

# 粘性流体の薄膜の不安定性とその実験用教材

Instability for a thin layer of viscous fluid and  
an educational material for its experiments

岸本 功<sup>1</sup>, 赤間 俊介<sup>2</sup>, 小杉 真登<sup>3</sup>, 佐藤 智宏<sup>4</sup>

Isao Kishimoto, Shunsuke Akama, Masato Kosugi, Tomohiro Sato

<sup>1</sup> 新潟大学教育学部

<sup>2</sup> 住友不動産販売株式会社 仙台営業センター

<sup>3</sup> 株式会社ソリマチ技研 新潟支社

<sup>4</sup> 長岡市立南中学校

## 概要

水平に置いた平面上に、粘性のある流体の薄い膜を作った後、その板を裏返すと、しずくが規則的に現れる。これはレイリー-テイラー不安定性として知られている現象である。ここでは、オリーブ油を用いて実際に実験を行い、その結果と流体力学に基づく理論との比較を行う。また、関連する流体力学から導かれる理論的表式についてまとめるとともに、一般の学校等で実施可能な粘性流体の実験教材として役立つように、その実験および解析方法を具体的に詳しく述べる。

## 1 はじめに

水平に置いた平面上に油を薄く広げた後、その板を裏返すと、油のしずくが生じる。これをよく観察すると、そのしずくの位置は規則的に並んでいるように見える。このような現象は、わざわざ設定しなくても、日常生活においても冷蔵庫の天井等で時々見かけることができる。これらは、粘性流体からなる薄膜に関するレイリー-テイラー不安定性として知られている現象である。ここでは、実際に食用オリーブ油を用いて実験を遂行し、生じたしずくの間隔を測定して、その理論値との比較を行った。<sup>\*1</sup> このような実験と理論的考察については、先行研究として文献 [3] があり、そこでは、シリコン油の薄膜を用いて本格的な実験が行われている。ここでは、より簡単に入手しやすい食用オリーブ油で、かつ、比較的簡単に用意できる器具のみを用いて、検証実験を遂行した。結果を比較・検証する際の理論に関しては [3] で導出してあることを用いた。

本稿の構成は次のようになっている。まず、次の節では、粘性流体の基礎方程式から今回の実験と比較できる量（しずくのピークの間隔の値）を導出する。これは、[3] に載っていることであるが、本稿のみでなるべく自己充足するように理論計算をまとめたものである。第 3 節では、我々が行った実験の詳細とその解析結果を述べる。第 4 節では、今回の実験に関するまとめを行い、一般の学校等における実験用教材の観点からコメントする。また、付録 A では、観測されたしずくのパターンにおけるピーク間の距離の測定データを表にしてまとめる。

<sup>\*1</sup> これは、著者らが 2016 年度に卒業研究 [1] の一部として行った実験に基づいている。本ゼミは、[2] をテキストとして進めていたが、レイリー-テイラー不安定性のより詳しい理論および実験に関しては、参考文献として挙げられている文献 [3] に着目した。

なお、本稿にまとめた実験の他に、プラトー-レイリー不安定性と呼ばれる現象に関係した水のジェットの实验および解析も行った [1] のであるが、こちらは対応する理論の解析が定量的に不十分な段階である。

## 2 理論

ここでは、粘性流体の基礎方程式から出発し、実験と比較するための理論的解析についてまとめる [3].

### 2.1 境界面の変位の方程式

粘性流体の基本方程式は、ニュートンの運動方程式から導出されるナビエ-ストークス方程式と、連続の式 [4, 5]:

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{f}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2)$$

で与えられる. ここで  $\vec{v}$  は流体の速度,  $\rho$  は流体の密度,  $p$  は流体の圧力,  $\eta$  は粘性率,  $\vec{f}$  は流体にはたらく単位質量当たりの体積力である.\*2 鉛直下向きに  $z$  軸をとり, その単位ベクトルを  $\vec{e}_z$  とすると, 地上では  $\vec{f} = g\vec{e}_z$  ( $g$  は重力加速度の大きさ) と表される. 特に水平方向に粘性流体が薄膜状に広がっている状況を想定し, (1) の左辺 (慣性項) は無視できるものとする (潤滑近似). さらに, 流体の非圧縮性を仮定して, (2) から  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$  を得る.  $xy$  方向の2次元ベクトル量を太文字で表すことにして,  $\vec{v} = \mathbf{u} + v_z \vec{e}_z$  とおくと, これらは,

$$\eta \nabla^2 \mathbf{u} + \eta \partial_z^2 \mathbf{u} = \nabla p, \quad (3)$$

$$\eta \nabla^2 v_z + \eta \partial_z^2 v_z = \partial_z p - \rho g, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} + \partial_z v_z = 0 \quad (5)$$

( $\partial_z = \partial/\partial z$ ) のように書き直される. これを解くための境界条件を次のように定める.

まず,  $z < 0$  の領域は固体が占めているとして (図1), その境界面  $z = 0$  で, 流体にノンスリップ条件:  $\mathbf{u} = 0$  を課す. また,  $xy$  平面上の位置ベクトル  $\mathbf{r}$  における時刻  $t$  での流体の厚さを  $e(\mathbf{r}, t)$  とすると, 流体と大気の境界  $z = e(\mathbf{r}, t)$  では, 自由表面としての境界条件から, 接線方向の応力はゼロである:  $t_i \Pi_{ij} n_j = 0$ . ここで,  $t_i, n_i$  は, 流体と大気の境界面の接線ベクトル  $\vec{t}$ , 法線ベクトル  $\vec{n}$  の成分を表し, アインシュタインの和の規約を用いた.  $\Pi_{ij}$  は応力テンソルで,  $\Pi_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta\partial_j v_i$  で与えられる [4] ので, この条件は  $\eta t_i n_j \partial_j v_i = 0$  となる. 今, 流体は  $xy$  方向に薄膜状に広がっていることを想定しているので,  $\vec{n} \simeq \vec{e}_z$  であり,  $\vec{t}$  は  $xy$  方向で近似できる. 大気との境界における  $\vec{n} \simeq \vec{e}_z$  方向の圧力については, ラプラスの定理から  $p - p_a = \gamma C$  が成り立つ [2].  $p_a$  は大気圧で,  $\gamma$  は表面張力,  $C = 1/R_1 + 1/R_2$  ( $R_1, R_2$  は主曲率半径) は面

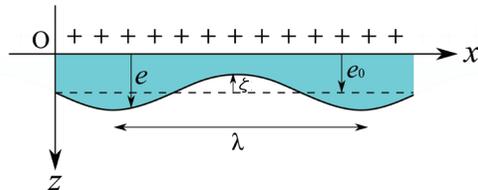


図1 薄膜と座標軸. 鉛直下向きを  $z$  軸正の向きにとる.  $z = 0$  が固体と流体の境界面で,  $z = e$  が流体と大気の境界面. 流体の薄膜の平均の厚さを  $e_0$  とし,  $e - e_0 = \zeta$  は流体表面の変位を表す.

\*2 ここでは, 3次元ベクトル量は上付きの矢印を用いて表す.

曲率で,  $z = e(\mathbf{r}, t)$  に対し,  $C = -\nabla \cdot ((1 + (\nabla e)^2)^{-1/2} \nabla e) \simeq -\nabla^2 e$  で与えられる [5]. 以上, 境界条件をまとめると

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{at } z = 0, \quad (6)$$

$$\eta \partial_z \mathbf{u} = 0 \quad \text{at } z = e(\mathbf{r}, t), \quad (7)$$

$$p_a - p = \gamma \nabla^2 e \quad \text{at } z = e(\mathbf{r}, t). \quad (8)$$

流体の  $xy$  方向の波長のオーダーを  $\lambda$  とすると (図 1), (5) から  $|v_z|/|\mathbf{u}| \sim e/\lambda \ll 1$  なので, (4) の左辺は (3) の左辺と比べて無視できて, (4) から  $\partial_z p - \rho g = 0$  となる. これを  $z$  について積分し, 境界条件 (8) を用いると

$$p(\mathbf{r}, z, t) = p_a - \rho g(e - z) - \gamma \nabla^2 e. \quad (9)$$

これを (3) の右辺に代入し,  $|\nabla^2 \mathbf{u}|/|\partial_z^2 \mathbf{u}| \sim (e/\lambda)^2 \ll 1$  より (3) の左辺第 1 項を無視すると  $\eta \partial_z^2 \mathbf{u} = -\nabla(\rho g e + \gamma \nabla^2 e)$  となり, (7) のもと  $z$  で積分すると  $\partial_z \mathbf{u} = -\eta^{-1}(z - e)\nabla(\rho g e + \gamma \nabla^2 e)$ . さらに (6) のもと  $z$  で積分すると

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{2\eta} z(2e - z)\nabla(\rho g e + \gamma \nabla^2 e). \quad (10)$$

次に, 流体と大気の境界面  $z = e$  における流体の鉛直方向の速度の関係式:  $\partial_t e + \mathbf{u}|_{z=e} \cdot \nabla e = v_z|_{z=e}$  ( $\partial_t = \partial/\partial t$ ) について, 固体との境界面  $z = 0$  で  $v_z = 0$  であることと (5) より,  $v_z|_{z=e} = \int_0^e dz \partial_z v_z = -\int_0^e dz \nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}|_{z=e} \cdot \nabla e - \nabla \cdot \int_0^e dz \mathbf{u}$  に注意すると  $\partial_t e + \nabla \cdot \int_0^e dz \mathbf{u} = 0$  となる. ここで (10) を代入すると  $\nabla \cdot \int_0^e dz \mathbf{u} = \frac{e^3}{3\eta} \nabla(\rho g e + \gamma \nabla^2 e)$  なので, さらに  $e(\mathbf{r}, t) = e_0 + \zeta(\mathbf{r}, t)$  ( $e_0$  は薄膜の平均の厚み) とすると (図 1), 流体と大気の境界面の変位  $\zeta$  に関する偏微分方程式

$$\partial_t \zeta + \frac{1}{3\eta} \nabla \cdot ((e_0 + \zeta)^3 \nabla(\rho g \zeta + \gamma \nabla^2 \zeta)) = 0 \quad (11)$$

が得られる.

## 2.2 線形近似

最低次の近似として, (11) で  $\zeta$  に関して線形レベルでの近似をすると

$$\partial_t \zeta + \frac{\gamma e_0^3}{3\eta} (\kappa^2 + \nabla^2) \nabla^2 \zeta = 0 \quad (12)$$

となる. ここで  $\kappa^{-1} = \sqrt{\gamma/(\rho g)}$  は毛管長である. このとき, 波数  $\mathbf{q}$  のモードに着目し,  $\zeta(\mathbf{r}, t) \propto e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} e^{\sigma_{\mathbf{q}} t}$  を代入すると

$$\sigma_{\mathbf{q}} = \frac{\gamma e_0^3}{3\eta} (\kappa^2 - q^2) q^2 = -\frac{\gamma e_0^3}{3\eta} \left( q^2 - \frac{\kappa^2}{2} \right)^2 + \frac{\gamma e_0^3 \kappa^4}{12\eta} \quad (13)$$

となるので, 波数の大きさが  $q_M = \kappa/\sqrt{2}$  となるものが最も不安定なモードであることがわかる. つまり, 波長が

$$\lambda_M = 2\pi/q_M = 2\sqrt{2}\pi\kappa^{-1} \quad (14)$$

の場合に変位が最も速く成長し, その特徴的時間 (変位  $\zeta$  の大きさが  $e \simeq 2.71828$  倍になるまでの時間) は

$$\tau_M = 1/\sigma_{q_M} = 12\eta/(\gamma e_0^3 \kappa^4) \quad (15)$$

である.

### 2.3 非線形効果

線形近似 (12) のもとでは, (13) を満たすモードの任意の線形結合  $\sum_{\mathbf{q}} \zeta_{\mathbf{q}}^0 e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} e^{\sigma_{\mathbf{q}} t}$  が解なので,  $|\mathbf{q}| = q_M$  を満たすモード全てが最も速く成長する. ここでは, 次の近似として, (11) の非線形項の効果も取り入れて摂動的に調べる. 表式を簡単化するため, (11) を  $\mathbf{r}' = q_M \mathbf{r}$ ,  $t' = t/\tau_M$ ,  $\zeta' = \zeta/e_0$  で書き換えた後, 全てブライムをとって表すと

$$\partial_t \zeta + \nabla \cdot ((1 + \zeta)^3 \nabla (2\zeta + \nabla^2 \zeta)) = 0. \quad (16)$$

これに, フーリエ展開した形:  $\zeta(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{q}} A_{\mathbf{q}}(t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$  を代入すると,  $e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$  の係数の関係式として

$$\begin{aligned} \dot{A}_{\mathbf{q}} = & q^2(2 - q^2)A_{\mathbf{q}} + 3 \sum_{\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b} \mathbf{q}_a \cdot \mathbf{q}(2 - q_a^2)A_{\mathbf{q}_a}A_{\mathbf{q}_b} \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{q}_a + \mathbf{q}_b} \\ & + 3 \sum_{\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b, \mathbf{q}_c} \mathbf{q}_a \cdot \mathbf{q}(2 - q_a^2)A_{\mathbf{q}_a}A_{\mathbf{q}_b}A_{\mathbf{q}_c} \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{q}_a + \mathbf{q}_b + \mathbf{q}_c} \\ & + \sum_{\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b, \mathbf{q}_c, \mathbf{q}_d} \mathbf{q}_a \cdot \mathbf{q}(2 - q_a^2)A_{\mathbf{q}_a}A_{\mathbf{q}_b}A_{\mathbf{q}_c}A_{\mathbf{q}_d} \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{q}_a + \mathbf{q}_b + \mathbf{q}_c + \mathbf{q}_d} \end{aligned} \quad (17)$$

が導かれる. ( $\dot{A}_{\mathbf{q}} = \frac{d}{dt} A_{\mathbf{q}}$  とした.) 変位  $\zeta$  が実数であることから  $A_{-\mathbf{q}} = A_{\mathbf{q}}^*$  であり, 変位の平均はゼロであることから  $A_0 = 0$  であることに注意する. 右辺第1項は線形項で,  $q = q_M = 1$  で成長が最大になることに対応しており, 第2項以降は相互作用項である.

そこで, 大きさが  $q_M = 1$  の波数ベクトルにのみ着目し, 線形近似でゼロでないモードの波数ベクトルが<sup>s</sup>, (R)  $\mathbf{k}_x, -\mathbf{k}_x$  の場合, (S)  $\mathbf{k}_x, -\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y, -\mathbf{k}_y$  の場合, (H)  $\mathbf{k}_x, -\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_2$  の場合, をそれぞれ調べよう. ここで,  $\mathbf{k}_x$  は大きさが  $q_M = 1$  の  $x$  軸正の向きのベクトル,  $\mathbf{k}_y$  は大きさが  $q_M = 1$  の  $y$  軸正の向きのベクトルで,

$$\mathbf{k}_1 = \cos \frac{2\pi}{3} \mathbf{k}_x + \sin \frac{2\pi}{3} \mathbf{k}_y = -\frac{1}{2} \mathbf{k}_x + \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{k}_y, \quad \mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_x - \mathbf{k}_1 = -\frac{1}{2} \mathbf{k}_x - \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{k}_y \quad (18)$$

とする.

■(R) 'rolls' pattern 初期条件として,  $A_{-\mathbf{q}} = A_{\mathbf{q}}^* \geq 0$  を満たすように,

$$A_{\mathbf{q}}(t=0) = \epsilon (\delta_{\mathbf{q}, \mathbf{k}_x} + \delta_{\mathbf{q}, -\mathbf{k}_x}), \quad (\epsilon > 0, \epsilon \ll 1) \quad (19)$$

をとる場合を考える. これは,  $\zeta(\mathbf{r}, 0) = 2\epsilon \cos x$  なので, ピークが<sup>s</sup>,  $x = 0$  から周期  $\lambda_M = 2\pi$  で  $y$  軸に平行にあるような縞状の摂動を与えたことに相当する. このとき

$$A_{\mathbf{q}}(t) = \epsilon A_{\mathbf{q},1}(t) + \epsilon^2 A_{\mathbf{q},2}(t) + \epsilon^3 A_{\mathbf{q},3}(t) + \dots \quad (20)$$

のように, 各モードを  $\epsilon$  の冪で展開すると, (17) において  $\epsilon$  の 1,2,3 次のオーダーの式から

$$\dot{A}_{\mathbf{k}_{x,1}} = A_{\mathbf{k}_{x,1}}, \quad \dot{A}_{2\mathbf{k}_{x,2}} = -8A_{2\mathbf{k}_{x,2}} + 6(A_{\mathbf{k}_{x,1}})^2, \quad (21)$$

$$\dot{A}_{\mathbf{k}_{x,3}} = A_{\mathbf{k}_{x,3}} - 15A_{\mathbf{k}_{x,1}}A_{2\mathbf{k}_{x,2}} + 3(A_{\mathbf{k}_{x,1}})^3, \quad (22)$$

が出てくる.<sup>\*3</sup> (ここで対称性から  $A_{-\mathbf{q}} = A_{\mathbf{q}}^* \in \mathbb{R}$ .) これらの微分方程式を (20) のもとで順に解くと<sup>\*4</sup>

$$A_{\mathbf{k}_x}^{(R)} = \epsilon e^t - 3\epsilon^3 \left( e^{3t} - \frac{11}{8} e^t + \frac{3}{8} e^{-7t} \right) + \dots, \quad A_{2\mathbf{k}_x}^{(R)} = \frac{3}{5} \epsilon^2 (e^{2t} - e^{-8t}) + \dots \quad (23)$$

が得られる.

<sup>\*3</sup> 相互作用項における波数ベクトルの保存則から  $A_{\mathbf{k}_{x,2}} = 0$ ,  $A_{2\mathbf{k}_{x,3}} = 0$  がわかる.

<sup>\*4</sup> まず, 斉次線形微分方程式である  $\dot{A}_{\mathbf{k}_{x,1}} = A_{\mathbf{k}_{x,1}}$  を解いて,  $A_{\mathbf{k}_{x,1}} = e^t$  が得られる. これを (21) 第2式の非斉次項に代入して  $\dot{A}_{2\mathbf{k}_{x,2}} + 8A_{2\mathbf{k}_{x,2}} = 6e^{2t}$  となり,  $D = d/dt$  という演算子を用いて  $A_{2\mathbf{k}_{x,2}} = (D+8)^{-1}(6e^{2t}) + Ce^{-8t} = \frac{3}{5}e^{2t} + Ce^{-8t}$  となる. 斉次解の係数としていつている積分定数  $C$  は, 初期条件  $A_{2\mathbf{k}_{x,2}}(t=0) = 0$  から  $C = -3/5$  と求まる. 残りの微分方程式も同様の操作により解ける.

■(S) square pattern 初期条件として,  $A_{-\mathbf{q}} = A_{\mathbf{q}}^* \geq 0$  を満たすように,

$$A_{\mathbf{q}}(t=0) = \epsilon (\delta_{\mathbf{q}, \mathbf{k}_x} + \delta_{\mathbf{q}, -\mathbf{k}_x} + \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{k}_y} + \delta_{\mathbf{q}, -\mathbf{k}_y}), \quad (\epsilon > 0, \epsilon \ll 1) \quad (24)$$

をとる場合を考える. これは,  $\zeta(\mathbf{r}, 0) = 2\epsilon(\cos x + \cos y)$  なので, ピークが<sup>5</sup>, 原点  $(0, 0)$  から  $x$  方向,  $y$  方向にそれぞれ周期  $\lambda_M = 2\pi$  で, 正方形形状になるように摂動を与えたことに相当する. (20) と同様に展開して, (17) において  $\epsilon$  の 1,2,3 次のオーダーの式から

$$\dot{A}_{\mathbf{k},1} = A_{\mathbf{k},1}, \quad \dot{A}_{2\mathbf{k},2} = -8A_{2\mathbf{k},2} + 6(A_{\mathbf{k},1})^2, \quad \dot{A}_{\mathbf{k}+\mathbf{k},2} = 6(A_{\mathbf{k},1})^2, \quad (25)$$

$$\dot{A}_{\mathbf{k},3} = A_{\mathbf{k},3} - 15A_{\mathbf{k},1}A_{2\mathbf{k},2} + 9(A_{\mathbf{k},1})^3, \quad (26)$$

が出てくる.<sup>5</sup> ここで, 対称性から,  $A_{\mathbf{k}} = A_{\pm\mathbf{k}_x} = A_{\pm\mathbf{k}_y}$ ,  $A_{2\mathbf{k}} = A_{\pm 2\mathbf{k}_x} = A_{\pm 2\mathbf{k}_y}$ ,  $A_{\mathbf{k}+\mathbf{k}} = A_{\pm\mathbf{k}_x \pm \mathbf{k}_y} = A_{\mp\mathbf{k}_x \pm \mathbf{k}_y}$  としている. これらの微分方程式を (24) のもとで順に解くと

$$A_{\mathbf{k}}^{(S)} = \epsilon e^t + \frac{9}{8}\epsilon^3 (e^t - e^{-7t}) + \dots, \quad A_{2\mathbf{k}}^{(S)} = \frac{3}{5}\epsilon^2 (e^{2t} - e^{-8t}) + \dots, \quad A_{\mathbf{k}+\mathbf{k}}^{(S)} = 3\epsilon^2 (e^{2t} - 1) + \dots \quad (27)$$

となる.

■(H) hexagonal pattern 初期条件として,  $A_{-\mathbf{q}} = A_{\mathbf{q}}^* \geq 0$  を満たすように,

$$A_{\mathbf{q}}(t=0) = \epsilon (\delta_{\mathbf{q}, \mathbf{k}_x} + \delta_{\mathbf{q}, -\mathbf{k}_x} + \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{k}_1} + \delta_{\mathbf{q}, -\mathbf{k}_1} + \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{k}_2} + \delta_{\mathbf{q}, -\mathbf{k}_2}), \quad (\epsilon > 0, \epsilon \ll 1) \quad (28)$$

をとる場合を考える. これは,  $\zeta(\mathbf{r}, 0) = 2\epsilon(\cos x + \cos(-x/2 + \sqrt{3}y/2) + \cos(x/2 + \sqrt{3}y/2))$  なので, ピーク<sup>6</sup>が<sup>6</sup>,  $(0, 0)$ ,  $(2\pi, 2\pi/\sqrt{3})$  から  $x$  方向,  $y$  方向にそれぞれ周期  $2\lambda_M = 4\pi$ ,  $2\lambda_M/\sqrt{3} = 4\pi\lambda_M/\sqrt{3}$  で, 正三角形の並びができるように摂動を与えたことに相当する. このときの隣合うピーク間の距離は

$$\lambda_P = \frac{2}{\sqrt{3}}\lambda_M \quad (29)$$

であることに注意する. (20) と同様に展開して, (17) において  $\epsilon$  の 1,2,3 次のオーダーの式から

$$\dot{A}_{\mathbf{k},1} = A_{\mathbf{k},1}, \quad \dot{A}_{\mathbf{k},2} = A_{\mathbf{k},2} + 3(A_{\mathbf{k},1})^2, \quad (30)$$

$$\dot{A}_{2\mathbf{k},2} = -8A_{2\mathbf{k},2} + 6(A_{\mathbf{k},1})^2, \quad \dot{A}_{\mathbf{k}+\mathbf{k},2} = -3A_{\mathbf{k}+\mathbf{k},2} + 9(A_{\mathbf{k},1})^2, \quad (31)$$

$$\dot{A}_{\mathbf{k},3} = A_{\mathbf{k},3} + 6A_{\mathbf{k},2}A_{\mathbf{k},1} - 15A_{\mathbf{k},1}A_{2\mathbf{k},2} - 12A_{\mathbf{k}+\mathbf{k},2}A_{\mathbf{k},1} + 15(A_{\mathbf{k},1})^3, \quad (32)$$

が出てくる. ここで, 対称性から  $A_{\mathbf{k}} = A_{\pm\mathbf{k}_x} = A_{\pm\mathbf{k}_1} = A_{\pm\mathbf{k}_2}$ ,  $A_{2\mathbf{k}} = A_{\pm 2\mathbf{k}_x} = A_{\pm 2\mathbf{k}_1} = A_{\pm 2\mathbf{k}_2}$ ,  $A_{\mathbf{k}+\mathbf{k}} = A_{\mp\mathbf{k}_x \pm \mathbf{k}_1} = A_{\mp\mathbf{k}_x \pm \mathbf{k}_2} = A_{\mp\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2}$  としている. これらの微分方程式を (24) のもとで順に解くと

$$A_{\mathbf{k}}^{(H)} = \epsilon e^t + 3\epsilon^2 (e^{2t} - e^t) + \frac{1}{5}\epsilon^3 \left( 6e^{3t} - 90e^{2t} + \frac{1005}{8}e^t - 36e^{-2t} - \frac{45}{8}e^{-7t} \right) + \dots, \quad (33)$$

$$A_{2\mathbf{k}}^{(H)} = \frac{3}{5}\epsilon^2 (e^{2t} - e^{-8t}) + \dots, \quad A_{\mathbf{k}+\mathbf{k}}^{(H)} = \frac{9}{5}\epsilon^2 (e^{2t} - e^{-3t}) + \dots \quad (34)$$

となる.

以上の結果から, (H) の場合のみ, メインモード (線形近似の解) に非線形効果が  $\epsilon^2$  のオーダーで同符号で効いてくることがわかる. このことから, (R), (S) よりも (H) のほうが実現されやすいと考えられる. (H) の場合, (R), (S) の場合と違って, メインモードの 3 つの波数ベクトルが  $\mathbf{k}_x + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = 0$  を満たしているので, 非線形効果が (17) の右辺第 2 項において効いてくる.

<sup>5</sup> 相互作用項における波数ベクトルの保存則から, (R) の場合と同様に  $A_{\mathbf{k},2} = 0$ ,  $A_{2\mathbf{k},3} = 0$  となる.

<sup>6</sup> この場合, 極値の条件  $\partial_x \zeta(\mathbf{r}, 0) = \partial_y \zeta(\mathbf{r}, 0) = 0$  を満たす点で, かつ,  $\zeta = 3\epsilon$  となる位置である.

■(R) から (H) への遷移 実際, rolls pattern から hexagonal pattern への遷移がおこることは, 次のように理解できる. 初期条件として,

$$A_{\mathbf{q}}(t=0) = \epsilon_1 (\delta_{\mathbf{q}, \mathbf{k}_x} + \delta_{\mathbf{q}, -\mathbf{k}_x}) + \epsilon_2 (\delta_{\mathbf{q}, \mathbf{k}_1} + \delta_{\mathbf{q}, -\mathbf{k}_1} + \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{k}_2} + \delta_{\mathbf{q}, -\mathbf{k}_2}), \quad (\epsilon_1 > \epsilon_2 > 0, \epsilon_1 \ll 1) \quad (35)$$

の場合を考えよう. これは初期の変位の大きさが  $A_{\mathbf{R}}(t=0) = \epsilon_1 - \epsilon_2 = A_{\mathbf{k}_x}(0) - A_{\mathbf{k}_1}(0)$  の rolls pattern と変位の大きさが  $A_{\mathbf{H}}(t=0) = \epsilon_2 = A_{\mathbf{k}_1}(0) = A_{\mathbf{k}_2}(0)$  の hexagonal pattern との重ね合わせであると解釈できる. (17) から  $\epsilon_1, \epsilon_2$  の 2 次のオーダーまでとると, この初期条件でゼロでないモードのみで近似すればよく,

$$\dot{A}_{\mathbf{k}_x} = A_{\mathbf{k}_x} + 3A_{\mathbf{k}_1}^* A_{\mathbf{k}_2}^*, \quad \dot{A}_{\mathbf{k}_1} = A_{\mathbf{k}_1} + 3A_{\mathbf{k}_2}^* A_{\mathbf{k}_x}^*, \quad \dot{A}_{\mathbf{k}_2} = A_{\mathbf{k}_2} + 3A_{\mathbf{k}_x}^* A_{\mathbf{k}_1}^* \quad (36)$$

となる. ここで, 初期条件が実なので,  $A_{-\mathbf{q}} = A_{\mathbf{q}}^* \in \mathbb{R}$  とし, (R) 成分を  $A_{\mathbf{R}} = A_{\mathbf{k}_x} - A_{\mathbf{k}_1}$ , (H) 成分を  $A_{\mathbf{H}} = A_{\mathbf{k}_1} = A_{\mathbf{k}_2}$ , として書き直すと

$$\dot{A}_{\mathbf{R}} = A_{\mathbf{R}} - 3A_{\mathbf{R}}A_{\mathbf{H}}, \quad \dot{A}_{\mathbf{H}} = A_{\mathbf{H}} + 3A_{\mathbf{H}}^2 + 3A_{\mathbf{H}}A_{\mathbf{R}}. \quad (37)$$

これを解くために  $A_{\mathbf{k}_x} = u_1 e^t$ ,  $A_{\mathbf{k}_1} = A_{\mathbf{k}_2} = u_2 e^t$  (つまり  $u_1, u_2$  は線形近似で定数の部分を変化させたもの) とおくと

$$\dot{u}_1 = 3u_2^2 e^t, \quad \dot{u}_2 = 3u_1 u_2 e^t \quad (38)$$

となるが, これから  $\frac{d}{dt}(u_1^2 - u_2^2) = 0$  が成り立つので, 初期条件から  $u_1^2 - u_2^2 = \epsilon_1^2 - \epsilon_2^2$ . これを (38) 第 1 式に代入して  $\dot{u}_1 = 3(u_1^2 - (\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2))e^t$  となり, 変数分離して積分すると

$$\frac{1}{2} \log \frac{u_1 - \sqrt{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2}}{u_1 + \sqrt{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2}} = 3\sqrt{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2}(e^t - 1) - \log \left( \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} + \sqrt{\frac{\epsilon_1^2}{\epsilon_2^2} - 1} \right) \quad (39)$$

となる. さらに,

$$3\sqrt{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2}(e^t - 1) = \phi, \quad \cosh \phi_\infty = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (40)$$

とおいて整理すると,

$$u_1 = \sqrt{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2} \coth(\phi_\infty - \phi), \quad u_2 = \frac{\sqrt{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2}}{\sinh(\phi_\infty - \phi)} \quad (41)$$

が得られる.  $\phi$  は  $t=0$  のときゼロだが, 時間が経過して  $\phi(t_\infty) = \phi_\infty$  となる  $t_\infty$ , つまり  $t_\infty = \log \left( 1 + \phi_\infty / (3\sqrt{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2}) \right)$ , に近づくと  $u_1, u_2$  は発散するため,  $t = t_\infty$  までしか物理的意味を持たないことに注意する. 以上より, (37) の解は

$$A_{\mathbf{R}} = \sqrt{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2} e^t \frac{\cosh(\phi_\infty - \phi) - 1}{\sinh(\phi_\infty - \phi)}, \quad A_{\mathbf{H}} = \frac{\sqrt{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2} e^t}{\sinh(\phi_\infty - \phi)}. \quad (42)$$

したがって,

$$\frac{A_{\mathbf{R}}}{A_{\mathbf{H}}} = \cosh(\phi_\infty - \phi) - 1 \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow t_\infty - 0)$$

となり, 時間が経過すると rolls pattern  $A_{\mathbf{R}}$  よりも hexagonal pattern  $A_{\mathbf{H}}$  のほうが優勢になる. つまり, 図 2 のような rolls pattern から, 図 3 のような hexagonal pattern へ遷移していく.

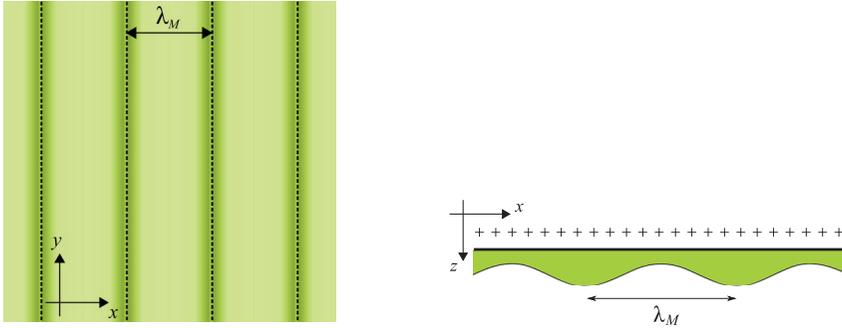


図2 rolls pattern. 左は鉛直下方 ( $z$  軸方向) から見たもの、右は真横 ( $y$  軸方向) から見たものを表す。

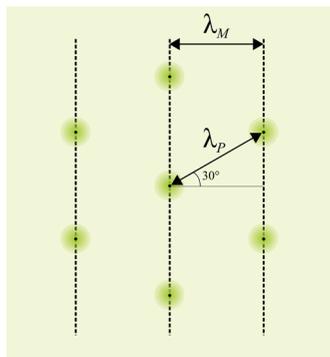


図3 hexagonal pattern. 色が濃くなっている部分がしずくを表している。点線は間隔  $\lambda_M$  の rolls pattern を表す。hexagonal pattern における隣り合うしずくのピーク間の距離は  $\lambda_P = \lambda_M / \cos 30^\circ$  である。一つのしずくに対し、隣り合うしずくは6個あり、正六角形をなす。

### 3 実験

#### 3.1 実験装置と手順

ここで用いた実験装置は、食用オリーブ油、ガラス板、2mL スポイト、50mL ビーカー、水槽、カメラ（動画撮影用）、水平器、定規、ストップウォッチ、スタンドライト 2 台、クランプ付き固定スタンド 2 台、土台 2 つ、からなる。（図 4）

2 つの土台の上に表面を綺麗に拭いたガラス板を載せ、ガラス板が水平になるよう水平器を用いて調整する。クランプ付き固定スタンドを 2 台用いてカメラを固定し、ガラス板と同様に水平にする。その後、ガラス板の下に油を受け止めるための水槽を置く。さらに、スタンドライト 2 台でガラス板を照らし、しずくがよく見えるように調整する。

このように装置を設定した後、

1. 2mL スポイトを用いて、ビーカーに 6mL 分の食用オリーブ油を量り取る。
2. 用意した食用オリーブ油をガラス板の上に垂らす。油が薄い膜になるよう、ガラス板を適度に傾けて油を広げていく。ある程度広げたら、ガラス板を土台の上に戻し、薄膜の厚みが均等になるように数分間置いておく。



図4 実験装置

3. ガラス板を素早く裏返し、油のある面を下にする。裏返した後から、薄膜が不安定になる時間をストップウォッチで計測するとともに撮影を開始する。
4. 撮影された動画を解析し、hexagonal pattern を見つけてピーク間の距離  $\lambda_P$  を測定する。

### 3.2 実験結果とその解析

オリーブ油をガラス板に垂らして広げて薄膜にし、裏返した直後の画像が図5左である。写真をフリーソフト GIMP により画像解析した結果、薄く広げたオリーブ油の面積はおおよそ  $251\text{cm}^2$  であった。よって、オリーブ油の体積と面積より、薄膜の平均の厚みは  $e_0 = 0.239\text{mm}$  である。ガラス板を裏返した後、しばらく時間が経過すると、図5右のように、オリーブ油のしずくが生じた。



図5 オリーブ油の薄膜としずく。左はガラス板を裏返した直後であり、薄膜の範囲を見やすくするために、写真に印をつけている。右は、ガラス板を裏返した後、時間が経過してしずくが生じた様子。

この実験で生じたしずくの中で、hexagonal pattern を3つ観察することができた。3つの hexagonal pattern (それぞれパターン A, B, C とする) において、それぞれのしずくに0から6までの番号を付けた(図6)。0のしずくと1のしずくのピーク間を1箇所目とし、0と2の間を2箇所目、0と3の間を3箇所目(以下同様)というように合計6箇所目のピーク間の距離を画像解析により測定した。その結果の数値データを付録Aにまとめた。その中の表1, 2, 3では、各パターンにおける特定のしずくのピーク間の距離の測定値について、それぞれ平均および標準偏差を計算している。

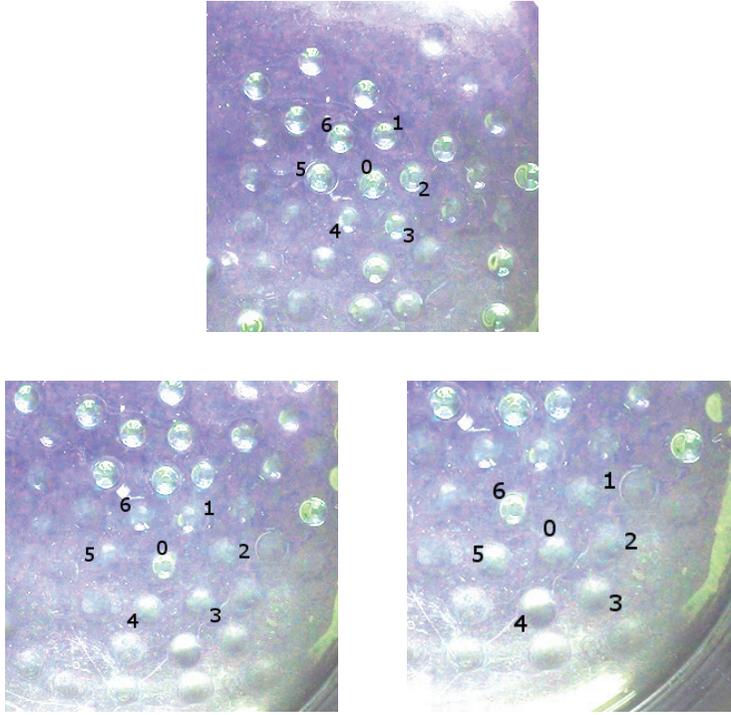


図6 観測された hexagonal pattern. 写真上で、中心のしずくに 0、六角形の頂点に 1 から 6 の番号をつけている。上のものをパターン A、左下のをパターン B、右下のをパターン C とする。

理想的には、同一のしずくのピーク間の距離  $\lambda_P$  で hexagonal pattern が周期的にできると考えられるので、観測されたパターン A, B, C の  $\lambda_P$  の測定データ全てを用いて平均をとったものを  $\lambda_P^{\text{exp}}$ 、標準偏差を  $\Delta\lambda_P^{\text{exp}}$  とすると

$$\lambda_P^{\text{exp}} = 1.86 \text{ cm}, \quad \Delta\lambda_P^{\text{exp}} = 0.18 \text{ cm}$$

となった。一方で、理論的には、hexagonal pattern におけるピーク間の距離  $\lambda_P$  は、(29), (14) より

$$\lambda_P^{\text{th}} = 4\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa^{-1} = 4\pi\sqrt{\frac{2\gamma}{3\rho g}} = 2.05 \text{ cm} \quad (43)$$

で与えられる。ここで、地上での重力加速度の大きさを  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 、食用オリーブ油の表面張力を  $\gamma = 35.8 \times 10^{-3} \text{ N/m}$ 、密度を  $\rho = 0.9158 \text{ g/cm}^3$  とした [6]。したがって、理論値と実験値の相対誤差は、

$$\frac{|\lambda_P^{\text{exp}} - \lambda_P^{\text{th}}|}{\lambda_P^{\text{th}}} = 0.093, \quad (44)$$

つまり、9% 程度の誤差となり、大体合っている。

なお、しずくが生じる、レイリー-テイラー不安定性の特徴的時間  $\tau_M$ (15) は、図 5 左で求めた薄膜の厚さ  $e_0 = 0.239 \text{ mm}$  を用いると、

$$\tau_M = \frac{12\eta}{\gamma e_0^3 \kappa^4} = \frac{12\eta\gamma}{e_0^3 \rho^2 g^2} = 35.2 \text{ s} \quad (45)$$

となる。ここで、食用オリーブ油の粘性率  $\eta = 9.0 \times 10^{-2} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  [7] を用いた。図 6 のパターン A はガラス板を裏返してから 18 分 28 秒後、パターン B, C は、裏返してから 5 分 58 秒後に観測されたものである。これらは、特徴的時間 35.2 秒よりかなり時間が経過した後である。

## 4 おわりに

### 4.1 まとめと考察

本稿では、粘性流体の薄膜のレイリー-テイラー不安定性に関して、非線形な基本方程式とその近似解を調べることで、ある特定の間隔の hexagonal pattern が生じやすいという理論的考察を紹介した後、実際に行った食用オリーブ油を用いた実験についてまとめた。理論的な予想通り、hexagonal pattern をなすしずくが観測され、そのピーク間の距離  $\lambda_P$  の実測値は、理論値と 9% 程度の誤差で大体合っていることがわかった。

今回の実験では 3 つのパターンに着目して測定したが、このパターン A, B, C は、ガラス板を裏返した後、不安定性の特徴的時間 35.2 秒 (45) の 10 倍以上時間が経過した後のものであるため、不安定性によりしずくが十分成長した後であり、その間にしずくの位置がずれる等して、理論的予言と少しずれが生じた可能性がある。そもそも、hexagonal pattern を導く理論では、理想化して無限に周期的なパターンが広がっているとして非線形効果を近似的に取り入れているが、より現実に近い状況で解くには、薄膜の広がり有限であり、その縁の影響も取られるべきかもしれない。

特徴的時間  $\tau_M = 35.2\text{s}$  (45) を求める上で、薄膜の厚み  $e_0$  の実測値を用いているが、オリーブ油を正確に 6mL 測り取り、ガラス板に広げることがまず難しい。また、面積を求めることも、油が見にくく形が歪なため大雑把にしかできない。そのため、それらから求められる薄膜の厚みも大雑把にならざるを得ない。さらに、ガラス板の上の薄膜を広げるときと裏返すときに、厚みが均等ではなくなってしまうと考えられる。厚みを均等にするための改善点として、薄膜を広げる際に人の手を加えず、自然に広がるまで待つという方法が挙げられる。この場合、重力によってゆっくりと広がるため、均等に広がるのが期待される。しかし、広がるまでに非常に時間がかかるため、ガラス板の調整が非常に重要になってくる。例えば、薄膜が広がる長時間に、薄膜表面に汚れ（大気中の小さなごみや塵）が付着しないよう細心の注意を払わなければならない。また、ガラス板を水平に保っていないと油が傾いている方向に流れて行ってしまい、均等さが維持できないため、より注意を払って水平にする必要がある。本実験では、実験装置の関係でガラス板の表面を清潔に保つことが難しく、また完全に水平に調節することが難しかったため、このような方法での実験は困難であった。

また、hexagonal pattern のピーク間の距離  $\lambda_P$  を実験的に見積もる際、いつの時点のどこのパターンに着目して測定するかということについては、不定性がある。より正確な実験値を得るには、しずくのピーク間の距離を測定するためのパターンを選択する客観的な方針を定めておくことが望ましい。

### 4.2 実験用教材として

本研究で行った実験は、食用オリーブ油とガラス板さえあれば、レイリー-テイラー不安定性によるしずくの出現を観測でき、一般の学校や家庭においても実行が可能なほど手軽なものである。ただし、定量的な解析等を行うには、カメラ等で撮影できるようにしておく必要があるが、本実験で行ったように、動画撮影機能がある iPad をガラス板の上方に固定するだけで十分な機能を果たすことができる。また、画像解析による距離の測定においても、パソコン上で画像処理を行える定番のフリーソフト GIMP を用いることで十分である。

本実験を行う上で注意点がある：(1) 実験を行う前に、ガラス板の表面を綺麗にしておかなければならない。ほこりなどがガラス板表面に付着していると、その場所にしずくのピークができてしまい、本来観測したいしずくの様子やピークの位置に影響を与える可能性があるためである。(2) ガラス板の傾きをゼロ（水平）にしないと、しずくが徐々に移動していき、他のしずくとくっついて落ちてしまう。すると、本来観測したかったはずのしずくの様子やパターンが壊れてしまう。また、しずくが移動していくことで、撮影している場所から離れていくため、定量的に正確な測定をする上での妨げとなる。よって、実験を始める前にガラス板を

できるだけ水平にするように微調整しておかねばならない。(3) しずくのピーク間の距離を画像解析により測定するため、ガラス板を裏返した後に定規等を置くことを忘れないようにする。(4) 解析をする際、しずくの形や位置を把握しやすくするために、パソコンを用いて写真の色彩を調整する。

これらのことに十分注意して実験を行うことで、粘性流体の薄膜の物理的性質として、レイリー-テイラー不安定性によるしずく出現の現象を観測できるだけでなく、そのパターンを定量的に解析できる。

## 付録 A hexagonal pattern の測定データ

図 6 に基づく測定データを、各パターンごとに表にまとめたものを以下に示した。

表 1 hexagonal pattern A: しずくのピーク間の距離  $\lambda_P$  の測定値 (単位 cm)

	1 箇所目	2 箇所目	3 箇所目	4 箇所目	5 箇所目	6 箇所目
1 回目	1.86	1.59	1.75	1.57	1.91	2.05
2 回目	1.80	1.46	1.74	1.53	1.90	2.04
3 回目	1.85	1.46	1.77	1.54	1.92	2.08
4 回目	1.76	1.42	1.72	1.55	1.94	2.06
5 回目	1.84	1.48	1.77	1.59	1.96	2.07
6 回目	1.80	1.42	1.74	1.55	1.94	2.03
7 回目	1.80	1.42	1.68	1.54	1.98	2.09
8 回目	1.84	1.46	1.72	1.58	1.90	2.10
9 回目	1.80	1.42	1.74	1.55	1.94	2.03
10 回目	1.80	1.42	1.72	1.54	1.936	2.03
平均	1.82	1.46	1.74	1.55	1.93	2.06
標準偏差	0.031	0.053	0.027	0.020	0.026	0.026

この hexagonal pattern A の測定データ全体の平均は  $\lambda_P^A = 1.76$  cm, 標準偏差は 0.21 cm である。よって、理論値 (43) との相対誤差は  $|\lambda_P^A - \lambda_P^B|/\lambda_P^B = 0.141$  程度となる。

表 2 hexagonal pattern B: しずくのピーク間の距離  $\lambda_P$  の測定値 (単位 cm)

	1 箇所目	2 箇所目	3 箇所目	4 箇所目	5 箇所目	6 箇所目
1 回目	1.91	2.23	1.89	1.64	1.98	1.96
2 回目	1.92	2.28	1.90	1.75	1.91	1.92
3 回目	1.85	2.08	1.85	1.69	1.92	1.92
4 回目	1.95	2.29	1.92	1.73	1.93	1.97
5 回目	1.96	2.32	1.86	1.77	1.96	1.98
6 回目	1.88	2.28	1.90	1.75	1.97	1.92
7 回目	1.93	2.25	1.90	1.75	2.01	1.90
8 回目	1.97	2.22	1.78	1.66	1.95	1.95
9 回目	1.86	2.24	1.90	1.75	2.00	1.90
10 回目	1.90	2.20	1.90	1.75	2.02	1.92
平均	1.91	2.24	1.88	1.72	1.97	1.93
標準偏差	0.041	0.067	0.041	0.044	0.038	0.029

この hexagonal pattern B の測定データ全体の平均は  $\lambda_P^B = 1.94$  cm, 標準偏差は 0.16 cm である. よって, 理論値 (43) との相対誤差は  $|\lambda_P^B - \lambda_P^{\text{th}}|/\lambda_P^{\text{th}} = 0.054$  程度となる

表3 hexagonal pattern C: しずくのピーク間の距離  $\lambda_P$  の測定値 (単位 cm)

	1 箇所目	2 箇所目	3 箇所目	4 箇所目	5 箇所目	6 箇所目
1 回目	2.00	1.73	1.91	1.84	1.93	1.98
2 回目	2.08	1.67	1.78	1.77	1.90	1.90
3 回目	2.00	1.85	1.85	1.92	2.08	1.85
4 回目	2.08	1.71	1.90	1.84	1.98	1.92
5 回目	1.98	1.73	1.82	1.80	1.96	1.86
6 回目	2.02	1.79	1.81	1.85	1.90	1.90
7 回目	2.00	1.74	1.87	1.84	1.90	1.90
8 回目	2.04	1.58	1.81	1.82	1.91	1.83
9 回目	2.11	1.78	1.72	1.73	1.89	1.90
10 回目	2.08	1.76	1.76	1.80	1.93	1.90
平均	2.04	1.73	1.82	1.82	1.94	1.89
標準偏差	0.045	0.073	0.061	0.051	0.058	0.041

この hexagonal pattern C の測定データ全体の平均は  $\lambda_P^C = 1.87$  cm, 標準偏差は 0.11 cm である. よって, 理論値 (43) との相対誤差は  $|\lambda_P^C - \lambda_P^{\text{th}}|/\lambda_P^{\text{th}} = 0.088$  程度となる.

## References

- [1] 赤間俊介, 小杉真登, 佐藤智宏, “境界面の流体力学 – 薄膜と噴流の不安定性 –”, 新潟大学教育学部理科専修卒業論文 (2017).
- [2] ドウジエンス, プロシヤール-ヴィアール, ケレ (共著), 奥村剛 (訳), “表面張力の物理学 – しずく, あわ, みずたま, さざなみの世界 –”, 吉岡書店 (2003).
- [3] M. Fermigier, L. Limat, J.E. Wesfreid, P. Boudient, and C. Quilliet, “Two-dimensional patterns in Rayleigh-Taylor instability of a thin layer”, *J. Fluid Mech.* **236**, 349 (1992).
- [4] S. A. サフラン (著), 好村滋行 (訳), “コロイドの物理学”, 吉岡書店 (2001).
- [5] エリ・デ・ランダウ, イェ・エム・リフシッツ (共著), 竹内均 (訳), “流体力学 1”, 東京図書 (1970).
- [6] 日本油化学会 (編), “油脂・脂質・界面活性剤データブック”, 丸善出版 (2012).
- [7] 高木隆司 (著), “流れの物理”, 朝倉書店 (1988).