、生徒が構成した数学的知識と考察力を活用するのに適しており、近年特にその重要性が指摘されている。空間図形に対する数学的認識力をどのように育んでいくかが、様々な場面において数学教育の課題として取り上げられてきており、このようなテーマを取り上げて授業をおこなう教師自身においても、空間図形に対する数学的なアプローチに習熟していることが求められるであろう。

数学の教師に求められる力量の点から考えるならば、数学の教師を目指す学生にとって、空間図形に対して数学的に考察する力を養うことは、自身の数学教師としての力を伸ばしていくために取り組むべき課題として格好の課題であり、重要な題材であると考えられる。なぜなら、教科内容知に関する明確な理解を必要とし、さらにそうした教科内容知を、それを超えるより体系的な数学へとつないでいくことが必要とされるからである。学生にとって、空間図形に対して数学的に考察することはまた、数学的題材を教育的にとらえ、それをもとに教材開発をおこなう力を培っていくためにも有効であると考えられる。第2節においては、取り組むべき課題の重要な一例として、三平方の定理を出発点とし、それを空間図形の場合に発展させた四平方の定理を題材として取り上げた。第2節における四平方の定理の様々な証明を理解し、比較検討を行っていくとき、さらに次のような視点に基づいた考察が重要となる。

- 四平方の定理の意味を、どのような形で三平方の定理の拡張となっているかの観点から考えること。
- 様々な証明方法の吟味を、三平方との類似性があるかどうか、三平方の定理をどのように用いて四平方の定理を示しているのか、それとも三平方の定理の場合にはなかった新たな視点にたった三平方のときは独立な証明なのか、等の観点からおこなうこと。
- 証明の吟味を通して、幾何学の体系や、さらに線形代数学等を用いて一般次元の図形に対して考察す

る大学数学の枠組みでの位置付けをおこなうこと。

- 中等教育における数学科の学習過程において、四平方の定理の教材としての活用例を具体的に考えてみること。

こうした課題に学生を取り組ませることは、学生が自ら持っている数学の知識について反省的に振り返り、どのような力が数学教師として必要とされるかを認識し、勉学の方向性を定めるために重要であると考えられる。教員養成と数学教師教育の指針として、教材開発の研究を重要な柱として位置づけていくための試みとしての意味も大きいと考えられる。

さらに、 $n$ -単体や  $n$  次元体積について理解し、 $n$ -平方の定理について理解しようと務めることは、日常生活との関連が深いレベルにある数学と抽象性の高い数学とのつながりを理解するために格好の題材になっていると考えられる。

## 5 おわりに

どのように優れた教材であっても、その授業の成否はそれをを用いる教師に依存する。教師が教材をどのように捉え、どのように指導するのか、ということは無論両方とも不可欠な要素となる。本稿では特に前者の視点から、それを教科内容知として、三平方の定理の拡張としての「四平方の定理」、および「 $n$ -平方の定理」への一般化を、論証指導の事例として考察した。本稿で述べたように、そこでは命題の系統的な構成、多様な証明の構成およびそこで共通する数学的本質の理解、さらにそれを教材としてどのように捉えるのか、といった様々な教科内容知が求められる。

本稿では、当該定理に関する教科内容知を明らかにしており、それは数学教師教育における教材研究として有効に機能すると考えられる。したがって今後の課題は、本教材を用いた実践をおこない、それによって本稿で考察した教科内容知が構成されうるのか、ということを検証することである。

## 参考文献

- [1] 阿部好貴・石井英真, 数学的リテラシーとしての論証の必要性 (2), 日本数学教育学会「第 3 回春期研究大会論文集」, 63-66, 2015.
- [2] Ball, D. L., Thames, M. H., Phelps, G. Content Knowledge for teaching: what make it special? Journal of Teacher Education, 59(5), 389-407, 2008.
- [3] 大森英樹, 数学の中の物理学, 東京大学出版, 2004.
- [4] Quadrat, J.-P., Lasserre, J., Hiriart-Urruty, J.-B. Pythagoras' theorem for areas, The American Mathematical Monthly, 108(6), 549-551, 2001.
- [5] 佐武一郎, 線形代数学, 裳華房, 1974.